CÁLCULO INFINITESIMAL

SEGUNDA EDICIÓN

Michael Spivak

UNIVERSIDAD DE BRANDEIS



Editorial Reverté, S.A.

Título de la obra original:
CALCULUS, Second Edition

Versión original en lengua inglesa publicada por:
W.A. Benjamin, Inc., New York

Versión Española por el:
Dr. Bartolomé Frontera Marqués
Doctor Ingeniero de Montes
Doctor de Ciencias Matemáticas
Profesor Adjunto de Estadística Matemática
y Cálculo de Probabilidades de la Universidad de Zaragoza

Propiedad de:
© 1992 Editorial Reverté, S.A.
Loreto 13-15 Local B
08029 Barcelona, España
Tel.: 419-33-36 Fax: 419-51-89
E-Mail (Internet):
101545.2361@compuserve.com

y

© 1996 Reverté Ediciones, S.A. de C.V.
Río Pánuco 141
C.P. 06500 México, D. F.
Tel.: 533-56-58 Fax: 514-67-99
E-Mail (Internet):
104164.23@compuserve.com

2ª Edición
3ª Reimpresión

ISBN 84-291-5136-2 **(España)**
ISBN 968-6708-18-9 **(México)**

Impreso en México Printed in Mexico

Dedicado a la Memoria de Y. P.

PREFACIO

Considero a cada hombre como un deudor
de su profesión,
y ya que de ella recibe sustento y provecho,
así debe procurar
mediante el estudio
servirle de ayuda y ornato.

FRANCIS BACON

La idea central que ha estado presente en la confección de cada uno de los detalles de este libro, ha sido la de presentar el Cálculo, no simplemente como un preludio de las matemáticas, sino como el primer encuentro real con las mismas. Puesto que fueron los fundamentos del análisis los que suministraron el material que sirvió de base para el desarrollo de las formas modernas de discurso matemático, debería verse en el Cálculo una ocasión de profundizar en los conceptos básicos de lógica, en vez de tratar de eludirlos. Además de fomentar la intuición de los estudiantes acerca de los hermosos conceptos del análisis, es desde luego igualmente importante convencerlos de que la precisión y el rigor no constituyen ni obstáculos para la intuición ni tampoco fines en sí mismos, sino simplemente el medio natural para formular y tratar las cuestiones matemáticas.

Esta finalidad implica un enfoque de las matemáticas que, en cierto sentido, tratamos de defender a lo largo de todo el libro. Por perfecta que pueda ser la exposición de cada materia en particular, los fines del libro sólo se alcanzarán si tiene éxito en su conjunto. Por ello, de poco serviría hacer una lista de las materias tratadas o mencionar las prácticas pedagógicas y otras innovaciones. Incluso la rápida ojeada que rutinariamente se da a cada nuevo texto de Cálculo, valdrá más que cualquier explicación, y el profesor con criterio formado acerca de cada aspecto particular del Cálculo, sabrá dónde consultar para ver si el libro satisface sus aspiraciones.

Hay, sin embargo, algunos rasgos que requieren un comentario explícito. De los veintinueve capítulos del libro, dos (señalados con asteriscos) son optativos, y los tres capítulos de la parte V se han incluido solamente con vistas a aquellos estudiantes a los que pudiera interesar un examen por cuenta propia de la construcción de los números reales. Los apéndices a los capítulos 3 y 11 contienen también material optativo.

El orden de los restantes capítulos es, intencionadamente, inflexible del todo, ya que el propósito de este libro es presentar el Cálculo como la evolución de una idea y no como una colección de materias. Puesto que los conceptos más sugestivos del Cálculo no aparecen hasta la parte III, las partes I y II requerirán probablemente menos tiempo del que su extensión hace suponer, pues aunque el libro está pensado para un curso completo, no es obligado recorrer todos los capítulos a un mismo ritmo. Un punto de separación bastante natural se presenta entre las partes II y III, de modo que sería incluso posible llegar antes a la diferenciación y a la integración pasando muy brevemente sobre la parte II y volviendo si acaso a ella más adelante para un estudio más detallado. Este uso estaría más de acuerdo con la organización tradicional de la mayor parte de los cursos de cálculo, pero

creo que no haría más que disminuir el valor del libro para estudiantes con algunos conocimientos previos de Cálculo, así como para los más dotados y con buena preparación general.

Los problemas han sido preparados pensando en este tipo de alumnado. Van desde ejercicios directos, aunque no simples en exceso, en los que se desarrollan técnicas fundamentales y sirven para poner a prueba la asimilación de los conceptos, hasta problemas de considerable dificultad pero de comparable interés. Hay en total alrededor de 625 problemas. Los que destacan procesos operativos contienen por lo general muchos ejemplos numerados con cifras romanas, mientras que las letras minúsculas se usan en otros problemas para distinguir partes interrelacionadas. Se dan algunas indicaciones acerca de la dificultad relativa de los ejercicios mediante un sistema de simples y de dobles asteriscos, pero son tan diversos los criterios posibles para juzgar la dificultad, y además son tantas las sugerencias que se dan, sobre todo para los problemas más difíciles, que esta orientación no resulta del todo objetiva. Algunos problemas son tan difíciles, sobre todo si no se tienen en cuenta las sugerencias, que los mejores estudiantes deben atacar solamente aquellos que les interesen. De entre los menos difíciles conviene hacer una selección apta para mantener una buena clase ocupada, pero no frustrada. El capítulo de soluciones contiene las de aproximadamente la mitad de los ejemplos, lo que corresponde a una selección de problemas que deberían servir para comprobar la destreza técnica. Se ha editado aparte un libro de soluciones que da las de las partes restantes de estos problemas y las de todos los demás problemas en general. Existe finalmente una lista de lecturas aconsejadas a las cuales se remite con frecuencia en los problemas y un índice de símbolos.

Me complace la oportunidad de mencionar a las muchas personas a quienes debo mi agradecimiento. Mrs. Jane Bjorkgren tuvo que realizar verdaderos prodigios de mecanografiado interpretando mi irregular manuscrito. Mr. Richard Serkey ayudó a recoger el material que proporciona las ilustraciones históricas de los problemas, y Mr. Richard Weiss elaboró las soluciones que aparecen al final del libro. Estoy especialmente agradecido a mis amigos Michael Freeman, Jay Goldman, Anthony Phillips y Robert Wells por el cuidado con que leyeron y por la firmeza con que hicieron la crítica de una versión preliminar de este libro. Ni falta hace decir que ellos no son responsables de las deficiencias que quedan, especialmente porque en ocasiones he desestimado sugerencias que hubiesen hecho parecer el libro adecuado para un sector más amplio de alumnos. Debo expresar mi admiración hacia los editores y equipo directivo de W. A. Benjamin, Inc., que en todo momento se preocuparon de aumentar el atractivo del libro, habida cuenta del

tipo de lectores para quienes se ha escrito.

Las imperfecciones, siempre presentes en las primeras ediciones, fueron galantemente soportadas por un curtido grupo de universitarios de primer curso que asistieron a la clase avanzada de Matemáticas en la Universidad de Brandeis durante el año académico 1965-66. La mitad, aproximadamente, de este curso, se dedicó a Álgebra y Topología y la otra mitad al Cálculo con la versión preliminar de este libro como texto. En tales circunstancias es casi obligado decir que la versión preliminar constituyó un éxito alentador. Esto siempre se puede decir sin riesgo, ya que después de todo es poco probable que la clase se levante para protestar públicamente, pero me parece a mí que es a los mismos estudiantes a los que hay que atribuir el mérito por la profundidad con que asimilaron un impresionante caudal de matemáticas. Me ilusiona pensar que otros estudiantes puedan también beneficiarse con el mismo entusiasmo de este libro.

Waltham, Massachusetts **MICHAEL SPIVAK**
Febrero 1967

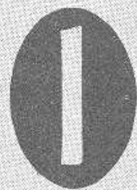
PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN

Muchas veces me han dicho que el título de este libro tendría que ser algo así como «Introducción al Análisis», dado que viene siendo utilizado en cursos en que los estudiantes conocen ya la mecánica del cálculo (tales cursos son normales en Europa y cada vez más en uso en los EE.UU.). Cambiar el título después de trece años estaría fuera de lugar, pero introducir otros cambios, además de corregir erratas y errores sí que parece oportuno del todo. Existen ahora apéndices especiales para temas que antes se hallaban tratados sólo superficialmente: coordenadas polares, continuidad uniforme, curvas parametrizadas, sumas de Riemann y cálculo de longitudes, áreas y volúmenes mediante integrales. Algunos temas, tales como operaciones con series de potencias, han sido desarrollados con más detalle en el texto y sobre los mismos hay ahora más ejercicios, mientras que otros, como el método de Newton, la regla del trapecio y la regla de Simpson se estudian más minuciosamente en los problemas. Se presentan en total alrededor de 160 problemas nuevos, muchos de los cuales están, en cuanto a dificultad, en un término medio entre los pocos ejercicios de rutina del comienzo de cada capítulo y los más difíciles que aparecen más adelante.

La mayor parte de los problemas nuevos son obra de Ted Shrifrin. Frederik Gordon descubrió serios errores en los problemas originales y ofreció correcciones no triviales, así como la elegante demostración del teorema 12-2 que en la primera edición necesitó dos lemas y ocupó dos páginas. Joseph Lipman me habló también de esta demostración así como del truco análogo válido para el último teorema del Apéndice al capítulo 11 que en la primera edición quedó sin demostrar. Roy O. Davies me dio la idea para el problema 11-66 que antes se hallaba demostrado sólo en el problema 20-8, y Marina Rainer me sugirió algunos problemas interesantes, en particular sobre continuidad uniforme y series infinitas. Vaya para todos mi agradecimiento, junto con el deseo de que sus sugerencias aparezcan felizmente recogidas en esta nueva edición.

MICHAEL SPIVAK

ÍNDICE ANALÍTICO

PARTE 

PRÓLOGO

Ser consciente
de la propia ignorancia es un gran paso
hacia el saber.

BENJAMÍN DISRAELI

CAPÍTULO

1

PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS NÚMEROS

El título de este capítulo expresa, en pocas palabras, los conocimientos matemáticos necesarios para leer este libro. De hecho este corto capítulo es simplemente una explicación de lo que se entiende por «propiedades básicas de los números», todas las cuales —suma y multiplicación, resta y división, resolución de ecuaciones, factorización y otros procesos algebraicos— nos son ya conocidas. Sin embargo, este capítulo no es un repaso. A pesar de lo conocido de la materia, la exploración que vamos a emprender es probable que parezca una novedad; no se trata de presentar una revisión prolija de materias tradicionales, sino de sintetizar este viejo saber en un reducido número de propiedades sencillas e inmediatas de los números. Algunas pueden parecer incluso demasiado sencillas para ser mencionadas, pero va a resultar que un sorprendente número de diversos hechos importantes se obtendrá como consecuencia de las que vamos a destacar.

De las doce propiedades que vamos a estudiar en este capítulo, las nueve primeras se refieren a las operaciones fundamentales de suma y de multiplicación. De momento vamos a considerar sólo la suma. Esta operación se efectúa con un par de números —la suma $a + b$ existe cualesquiera que sean los números a y b (los cuales por supuesto pueden coincidir). Podría parecer razonable considerar la suma como una operación que pudiera ser realizada con varios números a la vez y tomar la suma $a_1 + \ldots + a_n$ de n números como concepto fundamental. Resulta, sin embargo, más conveniente considerar sólo sumas de pares de números y en función de éstas definir las demás sumas. Para las sumas de tres números a, b, c, esto puede hacerse de dos maneras diferentes. Se puede sumar

primero b y c, obteniendo $b + c$ y después añadir a a este número para obtener $a + (b + c)$; o bien se puede sumar primero a y b y después sumar c a la suma $a + b$ para obtener $(a + b) + c$. Las dos sumas compuestas son por supuesto iguales y este hecho constituye la primera de las propiedades que vamos a destacar:

(P1) Si a, b y c son números cualesquiera, entonces

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

El enunciado de esta propiedad hace evidentemente innecesaria una definición por separado de suma de tres números; convenimos sencillamente que $a + b + c$ representa el número $a + (b + c) = (a + b) + c$. La suma de cuatro números requiere consideraciones parecidas aunque con más especificaciones. El símbolo $a + b + c + d$ se define como

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad ((a + b) + c) + d,\\
\text{o}\quad &(2)\quad (a + (b + c)) + d,\\
\text{o}\quad &(3)\quad a + ((b + c) + d),\\
\text{o}\quad &(4)\quad a + (b + (c + d)),\\
\text{o}\quad &(5)\quad (a + b) + (c + d).
\end{aligned}
$$

Esta definición es única, pues estos números son todos iguales. Afortunadamente no hace falta destacar este hecho con un enunciado aparte puesto que es consecuencia de la propiedad P1 ya enunciada. Sabemos por ejemplo por P1 que

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

y se sigue inmediatamente que (1) y (2) son iguales. La igualdad de (2) y (3) es una consecuencia directa de P1, aunque a primera vista pueda no parecer evidente (se debe hacer jugar a $b + c$ el papel de b y a d el de c en P1). Las igualdades (3) = (4) = (5) son también sencillas de demostrar.

Probablemente resulta claro que recurriendo a P1 se puede demostrar la igualdad de las 14 maneras posibles de sumar cinco números, pero quizá no resulte tan claro cómo se puede disponer razonablemente una demostración de que esto es así sin considerar una por una estas 14 sumas. Una tal demostración es todavía realizable, pero deja pronto de serlo si se consideran colecciones de 6, 7 ó más números; sería totalmente inadecuada para demostrar la igualdad de todas las sumas posibles de una colección finita cualquiera de números $a_1, \ldots, a_n$. Este hecho puede aceptarse como demostrado, pero para quien sienta interés por la

demostración (y vale la pena interesarse por ella alguna vez) esbozamos unas indicaciones razonables en el problema 24. En adelante haremos uso tácitamente de los resultados de este problema y escribiremos las sumas $a_1 + \dots + a_n$ olvidándonos alegremente de la disposición de los paréntesis.

El número 0 tiene una propiedad tan importante que la enunciamos a continuación:

(P2) Si a es un número cualquiera, entonces

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

El número 0 desempeña también un importante papel en la tercera propiedad de nuestra lista:

(P3) Para todo número a existe un número $-a$ tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

La propiedad P2 debería representar un carácter distintivo del número 0 y resulta alentador ver que ya estamos en condiciones de demostrar que esto es así. En efecto, si un número x satisface

$$a + x = a$$

para cierto número a, entonces es $x = 0$ (y en consecuencia esta ecuación se satisface también para cualquier a). Para demostrar este aserto basta restar a de ambos miembros de la ecuación o, lo que es lo mismo, sumar a ambos miembros $-a$; como se ve en la demostración detallada que sigue, para justificar esta operación hacen falta las tres propiedades P1-P3.

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & a + x = a, \\ \text{entonces} & (-a) + (a + x) = (-a) + a = 0; \\ \text{de donde} & ((-a) + a) + x = 0; \\ \text{de donde} & 0 + x = 0; \\ \text{de donde} & x = 0. \end{array}$$

Según acabamos de indicar, conviene considerar la resta como una operación derivada de la suma: consideremos $a - b$ como una abreviación de $a + (-b)$. Es posible entonces encontrar la solución de ciertas ecuaciones sencillas mediante una serie de pasos (cada uno justificado por P1, P2, P3) parecidos a los que acabamos de presentar para la ecuación $a + x = a$. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & x + 3 = 5, \\ \text{entonces} & (x + 3) + (-3) = 5 + (-3); \\ \text{de donde} & x + (3 + (-3)) = 5 - 3 = 2; \\ \text{de donde} & x + 0 = 2; \\ \text{de donde} & x = 2. \end{array}$$

Naturalmente, estos procesos tan minuciosos son de interés solamente hasta que se llega al convencimiento de que siempre se pueden aplicar. En la práctica es, por lo general, perder el tiempo resolver una ecuación indicando tan explícitamente la aplicación de las propiedades P1, P2, P3 (o de cualquiera de las propiedades que vamos a enumerar).

Solamente queda por mencionar otra propiedad de la suma. Al considerar las sumas de tres números a, b y c, solamente se mencionaron dos sumas: $(a + b) + c$ y $a + (b + c)$. En realidad se obtienen otras disposiciones distintas si se cambia el orden de a, b y c. La igualdad de estas sumas depende de

(P4) Si a y b son números cualesquiera, entonces

$$a + b = b + a.$$

El enunciado de P4 tiene por objeto destacar que aunque es posible concebir que la operación de suma de pares de números dependiera del orden en que se dan éstos, en realidad no depende de este orden. Conviene recordar que no todas las operaciones se comportan de esta manera. Por ejemplo, la resta no tiene esta propiedad: por lo general $a - b \neq b - a$. Nos podríamos preguntar de paso cuándo precisamente $a - b$ es igual a $b - a$ y resulta curioso descubrir lo poco que podemos hacer si para justificar nuestras manipulaciones nos queremos basar solamente en las propiedades P1-P4. El álgebra más elemental demuestra que es $a - b = b - a$ solamente cuando $a = b$. Sin embargo, es imposible hacer derivar este hecho de las propiedades P1-P4. Resulta instructivo examinar cuidadosamente el álgebra elemental y determinar cuáles son el o los pasos que no pueden justificarse mediante P1-P4. Podremos, en efecto, justificar todos los pasos con detalle una vez que hayamos enunciado algunas propiedades más. Sin embargo, por raro que parezca, la propiedad crucial se refiere a la multiplicación.

Las propiedades fundamentales de la multiplicación son, por fortuna, tan parecidas a las de la suma que pocos comentarios hará falta añadir; deben resultar claros tanto el significado como las consecuencias. (Lo mismo que en álgebra elemental, se indica por $a \cdot b$ o simplemente por ab el producto de a y b).

(P5) Si a, b y c son números cualesquiera, entonces

$$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c.$$

(P6) Si a es un número cualquiera, entonces

$$a\cdot 1 = 1\cdot a = a.$$

Es, además, $1 \neq 0$.

(Puede parecer extraño que incluyamos este aserto en la lista básica de propiedades, pero es necesario hacerlo, pues nos resultaría imposible demostrarlo partiendo exclusivamente de las demás propiedades enunciadas; de hecho éstas se satisfarían todas si no existiese más que un elemento, el 0).

(P7) Para todo número $a \neq 0$, existe un número a^{-1} tal que

$$a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1.$$

(P8) Si a y b son números cualesquiera, entonces

$$a\cdot b = b\cdot a.$$

Un detalle que merece destacarse es el de que aparezca la condición $a \neq 0$ en P7. Esta condición es absolutamente necesaria; puesto que es $0\cdot b = 0$ para todo número b, *no* existe ningún número 0^{-1} que satisfaga $0\cdot 0^{-1} = 1$. Esta restricción tiene una consecuencia importante para la división. Así como la resta fue definida en función de la suma, del mismo modo se define la división en función de la multiplicación: el símbolo a/b significa $a\cdot b^{-1}$. Puesto que 0^{-1}no tiene sentido, tampoco lo tiene $a/0$; la división por 0 es *siempre* indefinida.

La propiedad P7 tiene dos consecuencias importantes. Si es $a\cdot b = a\cdot c$, no se sigue necesariamente que $b = c$; pues si es $a = 0$, entonces tanto $a\cdot b$ como $a\cdot c$ son 0 cualesquiera que sean b y c. Sin embargo, si $a \neq 0$, entonces $b = c$; esto puede deducirse de P7 como sigue:

Si	$a\cdot b$	$= a\cdot c$ y $a \neq 0$,
entonces	$a^{-1}\cdot(a\cdot b)$	$= a^{-1}\cdot(a\cdot c)$;
de donde	$(a^{-1}\cdot a)\cdot b$	$= (a^{-1}\cdot a)\cdot c$;
de donde	$1\cdot b$	$= 1\cdot c$;
de donde	b	$= c$.

Se sigue también de P7 que si $a\cdot b = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$. En efecto,

si	$a\cdot b$	$= 0$ y $a \neq 0$,
entonces	$a^{-1}\cdot(a\cdot b)$	$= 0$;
de donde	$(a^{-1}\cdot a)\cdot b$	$= 0$;
de donde	$1\cdot b$	$= 0$;
de donde	b	$= 0$.

(Puede ocurrir que sea a la vez $a = 0$ y $b = 0$; esta posibilidad no se excluye cuando decimos «$a = 0$ ó $b = 0$»; en matemáticas, la conjunción «o» se usa siempre en el sentido de «lo uno o lo otro o las dos cosas a la vez».)

Esta última consecuencia de P7 se usa constantemente en la resolución de ecuaciones. Supongamos, por ejemplo, que se sabe que un número x satisface

$$(x - 1)(x - 2) = 0.$$

Se sigue entonces que o bien $x - 1 = 0$ ó $x - 2 = 0$; de donde $x = 1$ ó $x = 2$.

Sobre la base de las ocho propiedades hasta ahora enunciadas se pueden demostrar muy pocas cosas. Esta situación variará drásticamente con el enunciado de la propiedad siguiente que combina las operaciones de suma y multiplicación.

(P9) Si a, b y c son números cualesquiera, entonces

$$a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c.$$

[Nótese que la ecuación $(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$ también se cumple por P8.] Como ejemplo de la utilidad de P9 vamos a determinar ahora exactamente cuándo es $a - b = b - a$:

Si	$a - b$	$= b - a$,
entonces	$(a - b) + b$	$= (b - a) + b = b + (b - a)$;
de donde	a	$= b + b - a$;
de donde	$a + a$	$= (b + b - a) + a = b + b$.
En consecuencia	$a\cdot(1 + 1)$	$= b\cdot(1 + 1)$,
y por lo tanto	a	$= b$.

Una segunda aplicación de P9 consiste en la justificación del aserto $a\cdot 0 = 0$ que ya hemos hecho e incluso utilizado en una demostración de la página 7. (¿Puede el lector encontrar dónde?). Este hecho no se enunció como una de las propiedades básicas, a pesar de no haberse dado ninguna demostración del mismo cuando se enunció por primera vez. Sólo con P1-P8 la demostración no era posible,

puesto que el número 0 aparece solamente en P2 y P3 que se refieren a la suma, mientras que el aserto en cuestión hace referencia a la multiplicación. Con P9 la demostración es sencilla aunque quizá no evidente a primera vista: tenemos

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + a \cdot 0 &= a \cdot (0 + 0) \\ &= a \cdot 0; \end{aligned}$$

como hemos destacado ya, esto implica inmediatamente [sumando $-(a \cdot 0)$ a ambos miembros] que $a \cdot 0 = 0$.

Una serie de otras consecuencias de P9 puede contribuir a explicar la regla algo misteriosa de que el producto de dos números negativos es positivo. Para empezar estableceremos el aserto más fácilmente aceptable de que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Para demostrar esto, notemos que

$$\begin{aligned} (-a) \cdot b + a \cdot b &= [(-a) + a] \cdot b \\ &= 0 \cdot b \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se sigue inmediatamente [sumando $-(a \cdot b)$ a ambos miembros] que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Nótese ahora que

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) + [-(a \cdot b)] &= (-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b \\ &= (-a) \cdot [(-b) + b] \\ &= (-a) \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, sumando $(a \cdot b)$ a ambos lados se obtiene

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

El hecho de que el producto de dos números negativos es positivo es casi una consecuencia de P1-P9. En otros términos, *la aceptación como verdaderas de las propiedades P1-P9 nos impone obligadamente la regla del producto de dos números negativos.*

Las distintas consecuencias de P9 examinadas hasta ahora, aunque interesantes e importantes, no indican el verdadero significado de P9; después de todo podíamos haber enunciado por separado cada una de estas propiedades. P9 es en

realidad la justificación de casi todas las manipulaciones algebraicas. Por ejemplo, aunque hemos hecho ver cómo se resuelve la ecuación

$$(x - 1)(x - 2) = 0,$$

es difícil que se nos presente una ecuación en esta forma. Es más probable que nos encontremos con la ecuación

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

La «factorización» $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ es en realidad un triple uso de P9:

$$\begin{aligned}(x - 1) \cdot (x - 2) &= x \cdot (x - 2) + (-1) \cdot (x - 2)\\ &= x \cdot x + x \cdot (-2) + (-1) \cdot x + (-1) \cdot (-2)\\ &= x^2 + x[(-2) + (-1)] + 2\\ &= x^2 - 3x + 2.\end{aligned}$$

Una ilustración final de la importancia de P9 es el hecho de que se aplica efectivamente cada vez que se multiplica con cifras arábigas. Por ejemplo, el cálculo

$$\begin{array}{r} 13\\ \times 24\\ \hline 52\\ 26\\ \hline 312 \end{array}$$

es una disposición concisa de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}13 \cdot 24 &= 13 \cdot (2 \cdot 10 + 4)\\ &= 13 \cdot 2 \cdot 10 + 13 \cdot 4\\ &= 26 \cdot 10 + 52.\end{aligned}$$

(Nótese que trasladar 26 hacia la izquierda en el cálculo anterior equivale a escribir $26 \cdot 10$.) La multiplicación $13 \cdot 4 = 52$ aplica también P9:

$$\begin{aligned}13 \cdot 4 &= (1 \cdot 10 + 3) \cdot 4\\ &= 1 \cdot 10 \cdot 4 + 3 \cdot 4\\ &= 4 \cdot 10 + 12\\ &= 4 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 2\\ &= (4 + 1) \cdot 10 + 2\\ &= 5 \cdot 10 + 2\\ &= 52.\end{aligned}$$

Las propiedades P1-P9 tienen nombres descriptivos que no es indispensable recordar, pero que con frecuencia son útiles para referencia. Aprovecharemos esta ocasión para escribir conjuntamente estas propiedades, indicando los nombres con que se las suele designar.

(P1)	(Ley asociativa para la suma)	$a + (b + c) = (a + b) + c.$
(P2)	(Existencia de una identidad para la suma)	$a + 0 = 0 + a = a.$
(P3)	(Existencia de inversos para la suma)	$a + (-a) = (-a) + a = 0.$
(P4)	(Ley conmutativa para la suma)	$a + b = b + a.$
(P5)	(Ley asociativa para la multiplicación)	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$
(P6)	(Existencia de una identidad para la multiplicación)	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a; \quad 1 \neq 0.$
(P7)	(Existencia de inversos para la multiplicación)	$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1,$ para $a \neq 0.$
(P8)	(Ley conmutativa para la multiplicación)	$a \cdot b = b \cdot a.$
(P9)	(Ley distributiva)	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Las tres propiedades básicas de los números que quedan por enunciar hacen referencia a desigualdades. Aunque las desigualdades se presentan pocas veces en las matemáticas elementales, desempeñan un papel destacado en el cálculo infinitesimal. Las dos nociones de desigualdad, $a < b$ (a es menor que b) y $a > b$ (a es mayor que b), están íntimamente relacionadas: $a < b$ quiere decir lo mismo que $b > a$ (así $1 < 3$ y $3 > 1$ son, sencillamente, dos maneras distintas de escribir un mismo aserto). Los números a que satisfacen $a > 0$, se llaman **positivos,** mientras que los números a que satisfacen $a < 0$ se llaman **negativos.** Mientras que la positividad puede definirse así en función de $<$, es posible invertir el proceso:

$a < b$ puede interpretarse como significando que $b - a$ es positivo. En realidad, conviene considerar el conjunto de todos los números positivos, representado por P, como concepto básico y expresar todas las propiedades en función de P:

(P10) (Ley de tricotomía). Para todo número a se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:
  (i) $a = 0$.
  (ii) a pertenece al conjunto P.
  (iii) $-a$ pertenece al conjunto P.

(P11) (La suma es cerrada) Si a y b pertenecen a P, entonces $a + b$ pertenece a P.

(P12) (La multiplicación es cerrada) Si a y b pertenecen a P, entonces $a \cdot b$ pertenece a P.

Estas tres propiedades deben complementarse con las siguientes definiciones:

$a > b$ si $a - b$ pertenece a P;
$a < b$ si $b > a$;
$a \geq b$ si $a > b$ o $a = b$;
$a \leq b$ si $a < b$ o $a = b$.*

Nótese en particular que $a > 0$ si y sólo si a pertenece a P.

Todos los hechos conocidos acerca de desigualdades, por elementales que parezcan, son consecuencias de P10-P12. Por ejemplo, si a y b son dos números cualesquiera, entonces se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

(i) $a - b = 0$,
(ii) $a - b$ pertenece al conjunto P,
(iii) $-(a - b) = b - a$ pertenece al conjunto P.

De las definiciones dadas se sigue que se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

(i) $a = b$,
(ii) $a > b$,
(iii) $b > a$.

* Los símbolos $\geq$ y $\leq$ tienen una característica ligeramente desconcertante. Los asertos

$$1 + 1 \leq 3$$
$$1 + 1 \leq 2$$

son ambos verdaderos aunque sabemos que $\leq$ podría ser sustituido por $<$ en el primero y por $=$ en el segundo. Esta clase de cosas puede ocurrir cuando el signo $\leq$ se usa con números específicos. La utilidad del símbolo se pone de manifiesto en un enunciado tal como el del teorema 1 donde para algunos valores de a y b se verifica la igualdad mientras que para otros se cumple la desigualdad.

Un hecho ligeramente más interesante resulta de las siguientes manipulaciones. Si $a < b$ de modo que $b - a$ pertenece a P, entonces evidentemente $(b + c) - (a + c)$ pertenece a P; así si $a < b$ entonces $a + c < b + c$. Igualmente, supongamos $a < b$ y $b < c$. Entonces

$$\begin{aligned} & b - a \text{ está en } P, \\ \text{y} \quad & c - b \text{ está en } P, \\ \text{así que} \quad & c - a = (c - b) + (b - a) \text{ está en } P. \end{aligned}$$

Esto demuestra que si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. (Las dos desigualdades $a < b$ y $b < c$ se escriben generalmente en la forma abreviada $a < b < c$, que tiene casi incorporada la tercera desigualdad $a < c$.)

El siguiente aserto es algo menos evidente: si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $ab > 0$. La única dificultad de la demostración está en el descifrado de las definiciones. El símbolo $a < 0$ significa, por definición, $0 > a$, lo cual significa que $0 - a = -a$ está en P. Del mismo modo, $-b$ pertenece a P y, en consecuencia, por P12, $(-a)(-b) = ab$ está en P. Así pues, $ab > 0$.

El hecho de que sea $ab > 0$ si $a > 0$, $b > 0$, y también $a < 0$, $b < 0$ tiene una consecuencia especial: $a^2 > 0$ si $a \neq 0$. Así los cuadrados de números distintos de 0 son siempre positivos, y en particular hemos demostrado un resultado que podía haber parecido suficientemente elemental como para incluirlo en nuestra lista de propiedades: $1 > 0$ (puesto que $1 = 1^2$).

El hecho de que sea $-a > 0$ si $a < 0$ es la base de un concepto que va a desempeñar un papel sumamente importante en este libro. Para todo número a definimos el **valor absoluto** $|a|$ de a como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a \leq 0. \end{cases}$$

Nótese que $|a|$ es siempre positivo excepto cuando $a = 0$. Tenemos por ejemplo $|-3| = 3$, $|7| = 7$, $|1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}| = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$, y $|1 + \sqrt{2} - \sqrt{10}| = \sqrt{10} - \sqrt{2} - 1$. En general, el método más directo de atacar un problema referente a valores absolutos requiere la consideración por separado de distintos casos, puesto que ya para empezar los valores absolutos han sido definidos por casos. Este procedimiento puede emplearse para demostrar el siguiente hecho muy importante acerca de valores absolutos.

TEOREMA 1

Para todos los números a y b se tiene

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

DEMOSTRACIÓN

Vamos a considerar cuatro casos:

$$\begin{array}{ll}(1) & a \geq 0, \quad b \geq 0; \\ (2) & a \geq 0, \quad b \leq 0; \\ (3) & a \leq 0, \quad b \geq 0; \\ (4) & a \leq 0, \quad b \leq 0.\end{array}$$

En el caso (1) tenemos también $a + b \geq 0$ y el teorema es evidente; en efecto,

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|,$$

de modo que en este caso se cumple la igualdad.

En el caso (4) se tiene $a + b \leq 0$ y de nuevo se cumple la igualdad:

$$|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) = |a| + |b|.$$

En el caso (2), cuando $a \geq 0$ y $b \leq 0$, debemos demostrar que

$$|a + b| \leq a - b.$$

Este caso puede dividirse, por lo tanto, en dos subcasos. Si $a + b \geq 0$, entonces tenemos que demostrar que

$$a + b \leq a - b,$$

es decir,

$$b \leq -b,$$

lo cual se cumple ciertamente puesto que b es negativo y $-b$ positivo. Por otra parte, si $a + b \leq 0$ debemos demostrar que

$$-a - b \leq a - b,$$

es decir,

$$-a \leq a,$$

lo cual es verdad puesto que a es positivo y $-a$ negativo.

Nótese finalmente que el caso (3) puede despacharse sin ningún trabajo adicional aplicando el caso (2) con a y b intercambiados. ▮

Aunque esta manera de tratar valores absolutos (consideración por separado de los distintos casos) es a veces el único método disponible, se pueden emplear con frecuencia métodos más sencillos. En realidad se puede dar una demostración mucho más corta del teorema 1; esta demostración está motivada observando que

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

(Aquí a lo largo de todo el libro, $\sqrt{x}$ representa la raíz cuadrada positiva de x; este símbolo está definido solamente cuando $x \geq 0$.) Podemos observar ahora que

$$\begin{aligned}(|a+b|)^2 = (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|a| \cdot |b| + b^2 \\ &= |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2.\end{aligned}$$

De esto podemos concluir que $|a+b| \leq |a| + |b|$ porque $x^2 < y^2$ implica $x < y$, siempre que x e y sean ambos no negativos; una demostración de *este* hecho se deja para el lector (problema 5).

Se puede hacer una observación final acerca del teorema que acabamos de demostrar; un examen atento de cada una de las dos demostraciones hace ver que

$$|a+b| = |a| + |b|$$

si a y b tienen el mismo signo (es decir, ambos positivos o ambos negativos), o si uno de los dos es 0, mientras que

$$|a+b| < |a| + |b|$$

si a y b tienen signos opuestos.

Concluiremos este capítulo con un punto delicado, no tenido en cuenta hasta ahora, cuya consideración es necesaria para un examen concienzudo de las pro-

piedades de los números. Después de enunciar la propiedad P9 demostramos que $a - b = b - a$ implica $a = b$. La demostración empezó estableciendo que

$$a \cdot (1 + 1) = b \cdot (1 + 1),$$

de donde se dedujo que $a = b$. Este resultado se obtiene de la ecuación $a \cdot (1 + 1) = b \cdot (1 + 1)$ dividiendo ambos miembros por $1 + 1$. La división por 0 debe evitarse escrupulosamente y debe por lo tanto admitirse que la validez del raciocinio depende de que se sabe que $1 + 1 \neq 0$. ¡El problema 25 tiene por objeto hacer ver que este hecho no puede demostrarse partiendo sólo de las propiedades P1-P9! Sin embargo, una vez que se dispone de P10, P11 y P12, la demostración es muy sencilla: hemos visto ya que $1 > 0$; se sigue que $1 + 1 > 0$, y en particular $1 + 1 \neq 0$.

Esta última demostración quizá haya sólo reforzado la creencia de que es absurdo preocuparse por demostrar hechos tan evidentes, pero un examen honesto de nuestra situación actual nos hará dar cuenta de que la consideración seria de tales detalles está justificada. En este capítulo hemos supuesto que los números nos son familiares y que P1-P12 son meramente enunciados explícitos de algunas de sus propiedades evidentes y bien sabidas. Sería, sin embargo, difícil justificar esta suposición. Aunque se aprende en la escuela cómo «manejar» los números, lo que en realidad los números *son* queda más bien en la penumbra. Una gran parte de este libro está dedicada a poner en claro lo que son los números y al final del mismo acabaremos conociéndolos bien. Pero será necesario trabajar con números a lo largo de todo el libro. Por lo tanto será razonable admitir francamente que todavía no entendemos bien lo que son; podemos, con todo, afirmar que, de cualquier manera que se definan, han de satisfacer las propiedades P1-P12.

En este capítulo hemos intentado poner en evidencia que P1-P12 son de verdad propiedades básicas que deben admitirse para deducir de ellas otras propiedades corrientes de los números. Algunos de los problemas (que indican cómo se derivan de P1-P12 otras propiedades) se ofrecen para mayor evidencia. Queda todavía la cuestión crucial de si de P1-P12 se derivan en realidad *todas* las propiedades de los números. Pronto veremos que *no*. Las deficiencias de las propiedades P1-P12 quedarán muy claras en el próximo capítulo, pero descubrir la manera adecuada de corregir tales deficiencias no es nada fácil. La propiedad básica crucial que necesitamos añadir es profunda y sutil a diferencia de P1-P12. Para descubrir esta propiedad crucial hará falta todo el trabajo de la parte II de este libro. En lo que queda de la parte I empezaremos por ver por qué se necesita otra propiedad; para investigar este punto tendremos que considerar con más detención lo que entendemos por «números».

PROBLEMAS

1. Demostrar lo siguiente:

(i) Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, entonces $x = 1$.

(ii) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

(iii) Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ o $x = -y$.

(iv) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

(v) $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$.

(vi) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. (Hay una manera particularmente fácil de hacer esto utilizando (iv) y esto hará ver una descomposición en factores de $x^n + y^n$ cuando n es impar.)

2. ¿Dónde está el fallo en la siguiente «demostración»? Sea $x = y$. Entonces

$$\begin{aligned} x^2 &= xy, \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2, \\ (x + y)(x - y) &= y(x - y), \\ x + y &= y, \\ 2y &= y, \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

3. Demostrar lo siguiente:

(i) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$, si $b, c \neq 0$.

(ii) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$, si $b, d \neq 0$.

(iii) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, si $a, b \neq 0$. (Para hacer esto hace falta tener presente cómo se ha definido $(ab)^{-1}$.)

(iv) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{db}$, si $b, d \neq 0$.

(v) $\dfrac{a}{b} \Big/ \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$, si $b, c, d \neq 0$.

(vi) Si $b, d \neq 0$, entonces $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$. Determinar tam-

bién cuando es

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a}.$$

4. Encontrar todos los números x para los que

(i) $4 - x < 3 - 2x$.
(ii) $5 - x^2 < 8$.
(iii) $5 - x^2 < -2$.
(iv) $(x - 1)(x - 3) > 0$. (¿Cuándo es positivo un producto de dos números?)
(v) $x^2 - 2x + 2 > 0$.
(vi) $x^2 + x + 1 > 2$.
(vii) $x^2 - x + 10 > 16$.
(viii) $x^2 + x + 1 > 0$.
(ix) $(x - \pi)(x + 5)(x - 3) > 0$.
(x) $(x - \sqrt[3]{2})(x - \sqrt{2}) > 0$.
(xi) $2^x < 8$.
(xii) $x + 3^x < 4$.
(xiii) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1 - x} > 0$.
(xiv) $\dfrac{x - 1}{x + 1} > 0$.

5. Demostrar lo siguiente:
(i) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.
(ii) Si $a < b$, entonces $-b < -a$.
(iii) Si $a < b$ y $c > d$, entonces $a - c < b - d$.
(iv) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
(v) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
(vi) Si $a > 1$, entonces $a^2 > a$.
(vii) Si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.
(viii) Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$, entonces $ac < bd$.
(ix) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^2 < b^2$. (Utilícese (viii).)
(x) Si $a, b \geq 0$ y $a^2 < b^2$, entonces $a < b$. (Utilícese (ix), hacia atrás.)

6. (a) Demostrar que si $0 \leq x < y$, entonces $x^n < y^n$.
   (b) Demostrar que si $x < y$ y n es impar, entonces $x^n < y^n$.
   (c) Demostrar que si $x^n = y^n$ y n es impar, entonces $x = y$.
   (d) Demostrar que si $x^n = y^n$ y n es par, entonces $x = y$ o $x = -y$.
7. Demostrar que si $0 < a < b$, entonces

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Nótese que la desigualdad $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ se cumple para $a, b \geq 0$, sin la suposición adicional $a < b$. Una generalización de este hecho se presenta en el problema 2-22.

*8. Aunque las propiedades básicas de las desigualdades fueron enunciadas en términos del conjunto P de los números positivos, y $<$ fue definido en términos de P, este proceso puede ser invertido. Supóngase que P10-P12 se sustituyen por

(P′10) Cualesquiera que sean los números a y b, se cumple una y sólo una de las relaciones siguientes:

(i) $a = b$,
(ii) $a < b$,
(iii) $b < a$.

(P′11) Cualesquiera que sean a, b y c, si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
(P′12) Cualesquiera que sean a, b y c, si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
(P′13) Cualesquiera que sean a, b y c, si $a < b$, y $0 < c$, entonces $ac < bc$.

Demostrar que P10-P12 se pueden deducir entonces como teoremas.

9. Dese una expresión equivalente de cada una de las siguientes utilizando como mínimo una vez menos el signo de valor absoluto.

(i) $|\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7}|$.
(ii) $|(|a + b| - |a| - |b|)|$.
(iii) $|(|a + b| + |c| - |a + b + c|)|$.
(iv) $|x^2 - 2xy + y^2|$.
(v) $|(|\sqrt{2} + \sqrt{3}| - |\sqrt{5} - \sqrt{7}|)|$.

10. Expresar lo siguiente prescindiendo de signos de valor absoluto, tratando por separado distintos casos cuando sea necesario.

(i) $|a + b| - |b|$.
(ii) $|(|x| - 1)|$.
(iii) $|x| - |x^2|$.
(iv) $a - |(a - |a|)|$.

11. Encontrar todos los números x para los que se cumple

(i) $|x - 3| = 8$.
(ii) $|x - 3| < 8$.
(iii) $|x + 4| < 2$.
(iv) $|x - 1| + |x - 2| > 1$.
(v) $|x - 1| + |x + 1| < 2$.
(vi) $|x - 1| + |x + 1| < 1$.
(vii) $|x - 1| \cdot |x + 1| = 0$.
(viii) $|x - 1| \cdot |x + 2| = 3$.

12. Demostrar lo siguiente:

(i) $|xy| = |x| \cdot |y|$.
(ii) $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$, si $x \neq 0$. (La mejor manera de hacer esto es recordando el significado de $|x|^{-1}$.)
(iii) $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$, si $y \neq 0$.
(iv) $|x - y| \leq |x| + |y|$. (Dese una demostración muy corta.)
(v) $|x| - |y| \leq |x - y|$. (Es posible dar una demostración muy corta escribiendo las cosas debidamente.)
(vi) $|(|x| - |y|)| \leq |x - y|$. (¿Por qué se sigue esto inmediatamente de (v)?)
(vii) $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$. Indíquese cuándo se cumple la igualdad y demostrar el aserto.

13. El máximo de dos números x e y se denota por $\max(x, y)$. Así $\max(-1, 3) =$

= max(3, 3) = 3 y max(—1, —4) = máx(—4, —1) = —1. El mínimo de x e y se denota por min(x, y). Demostrar que

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |y - x|}{2},$$

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |y - x|}{2}.$$

Derivar una fórmula para max(x, y, z) y min(x, y, z), utilizando, por ejemplo,

$$\max(x, y, z) = \max(x, \max(y, z)).$$

14. (a) Demostrar que $|a| = |-a|$. (No debe complicarse el proceso con un excesivo número de casos. Demostrar primero el aserto para $a \geq 0$. ¿Por qué es después evidente para $a \leq 0$?)
(b) Demostrar que $-b \leq a \leq b$ si y sólo si $|a| \leq b$. En particular se sigue que $-|a| \leq a \leq |a|$.
(c) Utilizar este hecho para dar una nueva demostración de $|a+b| \leq |a|+|b|$.

***15.** Demostrar que si x e y no son 0 los dos, entonces

$$x^2 + xy + y^2 > 0$$
$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 > 0$$

Ayuda: Utilizar el Problema 1.

***16.** (a) Demostrar que

$(x + y)^2 = x^2 + y^2$ solamente cuando $x = 0$ o $y = 0$,
$(x + y)^3 = x^3 + y^3$ solamente cuando $x = 0$, o $y = 0$, o $x = -y$.

(b) Haciendo uso del hecho que

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \geq 0,$$

demostrar que el supuesto $4x^2 + 6xy + 4y^2 < 0$ lleva a una contradicción.
(c) Utilizando la parte (b) decir cuando es $(x + y)^4 = x^4 + y^4$.
(d) Hallar cuando es $(x + y)^5 = x^5 + y^5$. Ayuda: Partiendo del supuesto $(x + y)^5 = x^5 + y^5$ tiene que ser posible deducir la ecuación $x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 = 0$, si $xy \neq 0$. Esto implica que $(x + y)^3 = x^2y + xy^2 = xy(x + y)$.

El lector tendría que ser ahora capaz de intuir cuando $(x+y)^n = x^n + y^n$; la demostración está contenida en el Problema 11-57.

17. (a) Hallar el valor mínimo de $2x^2 - 3x + 4$. Ayuda: «Completar el cuadrado», o sea, poner $2x^2 - 3x + 4 = 2(x - 3/4)^2 + ?$

(b) Hallar el valor mínimo de $x^2 - 3x + 2y^2 + 4y + 2$.

(c) Hallar el valor mínimo de $x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 6y + 7$.

18. (a) Supóngase que $b^2 - 4c \geq 0$. Demostrar que los números

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}, \qquad \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

satisfacen ambos la ecuación $x^2 + bx + c = 0$.

(b) Supóngase que $b^2 - 4c < 0$. Demostrar que no existe ningún número x que satisfaga $x^2 + bx + c = 0$; de hecho es $x^2 + bx + c > 0$ para todo x. Indicación: «Completar el cuadrado», es decir, escribir $x^2 + bx + c = (x + b/2)^2 + ?$

(c) Utilizar este hecho para dar otra demostración de que si x e y no son ambos 0, entonces $x^2 + xy + y^2 > 0$.

(d) ¿Para qué números α se cumple que $x^2 + \alpha xy + y^2 > 0$ siempre que x e y no sean ambos 0?

(e) Hállese el valor mínimo posible de $x^2 + bx + c$ y de $ax^2 + bx + c$, para $a > 0$. (Utilícese el artificio de la parte (b).)

19. El hecho de que $a^2 \geq 0$ para todo número a, por elemental que pueda parecer, es sin embargo la idea fundamental en que se basan en última instancia la mayor parte de las desigualdades. La primerísima de todas las desigualdades es la *desigualdad de Schwarz:*

$$x_1y_1 + x_2y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Las tres demostraciones de la desigualdad de Schwarz que se esbozan más abajo tienen solamente una cosa en común: el estar basadas en el hecho de ser $a^2 \geq 0$ para todo a.

(a) Demostrar que si $x_1 = \lambda y_1$ y $x_2 = \lambda y_2$ para algún número λ, entonces vale el signo igual en la desigualdad de Schwarz. Demuéstrese lo mis-

mo en el supuesto $y_1 = y_2 = 0$. Supóngase ahora que y_1 e y_2 no son ambos 0 y que no existe ningún número λ tal que $x_1 = \lambda y_1$ y $x_2 = \lambda y_2$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &< (\lambda y_1 - x_1)^2 + (\lambda y_2 - x_2)^2 \\ &= \lambda^2(y_1^2 + y_2^2) - 2\lambda(x_1y_1 + x_2y_2) + (x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

Utilizando el problema 18, completar la demostración de la desigualdad de Schwarz.

(b) Demostrar la desigualdad de Schwarz haciendo uso de $2xy \leq x^2 + y^2$ (¿cómo se deduce esto?) con

$$x = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \qquad y = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}},$$

primero para $i = 1$ y después para $i = 2$.

(c) Demostrar la desigualdad de Schwarz demostrando primero que

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

(d) Deducir de cada una de estas tres demostraciones que la igualdad se cumple solamente cuando $y_1 = y_2 = 0$ ó cuando existe un número λ tal que $x_1 = \lambda y_1$ y $x_2 = \lambda y_2$.

En relación con las desigualdades habrá tres hechos que tendrán una importancia crucial. Aunque las demostraciones se darán en el lugar apropiado del texto, un intento personal de ataque a estos problemas tendrá más valor ilustrativo que el estudio detenido de una demostración completamente elaborada. Los enunciados de estas proposiciones encierran algunos números extraños, pero su mensaje básico es muy sencillo: si x está suficientemente cerca de x_0 e y está suficientemente cerca de y_0, entonces $x + y$ estará cerca de $x_0 + y_0$, y xy estará cerca de x_0y_0, y $1/y$ estará cerca de $1/y_0$. El símbolo "ε" que aparece en estas proposiciones es la quinta letra del alfabeto griego («epsilon») y en vez de ella podría haberse usado cualquier letra menos aparatosa del alfabeto romano; sin embargo, la tradición ha hecho el uso de ε casi sagrado en los contextos relativos a estos teoremas.

20. Demostrar que si

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

entonces

$$\begin{aligned} |(x + y) - (x_0 + y_0)| &< \varepsilon, \\ |(x - y) - (x_0 - y_0)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

***21.** Demostrar que si

$$|x - x_0| < \min\left(\frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}, 1\right) \quad \text{y} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)},$$

entonces $|xy - x_0y_0| < \varepsilon$.
(La notación «min» fue definida en el problema 13, pero la fórmula suministrada por aquel problema es por el momento irrelevante; la primera igualdad de la hipótesis significa precisamente que

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)} \quad \text{y} \quad |x - x_0| < 1;$$

en un punto de la demostración hará falta la primera igualdad y en otro punto la segunda. Una advertencia más: puesto que las hipótesis solamente dan información acerca de $x - x_0$ e $y - y_0$, es casi obligado concluir que para la demostración habrá que escribir $xy - x_0y_0$ de manera que aparezcan $x - x_0$ e $y - y_0$.)

***22.** Demostrar que si $y_0 \neq 0$ y

$$|y - y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon|y_0|^2}{2}\right),$$

entonces $y \neq 0$ y

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \varepsilon.$$

***23.** Sustituir los interrogantes del siguiente enunciado por expresiones que encierren ε, x_0 e y_0 de tal manera que la conclusión sea válida:

Si $y_0 \neq 0$ y

$$|y - y_0| < ? \quad \text{y} \quad |x - x_0| < ?$$

entonces $y \neq 0$ y

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0}\right| < \varepsilon.$$

Este problema es trivial en el sentido de que su solución deriva sin casi ningún trabajo de los problemas 21 y 22 (nótese que $x/y = x \cdot {}^1/y$). El punto

crucial es no confundirse; decídase cuál de los dos problemas ha de aplicarse primero y no asustarse si la solución parece improbable.

***24.** Este problema hace ver que la colocación de los paréntesis en una suma es irrelevante. Las demostraciones utilizan la «inducción matemática»; si no se está familiarizado con este tipo de demostraciones, pero a pesar de todo se quiere tratar este problema, se puede esperar hasta después de haber visto el capítulo 2, en el que se explican las demostraciones por inducción. Convengamos, para fijar ideas, que $a_1 + \dots + a_n$ denota

$$a_1 + (a_2 + (a_3 + \cdots + (a_{n-2} + (a_{n-1} + a_n))) \cdots).$$

Así $a_1 + a_2 + a_3$ denota $a_1 + (a_2 + a_3)$, y $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ denota $a_1 + (a_2 + (a_3 + a_4))$, etc.

(a) Demostrar que

$$(a_1 + \cdots + a_k) + a_{k+1} = a_1 + \cdots + a_{k+1}.$$

Indicación: Úsese inducción sobre k.

(b) Demostrar que si $n \geq k$, entonces

$$(a_1 + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + \cdots + a_n) = a_1 + \cdots + a_n.$$

Indicación: Aplíquese la parte (a) para obtener una prueba por inducción sobre k.

(c) Sea $s(a_1, \dots, a_k)$ una suma formada con $a_1, \dots, a_k$. Demostrar que

$$s(a_1, \dots, a_k) = a_1 + \cdots + a_k.$$

Indicación: Debe haber dos sumas $s'(a_1, \dots, a_l)$ y $s''(a_{l+1}, \dots, a_k)$ tales que

$$s(a_1, \dots, a_k) = s'(a_1, \dots, a_l) + s''(a_{l+1}, \dots, a_k).$$

25. Supóngase que por «número» se entiende sólo el 0 ó el 1 y que + y · son las operaciones definidas mediante las siguientes tablas.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Comprobar que se cumplen las propiedades P1-P9, aunque $1 + 1 = 0$.

CAPÍTULO

2

DISTINTAS CLASES DE NÚMEROS

En el capítulo 1 hemos usado la palabra «número» con poca precisión a pesar de habernos preocupado tanto por las propiedades básicas de los números. Será necesario ahora distinguir distintas clases de números.

Los números más sencillos son los «números de contar»

$$1, 2, 3, \ldots .$$

La importancia fundamental de este conjunto de números es realzada por su símbolo **N** (de **números naturales**). Una breve ojeada a P1-P12 hará ver que nuestras propiedades básicas de los «números» no son válidas para **N**; por ejemplo, P2 y P3 no tienen sentido para **N**. Desde este punto de vista, el sistema **N** presenta muchas deficiencias. Sin embargo, **N** tiene suficiente importancia para que le dediquemos algunos comentarios antes de pasar a la consideración de conjuntos más amplios de números.

La propiedad más fundamental de **N** es el principio de «inducción matemática». Supóngase que $P(x)$ significa que la propiedad P se cumple para el número x. Entonces el principio de inducción matemática afirma que $P(x)$ es verdad para todos los números naturales x siempre que

(1) $P(1)$ sea verdad.
(2) Si $P(k)$ es verdad, también lo es $P(k + 1)$.

Nótese que la condición (2) se limita a afirmar la verdad de $P(k + 1)$ bajo el supuesto de que $P(k)$ es verdad. Esto basta para asegurar la verdad de $P(x)$ para todo x si también se cumple la condición (1). En efecto, si $P(1)$ es verdad, se sigue entonces que $P(2)$ es verdad [aplicando (2) al caso particular $k = 1$]. Ahora, puesto que $P(2)$ es verdad, se sigue que $P(3)$ es verdad [aplicando (2) al caso particular $k = 2$]. Es evidente que todo número será alcanzado alguna vez mediante una serie de etapas de esta clase, de manera que $P(k)$ será verdad para todos los números k.

Una ilustración muy corriente del razonamiento que justifica la inducción matemática considera una fila infinita de personas,

persona n.° 1, persona n.° 2, persona n.° 3, ...

Si cada persona ha recibido instrucciones de contar cualquier secreto que oiga a la persona que le sigue (la que tiene el número siguiente) y se cuenta un secreto a la persona n.° 1, es evidente entonces que cada persona se enterará irremisiblemente del secreto. Si $P(x)$ es el aserto de que la persona número x se enterará del secreto, entonces las instrucciones dadas (contar todos los secretos que se oigan a la persona siguiente) significan que la condición (2) se cumple, mientras que contar el secreto a la persona número 1 hace que se cumpla (1). El siguiente ejemplo consiste en una aplicación menos jocosa de la inducción matemática. Existe una fórmula útil y curiosa que expresa de manera sencilla la suma de los n primeros números:

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Para demostrar esta fórmula, nótese primero que se cumple para $n = 1$. *Supóngase* ahora que para algún entero k se tiene

$$1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Entonces

$$1 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 =$$

$$= \frac{k(k+1) + 2k + 2}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

de manera que la fórmula es también verdad para $k + 1$. Por el principio de inducción, esto demuestra que la fórmula es válida para todos los números naturales n. Este ejemplo particular ilustra un fenómeno que ocurre frecuentemente, en especial con fórmulas como la que acabamos de demostrar. Aunque la demostración por inducción es con frecuencia directa, el método mediante el cual la fórmula se descubrió sigue siendo un misterio. Los problemas 4 y 5 indican cómo pueden deducirse algunas fórmulas de este tipo.

El principio de inducción matemática puede ser formulado de manera equivalente sin hablar de «propiedades» de un número, término suficientemente vago para ser excluido de una conversación matemática. Una formulación más precisa afirma que si A es una colección (o «conjunto», término matemático sinónimo) de números naturales y

(1) 1 pertenece a A,
(2) $k + 1$ pertenece a A siempre que k pertenece a A,

entonces A es el conjunto de los números naturales. Debe quedar claro que esta formulación sustituye a la menos formal que hemos dado antes; aquí consideramos sólo el conjunto A de los números naturales x que satisfacen $P(x)$. Por ejemplo, supóngase que A es el conjunto de los números naturales n para los cuales se cumple que

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nuestra demostración anterior hizo ver que A contiene 1 y que $k + 1$ pertenece a A si k pertenece a A. Se sigue que A es el conjunto de todos los números naturales, es decir, que la fórmula se cumple para todos los números naturales n.

Existe todavía otra formulación rigurosa del principio de inducción matemática que parece totalmente distinta. Si A es una colección cualquiera de números naturales, es tentador decir que en A debe haber un elemento más pequeño que todos los demás. En realidad esta afirmación puede dejar de ser cierta de un modo bastante curioso. Un conjunto de números naturales de particular importancia es la colección A que no contiene ningún número natural en absoluto, el llamado «conjunto vacío» * que se suele designar por $\emptyset$. El conjunto vacío $\emptyset$ es una

* Aunque no convenza como tal conjunto en el sentido ordinario de la palabra, el conjunto vacío surge de modo natural en muchos contextos. Con frecuencia consideramos al conjunto A que está formado por todos los x que satisfacen la propiedad P; a menudo no tenemos ninguna garantía de que P sea satisfecha por *algún* número de manera que A puede ser $\emptyset$; en realidad muchas veces se demuestra que P es siempre falso demostrando que $A = \emptyset$.

colección de números naturales que no tiene elemento mínimo; en realidad, lo que no tiene es ningún elemento en absoluto. Ésta es, sin embargo, la única excepción posible; si A es un conjunto no vacío de números naturales, entonces A tiene un elemento mínimo. Esta afirmación «intuitivamente evidente», conocida como «principio de buena ordenación», puede ser demostrada como sigue a partir del principio de inducción. Supóngase que el conjunto A no tenga elemento mínimo. Sea B el conjunto de los números naturales n tales que $1, \ldots, n$ no están ***ninguno*** en A. Evidentemente 1 está en B (pues si 1 estuviese en A, entonces A tendría a 1 como elemento mínimo). Además, si $1, \ldots, k$ no están en A, evidentemente $k + 1$ no está en A (de otro modo $k + 1$ sería el elemento mínimo de A), de manera que $1, \ldots, k + 1$ no están ninguno en A. Esto demuestra que si k está en B, entonces $k + 1$ está en B. Se sigue que todo número n está en B, es decir, los números $1, \ldots, n$ no están en A cualquiera que sea el número natural. Así pues, $A = \emptyset$, con lo que se concluye la demostración.

Es también posible demostrar el principio de inducción a partir del principio de buena ordenación (problema 9). Cualquiera de estos principios puede considerarse como postulado básico acerca de los números naturales.

Otra forma de inducción nos queda aún por mencionar. Ocurre a veces que para demostrar $P(k + 1)$ debemos suponer no sólo $P(k)$, sino también $P(l)$ para todos los números naturales $l \leq k$. En este caso descansamos en el «principio de inducción completa». Si A es un conjunto de números naturales y

(1) 1 está en A,
(2) $k + 1$ está en A si $1, \ldots, k$ está en A,

entonces A es el conjunto de todos los números naturales.

Aunque el principio de inducción completa puede parecer mucho más fuerte que el principio de inducción ordinario, en realidad no es sino una consecuencia de este último. La demostración de este hecho se deja para el lector, con una indicación (problema 10). Aplicaciones de esto se encontrarán en los problemas 7, 17, 20 y 22.

En relación estrecha con las demostraciones por inducción están las «definiciones recursivas». Por ejemplo, el número $n!$ (leído «factorial de n») se define como el producto de todos los números naturales menores o iguales a n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot n.$$

Esto puede expresarse con más precisión como sigue:

$$(1)\quad 1! = 1,$$
$$(2)\quad n! = n \cdot (n-1)!.$$

Esta forma de definición hace ver la relación entre $n!$ y $(n-1)!$ de una manera explícita idealmente adecuada para las demostraciones por inducción. El problema 23 revisa una definición ya conocida del lector que puede expresarse mucho más sucintamente como definición recursiva; como se ve en este problema, la definición recursiva es verdaderamente necesaria para una demostración rigurosa de algunas de las propiedades básicas de la definición.

Una definición, que puede no ser familiar, encierra una notación conveniente que vamos a usar constantemente. En lugar de escribir

$$a_1 + \cdots + a_n,$$

emplearemos generalmente la letra griega Σ (sigma mayúscula, de «suma») y escribiremos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

en otras palabras, $\sum_{i=1}^{n} a_i$ designará la suma de los números obtenidos haciendo $i = 1, 2, \ldots, n$. Así

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Obsérvese que la letra i no tiene en realidad nada que ver con el número designado por $\sum_{i=1}^{n} i$, y puede ser sustituido por cualquier símbolo conveniente (excepto n, por supuesto):

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$\sum_{j=1}^{i} j = \frac{i(i+1)}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{j} n = \frac{j(j+1)}{2}.$$

Para definir $\sum_{i=1}^{n} a_n$ con precisión hace falta en realidad una definición recursiva:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1,$$
$$(2) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n.$$

Pero solamente insistirían en tal precisión los proveedores de escrúpulos rigoristas. En la práctica se usan toda clase de modificaciones de este simbolismo y en ninguna de ellas se considera necesario añadir ninguna palabra de explicación. El símbolo

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 4}}^{n} a_i,$$

por ejemplo, es una manera evidente de escribir

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_6 + \cdots + a_n,$$

o, con más precisión,

$$\sum_{i=1}^{3} a_i + \sum_{i=5}^{n} a_i.$$

Las deficiencias de los números naturales que descubrimos al principio de este capítulo pueden ser remediadas en parte extendiendo este sistema al conjunto de los **enteros**

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots.$$

Este conjunto se designa por **Z** (del alemán «Zahl», número). De las propiedades P1-P12, solamente P7 deja de cumplirse para **Z**.

Un sistema todavía más amplio de números se obtiene tomando cocientes m/n

de enteros (con $n \neq 0$). Estos números reciben el nombre de números racionales, y el conjunto de los **números racionales** se designa por **Q** (del inglés «quotient», cociente). En este sistema de números se satisfacen todas las propiedades P1-P12. Está uno tentado de sacar como consecuencia que las «propiedades de números» estudiadas con algún detalle en el capítulo 1 hacen referencia precisamente a una clase de números, a saber, a **Q**. Existe sin embargo una colección todavía más amplia de números para la que son válidas las propiedades P1-P12: el conjunto de todos los **números reales**, designado por **R**. Los números reales incluyen no sólo los números racionales, sino también otros números (los **números irracionales**) que pueden ser representados por decimales infinitos; π y $\sqrt{2}$ son ambos ejemplos de números irracionales. La demostración de que π es irracional no es fácil; dedicaremos todo el capítulo 16 de la parte III a una demostración de este hecho. La irracionalidad de $\sqrt{2}$ por el contrario es muy sencilla y era conocida ya de los griegos. (Puesto que el teorema de Pitágoras prueba que un triángulo rectángulo isósceles con los catetos de longitud 1 tiene una hipotenusa de longitud $\sqrt{2}$, no es sorprendente que los griegos investigaran esta cuestión.) La demostración se basa en algunas observaciones acerca de los números naturales. Todo número natural n puede escribirse ya sea en la forma $2k$ o en la forma $2k+1$ para algún entero k [este hecho «evidente» tiene una demostración fácil por inducción (problema 8)]. Los números naturales de la forma $2k$ reciben el nombre de **pares**; los de la forma $2k + 1$ se llaman **impares**. Obsérvese que los números pares tienen cuadrados pares y los números impares tienen cuadrados impares:

$$(2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2),$$
$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1.$$

De esto se sigue que la recíproca tiene que ser cierta: si n^2 es par, entonces n es par; si n^2 es impar, entonces n es impar. La demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional es ahora muy sencilla. Supóngase que $\sqrt{2}$ fuese racional, es decir, que existieran números naturales p y q tales que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Podemos suponer que p y q no tienen ningún divisor común (puesto que se podría empezar simplificando para eliminar los divisores comunes). Tenemos, pues,

$$p^2 = 2q^2.$$

Esto demuestra que p^2 es par y en consecuencia p debe ser par; es decir, $p = 2k$ para algún número natural k. Entonces

$$p^2 = 4k^2 = 2q^2,$$

de modo que

$$2k^2 = q^2.$$

Esto demuestra que q^2 es par y en consecuencia que q es par. Así pues, son pares tanto p como q en contradicción con el hecho de que p y q no tienen divisores comunes. Esta contradicción nos demuestra lo que nos proponíamos.

Es importante comprender con precisión qué es lo que esta demostración nos enseña. Hemos demostrado que no existe ningún número racional x tal que $x^2 = 2$. Este aserto se expresa a menudo más brevemente diciendo que $\sqrt{2}$ es irracional. Obsérvese, sin embargo, que el uso del símbolo $\sqrt{2}$ implica la existencia de *algún* número (necesariamente irracional) cuyo cuadrado es 2. No hemos demostrado que un tal número exista y podemos decir en confianza que por ahora sería imposible para nosotros dar una demostración de esto. Tal como estamos, cualquier demostración tendría que estar basada en P1-P12 (las únicas propiedades de **R** que hemos mencionado); puesto que P1-P12 se cumplen también para **Q**, exactamente los mismos argumentos valdrían para demostrar que existe un número racional cuyo cuadrado es 2, lo cual sabemos que es falso. (Obsérvese que la demostración que hemos dado para **Q** de que no existe ningún número cuyo cuadrado es 2 no es utilizable para **R** puesto que en dicha demostración hemos aplicado no solamente P1-P12 sino también una propiedad especial de **Q**, el hecho de que todo número de **Q** puede ser escrito en la forma p/q con p y q enteros.)

Esta deficiencia particular en nuestra lista de propiedades de los números reales podría, por supuesto, corregirse, añadiendo una nueva propiedad que afirmara la existencia de raíces cuadradas de números positivos. Recurrir a una tal medida no sería, sin embargo, ni estéticamente agradable ni matemáticamente satisfactorio; todavía no sabríamos que todo número tiene una raíz n-ésima si n es impar y que todo número positivo tiene una raíz n-ésima si n es par. Incluso aceptando esto, no podríamos demostrar la existencia de un número que satisficiera $x^5 + x + 1 = 0$ (si bien existe uno), puesto que no sabemos escribir la solución de la ecuación en términos de raíces n-ésimas (de hecho se sabe que la solución no puede escribirse en esta forma). Y, por supuesto, no queremos suponer que todas las ecuaciones tienen soluciones, ya que esto es falso (ningún

número real x satisface, por ejemplo, $x^2 + 1 = 0$). De hecho, este camino de investigación no conduce a nada. Las indicaciones más útiles acerca de la propiedad que ha de distinguir a **R** de **Q**, la evidencia más clara de encontrar esta propiedad, no viene del estudio exclusivo de los números. Para estudiar los números reales de manera más profunda, debemos estudiar más que los números reales. En este punto debemos empezar con los fundamentos del cálculo infinitesimal, en particular el concepto fundamental sobre el que el cálculo se basa: las funciones.

PROBLEMAS

1. Demostrar por inducción las siguientes fórmulas:

$$\text{(i)}\quad 1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\text{(ii)}\quad 1^3 + \cdots + n^3 = (1 + \cdots + n)^2.$$

2. Encontrar una fórmula para

$$\text{(i)}\quad \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1).$$

$$\text{(ii)}\quad \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2.$$

Indicación: ¿Qué tienen que ver estas expresiones con $1 + 2 + 3 + \ldots + 2n$ y $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (2n)^2$?

3. Si $0 \leq k \leq n$, se define el «coeficiente binomial» $\binom{n}{k}$ por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \text{ si } k \neq 0, n$$

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. (Esto se convierte en un caso particular de la primera fórmula si se define $0! = 1$.)

(a) Demostrar que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

(La demostración no requiere ningún argumento de inducción).
Esta relación da lugar a la siguiente configuración, conocida por «triángulo de Pascal»: todo número que no esté sobre uno de los lados es la suma de los dos números que tiene encima; el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ es el número k-ésimo de la fila $(n+1)$.

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
         . . .
```

(b) Obsérvese que todos los números del triángulo de Pascal son números naturales. Utilícese la parte (a) para demostrar por inducción que $\binom{n}{k}$ es siempre un número natural. (Toda la prueba por inducción puede resumirse, en cierto sentido, en una ojeada al triángulo de Pascal).

(c) Dése otra demostración de que $\binom{n}{k}$ es un número natural, demostrando que $\binom{n}{k}$ es el número de conjuntos de exactamente k enteros elegidos cada uno entre $1, \ldots, n$.

(d) Demostrar el «teorema del binomio»: Si a y b son números cualesquiera, entonces

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}b^j.$$

(e) Demostrar que

(i) $$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

(ii) $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots\pm\binom{n}{n}=0.$

(iii) $\sum_{l\text{ impar}}\binom{n}{l}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots=2^{n-1}.$

(iv) $\sum_{l\text{ par}}\binom{n}{l}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots=2^{n-1}.$

4. (a) Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\binom{m}{l-k}=\binom{n+m}{l}.$$

Ayuda: Aplicar el teorema binomial a $(1+x)^n(1+x)^m$.

(b) Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

5. (a) Demostrar por inducción sobre n que

$$1+r+r^2+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

si $r \neq 1$ (si es $r = 1$, el cálculo de la suma no presenta problema alguno).

(b) Deducir este resultado poniendo $S = 1 + r + \ldots + r^n$, multiplicando esta ecuación por r y despejando S entre las dos ecuaciones.

6. La fórmula para $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ se puede obtener como sigue. Empezamos con la fórmula

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1.$$

Particularizando esta fórmula para $k = 1, \ldots, n$ y sumando, obtenemos

$$2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1$$
$$3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{l} (n+1)^3 - n^3 = 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1 \\ \hline (n+1)^3 - 1 \ = 3[1^2 + \cdots + n^2] + 3[1 + \cdots + n] + n. \end{array}$$

De este modo podemos obtener $\sum_{k=1}^{n} k^2$ una vez conocido $\sum_{k=1}^{n} k$ (lo cual puede obtenerse mediante un procedimiento análogo). Aplíquese este método para obtener

(i) $1^3 + \cdots + n^3$.
(ii) $1^4 + \cdots + n^4$.
(iii) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.
(iv) $\dfrac{3}{1^2\cdot 2^2} + \dfrac{5}{2^2\cdot 3^2} + \cdots + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

*7. Utilizar el método del problema 6 para demostrar que $\sum_{k=1}^{n} k^p$ puede escribirse siempre en la forma

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} + An^p + Bn^{p-1} + Cn^{p-2} + \cdots$$

(Las diez primeras de estas expresiones son

$$\sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2}n^2 \quad + \tfrac{1}{2}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{3}n^3 \quad + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4}n^4 \quad + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \tfrac{1}{5}n^5 \quad + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 \quad - \tfrac{1}{30}n$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^5 &= \tfrac{1}{6}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n} k^6 &= \tfrac{1}{7}n^7 + \tfrac{1}{2}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 - \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{42}n \\
\sum_{k=1}^{n} k^7 &= \tfrac{1}{8}n^8 + \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n} k^8 &= \tfrac{1}{9}n^9 + \tfrac{1}{2}n^8 + \tfrac{2}{3}n^7 - \tfrac{7}{15}n^5 + \tfrac{2}{9}n^3 - \tfrac{1}{30}n \\
\sum_{k=1}^{n} k^9 &= \tfrac{1}{10}n^{10} + \tfrac{1}{2}n^9 + \tfrac{3}{4}n^8 - \tfrac{7}{10}n^6 + \tfrac{1}{2}n^4 - \tfrac{3}{20}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n} k^{10} &= \tfrac{1}{11}n^{11} + \tfrac{1}{2}n^{10} + \tfrac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{5}{66}n.
\end{aligned}$$

Obsérvese que los coeficientes de la segunda columna son siempre $\frac{1}{2}$ y que después de la tercera columna las potencias de n de coeficiente no nulo van decreciendo de dos en dos hasta llegar a n^2 o a n. Los coeficientes de todas las columnas, salvo las dos primeras, parecen bastante fortuitos, pero en realidad obedecen a cierta regla; encontrarla puede considerarse como una prueba de superperspicacia. Para descifrar todo el asunto, véase el problema 26-17.)

8. Demostrar que todo número natural es o par o impar.

9. Demostrar que si un conjunto A de números naturales contiene n_0 y contiene $k + 1$ siempre que contenga k, entonces A contiene todos los números naturales $\geq n_0$.

10. Demostrar el principio de inducción matemática a partir del principio de buena ordenación.

11. Demostrar el principio de inducción completa a partir del principio de inducción ordinario. Indicación: Si A contiene 1 y A contiene $n + 1$ siempre que contenga $1, \ldots, n$, considérese el conjunto B de todos los k tales que $1, \ldots, k$ están todos en A.

12. (a) Si a es racional y b es irracional, ¿es $a + b$ necesariamente irracional? ¿Y si a y b son ambos irracionales?

(b) Si a es racional y b es irracional, ¿es ab necesariamente irracional? (¡Cuidado!)

(c) ¿Existe algún número a tal que a^2 es irracional, pero a^4 racional?

(d) ¿Existen dos números racionales tales que sean racionales tanto su suma como su producto?

13. (a) Demostrar que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$ son irracionales. Indicación: Para tratar $\sqrt{3}$, por ejemplo, aplíquese el hecho de que todo entero es de la forma $3n$ o $3n + 1$ o $3n + 2$. ¿Por qué no es aplicable esta demostración para $\sqrt{4}$?

(b) Demostrar que $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[3]{3}$ son irracionales.

***14.** Demostrar que

(a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.

(b) $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ es irracional.

15. (a) Demostrar que si $x = p + \sqrt{q}$, donde p y q son racionales, y m es un número natural, entonces $x^m = a + b\sqrt{q}$ siendo a y b números racionales.

(b) Demostrar también que $(p - \sqrt{q})^m = a - b\sqrt{q}$.

16. (a) Demostrar que si m y n son números naturales y $m^2/n^2 < 2$, entonces $(m + 2n)^2/(m + n)^2 > 2$; demostrar, además, que

$$\frac{(m + 2n)^2}{(m + n)^2} - 2 < 2 - \frac{m^2}{n^2}.$$

(b) Demostrar los mismos resultados con todos los signos de desigualda invertidos.

(c) Demostrar que si $m/n < \sqrt{2}$, entonces existe otro número raciona m'/n' con $m/n < m'/n' < \sqrt{2}$.

***17.** Parece normal que $\sqrt{n}$ tenga que ser irracional siempre que el número natural n no sea el cuadrado de otro número natural. Aunque puede usarse en realidad el método del problema 13 para tratar cualquier caso particular, no está claro, sin más, que este método tenga que dar necesariamente resultado, y para una demostración del caso general se necesita más información. Un número natural p se dice que es un **número primo** si es imposible escribir $p = ab$ para números naturales a y b a no ser que uno de éstos sea p y el otro 1; por conveniencia se considera que 1 *no* es un número primo. Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Si $n > 1$ no es primo, entonces $n = ab$, con a y b ambos $< n$; si uno de los dos a o b no es primo, puede ser factorizado de manera parecida; continuando de esta manera se demuestra que se puede escribir n como producto de números primos. Por ejemplo, $28 = 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 7$.

(a) Conviértase este argumento en una demostración rigurosa por inducción completa. (En realidad, cualquier matemático razonable aceptaría esta argumentación informal, pero ello se debería en parte a que para él estaría claro cómo formularla rigurosamente.)

Un teorema fundamental acerca de enteros, que no demostraremos aquí, afirma que esta factorización es única, salvo en lo que respecta al orden de los factores. Así, por ejemplo, 28 no puede escribirse nunca como producto de números primos uno de los cuales sea 3, ni puede ser escrito de manera que 2 aparezca una sola vez (ahora debería verse clara la razón de no admitir a 1 como número primo).

(b) Utilizando este hecho, demostrar que $\sqrt{n}$ es irracional a no ser que $n = m^2$ para algún número natural m.

(c) Demostrar que $\sqrt[k]{n}$ es irracional a no ser que $n = m^k$.

(d) Al tratar de números primos no se puede omitir la hermosa demostración de Euclides de que existe un número infinito de ellos. Demuéstrese que no puede haber sólo un número finito de números primos p_1, p_2, p_3, ..., p_n considerando $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.

***18.** (a) Demostrar que si x satisface

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

para algunos enteros $a_{n-1}, \ldots, a_0$, entonces x es irracional si no es entero. (¿Por qué es esto una generalización del problema 17?)

(b) Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ es irracional. Indicación: Empiécese desarrollando las 6 primeras potencias de este número.

19. Demostrar la desigualdad de Bernoulli: Si $h > -1$, entonces

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

¿Por qué es esto trivial si $h > 0$?

20. La sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se define como sigue:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{para } n \geq 3. \end{aligned}$$

Esta sucesión, cuyos primeros términos son 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., fue descubierta por Fibonacci (1175-1250, aprox.) en relación con un problema de

conejos. Fibonacci supuso que una pareja de conejos criaba una nueva pareja cada mes y que después de dos meses cada nueva pareja se comportaba del mismo modo. El número a_n de parejas nacidas en el n-ésimo mes es $n_{n-1} + a_{n-2}$, puesto que nace una pareja por cada pareja nacida en el mes anterior, y además, cada pareja nacida hace dos meses produce ahora una nueva pareja. Es verdaderamente asombroso el número de resultados interesantes relacionados con esta sucesión, hasta el punto de existir una Asociación Fibonacci que publica una revista, *The Fibonacci Quarterly*. Demostrar que

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Una manera de deducir esta sorprendente fórmula se presenta en el problema 23-15.

21. La desigualdad de Schwarz (problema 1-19) tiene en realidad una forma más general:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Dar de esto tres demostraciones, análogas a las tres demostraciones del problema 1-19.

22. El resultado del problema 1-7 tiene una generalización importante: Si $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, entonces la «media aritmética»

$$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

y la «media geométrica»

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

satisfacen

$$G_n \leq A_n.$$

(a) Supóngase que $a_1 < A_n$. Entonces algún a_i tiene que satisfacer $a_i > A_n$; pongamos que sea $a_2 > A_n$. Sea $\bar{a}_1 = A_n$ y sea $\bar{a}_2 = a_1 + a_2 - \bar{a}_1$. Demostrar que

$$\bar{a}_1\bar{a}_2 \geq a_1a_2.$$

¿Por qué la repetición de este proceso un suficiente número de veces demuestra que $G_n \leq A_n$? (He aquí otra ocasión en que resulta ser un buen ejercicio establecer una demostración formal por inducción, al tiempo que se da una explicación informal.) ¿Cuándo se cumple la igualdad en la fórmula $G_n \leq A_n$?

El razonamiento de esta demostración está relacionado con otra demostración interesante.

(b) Haciendo uso del hecho de ser $G_n \leq A_n$ cuando $n = 2$, demostrar por inducción sobre k, que $G_n \leq A_n$ para $n = 2^k$.

(c) Para un n general, sea $2^m > n$. Aplíquese la parte (b) a los 2^m números

$$a_1, \ldots, a_n, \underbrace{A_n, \ldots, A_n}_{2^m - n \text{ veces}}$$

para demostrar que $G_n \leq A_n$.

23. Lo que sigue es una definición recursiva de a^n:

$$a^1 = a,$$
$$a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Demostrar por inducción que

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m,$$
$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

(No se deje llevar el lector por la fantasía: aplíquese inducción sobre n o bien inducción sobre m, pero no sobre ambas a la vez.)

24. Supóngase que conocemos las propiedades P1 y P4 de los números naturales, pero que no se ha hablado de multiplicación. Entonces se puede dar la siguiente definición recursiva de multiplicación:

$$1 \cdot b = b, \qquad (a + 1) \cdot b = a \cdot b + b.$$

Demostrar lo siguiente (¡en el orden indicado!):

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (utilizar inducción sobre a),

$a \cdot 1 = a$,

$a \cdot b = b \cdot a$ (lo anterior era el caso $b = 1$).

25. En este capítulo hemos empezado con los números naturales y gradualmente hemos ido ampliando hasta los reales. Un estudio completamente riguroso de este proceso requiere de por sí un pequeño libro (véase la parte V). Nadie ha encontrado la manera de llegar a los números reales sin pasar por todo este proceso, pero si aceptamos los números reales como dados, entonces los números naturales pueden ser *definidos* como los números naturales de la forma 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, etc. Todo el objeto de este problema consiste en hacer ver que existe una manera matemática rigurosa de decir «etc.».

(a) Se dice que un conjunto A de números reales es **inductivo** si

(1) 1 está en A,

(2) $k + 1$ está en A siempre que k está en A.

Demostrar que

(i) $\mathbf{R}$ es inductivo.

(ii) El conjunto de los números reales positivos es inductivo.

(iii) El conjunto de los números reales positivos distintos de $\frac{1}{2}$ es inductivo.

(iv) El conjunto de los números reales positivos distintos de 5 no es inductivo.

(v) Si A y B son inductivos, entonces el conjunto C de los números reales que están a la vez en A y en B es también inductivo.

(b) Un número real n será llamado **número natural** si n está en *todo* conjunto inductivo.

(i) Demostrar que 1 es un número natural.

(ii) Demostrar que $k + 1$ es un número natural si k es un número natural.

26. Un rompecabezas consiste en disponer de tres vástagos cilíndricos, el primero de los cuales lleva engastados n anillos concéntricos de diámetro decreciente.Se puede quitar el anillo superior de un vástago para engastarlo sobre otro vástago siempre que al hacer esto último el anillo desplazado no venga a caer sobre otro de diámetro inferior (Figura 1). Por ejemplo, si el anillo más pequeño se pasa al vástago 2 y el que le sigue en tamaño se pasa al vástago 3, entonces el anillo más pequeño se podrá pasar también al vástago 3 encima del que le sigue en tamaño. Demostrar que la pila completa se pue-

de pasar al vástago 3 en $2^n - 1$ pasos y no en menos.

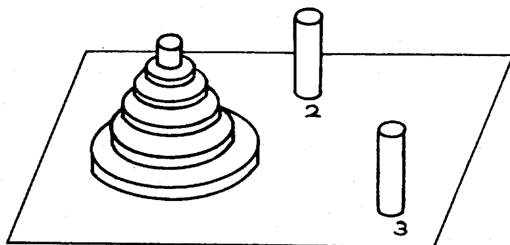


FIGURA 1

*27. Hubo un tiempo en que la Universidad B se preciaba de tener 17 profesores numerarios de matemáticas. La tradición obligaba a que en el almuerzo comunitario semanal, al que concurrían fielmente los 17, todo miembro que hubiese descubierto un error en una de sus publicaciones tenía que hacer público este hecho y a continuación dimitir. Una declaración de este tipo no se había producido nunca porque ninguno de los profesores era consciente de la existencia de un error en su propio trabajo. Lo cual, sin embargo, no quiere decir que no existieran errores. De hecho, en el transcurso de los años, por lo menos un error había sido descubierto en el trabajo de cada uno de los miembros por otro de entre ellos. La existencia de este error había sido comunicada a todos los demás miembros del departamento salvo al responsable, con objeto de evitar dimisiones.

Llegó un fatídico año en que el departamento aumentó el número de sus miembros con un visitante de otra universidad, un Profesor X que venía con la esperanza de que se le ofreciera un puesto permanente al final del año académico. Una vez que vio frustrada su esperanza, el Profesor X tomó su venganza en el último almuerzo comunitario del año diciendo: «Me ha sido muy grata mi estancia entre Vds. pero hay una cosa que creo que es mi deber comunicarles. Por lo menos uno de entre Vds. tiene publicado un resultado incorrecto, lo cual ha sido descubierto por otros del departamento.» ¿Qué ocurrió al año siguiente?

**28. Después de imaginarse, o de consultar, la solución del problema 27, considere lo siguiente: Cada uno de los miembros del departamento era ya sabedor de lo que el Profesor X afirmaba. ¿Cómo pudo pues su afirmación cambiar las cosas?

PARTE 
FUNDAMENTOS

Se afirma con frecuencia
que el cálculo diferencial
trata de la magnitud continua
y sin embargo no se da nunca
una explicación de esta continuidad;
ni siquiera las explicaciones más rigurosas
del cálculo diferencial
basan sus demostraciones sobre la continuidad,
sino que, más o menos conscientemente,
o bien apelan a nociones geométricas
o sugeridas por la geometría,
o se basan en teoremas que nunca han sido establecidos
de manera puramente aritmética.
Entre éstos está, por ejemplo,
el que hemos mencionado antes,
y una investigación más cuidadosa
me ha convencido de que este teorema
o cualquier otro equivalente, puede ser considerado
en cierto modo como una base suficiente
para el análisis infinitesimal.
Faltaba sólo por descubrir su verdadero origen
en los elementos de la aritmética
y obtener así al mismo tiempo
una verdadera definición
de la esencia de la continuidad.
Lo conseguí el 24 de noviembre de 1858
y pocos días después comuniqué
el resultado de mis meditaciones
a mi querido amigo Durège,
con quien sostuve una larga
y animada conversación.

RICHARD DEDEKIND

CAPÍTULO 3

FUNCIONES

El concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función sea de una gran generalidad. Nos puede servir de consuelo pensar que de momento podemos limitar nuestra atención a funciones de una clase muy especial, pero incluso esta clase tan limitada de funciones presentará tal variedad como para centrar nuestra atención durante bastante tiempo. Para empezar no daremos ni siquiera una definición propia de función. De momento, una definición provisional nos capacitará para estudiar muchas funciones e ilustrará la noción intuitiva de función, tal como la entienden los matemáticos. Más adelante consideraremos y discutiremos las ventajas de la definición matemática moderna. Empecemos por la siguiente:

DEFINICIÓN PROVISIONAL

Una función es una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un número real.

Los siguientes ejemplos de funciones están destinados a ilustrar y ampliar esta definición que, por supuesto, necesita ponerse en claro.

Ejemplo 1. La regla que asigna a todo número su cuadrado.

Ejemplo 2. La regla que asigna a todo número y el número

$$\frac{y^3 + 3y + 5}{y^2 + 1}.$$

Ejemplo 3. La regla que asigna a todo número $c \neq 1, -1$ el número

$$\frac{c^3 + 3c + 5}{c^2 - 1}.$$

Ejemplo 4. La regla que asigna a cada uno de los números x que satisface $-17 \leq x \leq \pi/3$ el número x^2.

Ejemplo 5. La regla que asigna a todo número a el número 0 si a es irracional y el número 1 si a es racional.

Ejemplo 6. La regla que asigna

a 2 el número 5,

a 17 el número $\frac{36}{\pi}$,

a $\frac{\pi^2}{17}$ el número 28,

a $\frac{36}{\pi}$ el número 28,

y a todo $y \neq 2, 17, \pi^2/17$, ó $36/\pi$, el número 16 si y es de la forma $a + b\sqrt{2}$ con a y b en $\mathbf{Q}$.

Ejemplo 7. La regla que asigna a todo número t el número $t^3 + x$. (Esta regla depende por supuesto del número x, de modo que en realidad estamos describiendo una infinidad de funciones, una para cada número x).

Ejemplo 8. La regla que asigna a todo número z el número de veces en que figura el 7 en el desarrollo decimal de z si este número es finito y $-\pi$ si hay un número infinito de sietes en el desarrollo decimal de z.

Una cosa, por encima de todo, debe quedar clara con estos ejemplos: una función es una *regla cualquiera* que hace corresponder números a ciertos otros números, no necesariamente una regla que pueda ser expresada mediante una fórmula algebraica ni siquiera mediante una condición uniforme aplicable a todo número; ni es tampoco necesariamente una regla a la que sea posible encontrar una aplicación en la práctica (nadie sabe, por ejemplo, qué es lo que hace asociar a 8 con π). Más aún, la regla puede prescindir de algunos números y puede incluso no estar del todo claro a qué números se aplica la función (inténtese determinar, por ejemplo, si la función del ejemplo 6 es aplicable a π). El conjunto de los

números a los cuales se *aplica* una función recibe el nombre de *dominio* de la función.

No podemos pasar adelante en el estudio de las funciones, sin antes introducir una notación. Puesto que en todo el libro hablaremos con frecuencia de funciones (en realidad apenas hablaremos de otra cosa) nos hace falta una manera conveniente de dar un nombre a las funciones y de referirnos a ellas en general. La práctica corriente consiste en designar una función mediante una letra. Por razones obvias se emplea preferentemente la letra «f», lo cual hace que sigan en orden de preferencia las letras «g» y «h», pero en fin de cuentas puede servir cualquier letra (e incluso cualquier símbolo razonable) sin excluir la «x» y la «y», si bien estas letras suelen reservarse para designar números. Si f es la función, entonces el número que f asocia con x se designa por $f(x)$; este símbolo se lee «f de x» y se le da con frecuencia el nombre de **valor de f en x.** Naturalmente, si designamos una función por x será preciso elegir otra letra para designar el número [sería perfectamente legítimo, aunque inadecuado, elegir «f», lo cual daría el símbolo $x(f)$]. Obsérvese que el símbolo $f(x)$ solamente tiene sentido cuando x pertenece al dominio de f; para otros x el símbolo $f(x)$ no está definido.

Si designamos las funciones definidas en los ejemplos 1-8 por $f, g, h, r, s, \theta, \alpha_x$ e y, entonces podemos expresar de nuevo sus definiciones como sigue:

(1) $f(x) = x^2$ para todo x.

(2) $g(y) = \dfrac{y^3 + 3y + 5}{y^2 + 1}$ para todo y.

(3) $h(c) = \dfrac{c^3 + 3c + 5}{c^2 - 1}$ para todo $c \neq 1, -1$.

(4) $r(x) = x^2$ para todo x tal que $-17 \leq x \leq \pi/3$.

(5) $s(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1, & x \text{ racional} \end{cases}$

(6) $\theta(x) = \begin{cases} 5, & x = 2 \\ \dfrac{36}{\pi}, & x = 17 \\ 28, & x = \dfrac{\pi^2}{17} \\ 28, & x = \dfrac{36}{\pi} \\ 16, & x \neq 2,\ 17,\ \dfrac{\pi^2}{17},\ \text{ó}\ \dfrac{36}{\pi},\ \text{y}\ \ x = a + b\sqrt{2}\ \text{para}\ a,\ b\ \text{en}\ \mathbf{Q}. \end{cases}$

(7) $\alpha_x(t) = t^3 + x$ para todos los números t.

(8) $y(x) = \begin{cases} n, & \text{si aparecen exactamente } n \text{ sietes en el desarrollo decimal de } x \\ -\pi, & \text{si aparecen infinitos sietes en el desarrollo decimal de } x. \end{cases}$

Estas definiciones ilustran el procedimiento adoptado comúnmente para definir una función f, indicando el valor de $f(x)$ para todo número x del dominio de f. [Adviértase que esto es exactamente lo mismo que indicar $f(a)$ para todo número a o $f(b)$ para todo número b, etc.] En la práctica se toleran algunas abreviaciones. La definición (1) podría escribirse simplemente

$$(1) \quad f(x) = x^2,$$

sobreentendiéndose la frase calificativa «para todo x». La única abreviación posible para la definición (4) es, por supuesto,

$$(4) \quad r(x) = x^2, \quad -17 \leq x \leq \pi/3.$$

Se entiende, generalmente, que una definición tal como

$$k(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}, \quad x \neq 0, 1$$

puede abreviarse poniendo

$$k(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1};$$

en otras palabras, *si el dominio no se restringe explícitamente más, se sobreentiende formado por todos aquellos números para los cuales la definición tiene sentido.*

El lector no debe encontrar dificultad en comprobar si los siguientes enunciados se cumplen para las funciones antes definidas:

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 1;$$

$$g(x) = h(x) \text{ si } x^3 + 3x + 5 = 0;$$

$$r(x+1) = r(x) + 2x + 1 \text{ si } -17 \leq x \leq \frac{\pi}{3} - 1;$$

$$s(x+y) = s(x) \text{ si } y \text{ es racional};$$
$$\theta\left(\frac{\pi^2}{17}\right) = \theta\left(\frac{36}{\pi}\right);$$
$$\alpha_x(x) = x \cdot [f(x) + 1];$$
$$y\left(\frac{1}{3}\right) = 0, y\left(\frac{7}{9}\right) = -\pi.$$

Si al lector no le parece razonable la expresión $f(s(a))$ es que está olvidando que $s(a)$ es un número como cualquier otro, de modo que $f(s(a))$ tiene sentido. De hecho se cumple que $f(s(a)) = s(a)$ para todo a. ¿Por qué? Expresiones más complicadas incluso que $f(s(a))$ no son, una vez examinadas, más difíciles de descifrar. La expresión

$$f(r(s(\theta(\alpha_3(y(\tfrac{1}{3})))))),$$

por temible que parezca, puede ser evaluada muy fácilmente con un poco de paciencia:

$$\begin{aligned} & f(r(s(\theta(\alpha_3(y(\tfrac{1}{3})))))) \\ &= f(r(s(\theta(\alpha_3(0))))) \\ &= f(r(s(\theta(3)))) \\ &= f(r(s(16))) \\ &= f(r(1)) \\ &= f(1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Los primeros problemas al final de este capítulo darán más práctica en el manejo de este simbolismo.

La función definida en (1) es un ejemplo más bien especial de una clase importantísima de funciones, las funciones polinómicas. Una función f es una **función polinómica** si existen números reales $a_0, \ldots, a_n$ tales que

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad \text{para todo } x$$

[cuando se escribe $f(x)$ en esta forma se supone tácitamente que $a_n \neq 0$]. La potencia más alta de x con coeficiente distinto de 0 recibe el nombre de **grado** de f; por ejemplo, la función polinómica f definida por $f(x) = 5x^6 + 137x^4 - \pi$ es de grado 6.

Las funciones definidas en (2) y (3) pertenecen a una clase algo más amplia de funciones, las **funciones racionales**; éstas son funciones de la forma p/q, donde p y q son funciones polinómicas (y q no es la función que toma siempre el valor 0). Las funciones racionales son, a su vez, ejemplos muy especiales de una clase todavía más amplia de funciones, estudiadas muy detenidamente en análisis, que son más simples que las funciones primeramente mencionadas en este capítulo. Los siguientes son ejemplos de esta clase de funciones:

(9) $f(x) = \dfrac{x + x^2 + x \text{ sen}^2 x}{x \text{ sen } x + x \text{ sen}^2 x}$.

(10) $f(x) = \text{sen}(x^2)$.

(11) $f(x) = \text{sen}(\text{sen}(x^2))$.

(12) $f(x) = \text{sen}^2(\text{sen}(\text{sen}^2(x \text{ sen}^2 x^2)))\cdot \text{sen}\left(\dfrac{x + \text{sen}(x \text{ sen } x)}{x + \text{sen } x}\right)$

¿Cuál es el criterio, puede uno preguntarse, que permite considerar como simple una monstruosidad tal como (12)? La contestación es que estas funciones pueden ser formadas a partir de unas pocas funciones simples, utilizando unos pocos medios simples de combinar funciones. Para construir las funciones (9)-(12) debemos empezar con la «función identidad» I, para la cual $I(x) = x$, y la «función seno» sen, cuyo valor $\text{sen}(x)$ en x se escribe a veces simplemente sen x. Los siguientes son algunos de los métodos importantes de combinar funciones para formar nuevas funciones.

Si f y g son dos funciones cualesquiera, podemos definir una nueva función $f + g$ denominada **suma** de f y g mediante la ecuación

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Obsérvese que según las convenciones que hemos adoptado, el dominio de $f + g$ está formado por todos los x para los que tiene sentido «$f(x) + g(x)$», es decir, el conjunto de todos los x que están a la vez en el dominio de f y en el dominio de g. Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, entonces $A \cap B$ (léase «A intersección B» o «la intersección de A y B») designa el conjunto de los x que están a la vez en A y en B; esta notación nos permite escribir dominio $(f+g)$ = dominio $f \cap$ dominio g.

De modo semejante definimos el **producto** $f \cdot g$ y el **cociente** $\dfrac{f}{g}$ (o f/g) de f y g por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

y

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Además, si g es una función y c un número, definimos una nueva función $c \cdot g$ mediante

$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x).$$

Esto se convierte en un caso particular de la notación $f \cdot g$ si convenimos en que el símbolo c representa también una función definida por $f(x) = c$; una tal función, que toma el mismo valor para todos los números x, recibe el nombre de **función constante.**

El dominio de $f \cdot g$ es dominio $f \cap$ dominio g, y el dominio de $c \cdot g$ es simplemente el dominio de g. Por otra parte, el dominio de f/g es bastante complicado; puede expresarse por dominio $f \cap$ dominio $g \cap \{x\colon g(x) \neq 0\}$, donde el símbolo $\{x\colon g(x) \neq 0\}$ designa el conjunto de los números x tales que $g(x) \neq 0$. En general, $\{x\colon \ldots\}$ designa el conjunto de todos los x tales que «...» es verdad. Así, $\{x\colon x^3 + 3 < 11\}$ designa el conjunto de todos los números x tales que $x^3 < 8$ y en consecuencia $\{x\colon x^3 + 3 < 11\} = \{x\colon x < 2\}$. Cualquiera de estos símbolos podría haberse escrito igual de bien utilizando en todas partes y en lugar de x. Las variantes de esta notación son frecuentes, pero apenas requieren comentarios. Cualquiera puede imaginarse que $\{x > 0\colon x^3 < 8\}$ designa el conjunto de números positivos cuyo cubo es menor que 8; podría expresarse más formalmente poniendo $\{x\colon x > 0 \text{ y } x^3 < 8\}$. Incidentalmente, este conjunto es igual al conjunto $\{x\colon 0 < x < 2\}$. Una variante de esto es algo menos diáfana, pero muy usada. El conjunto $\{1, 3, 2, 4\}$, por ejemplo, contiene exactamente los 4 números 1, 2, 3 y 4; puede ser designado también por $\{x\colon x = 1 \text{ ó } x = 3 \text{ ó } x = 2 \text{ ó } x = 4\}$.

Algunos hechos acerca de la suma, el producto y el cociente de funciones, son consecuencias inmediatas de hechos acerca de sumas, productos y cocientes de números. Por ejemplo, es muy fácil demostrar

$$(f + g) + h = f + (g + h).$$

La demostración es característica de casi todas las demostraciones que prueban que

dos funciones son iguales; se debe hacer ver que las dos funciones tienen el mismo dominio y el mismo valor para cualquier número del dominio. Por ejemplo, para demostrar que $(f + g) + h = f + (g + h)$, obsérvese que al interpretar la definición de cada lado se obtiene

$$\begin{aligned}[(f + g) + h](x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= [f(x) + g(x)] + h(x)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}[f + (g + h)](x) &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= f(x) + [g(x) + h(x)],\end{aligned}$$

y la igualdad de $[f(x) + g(x)] + h(x)$ y $f(x) + [g(x) + h(x)]$ es un hecho que afecta a números. En esta demostración no se ha mencionado la igualdad de los dos dominios porque esta igualdad aparece obvia desde el momento en que empezamos a escribir estas ecuaciones; el dominio de $(f + g) + h$ y el de $f + (g + h)$ es evidentemente dominio $f \cap$ dominio $g \cap$ dominio h. Nosotros escribimos, naturalmente, $f + g + h$ por $(f + g) + h = f + (g + h)$, exactamente igual que hacemos para los números.

Es igualmente fácil demostrar que $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$, y esta función se designa por $f \cdot g \cdot h$. Las ecuaciones $f + g = g + f$ y $f \cdot g = g \cdot f$ no deben presentar ninguna dificultad.

Utilizando las operaciones $+$, $\cdot$, $/$ podemos expresar ahora la función f definida en (9) por

$$f = \frac{I + I \cdot I + I \cdot \text{sen} \cdot \text{sen}}{I \cdot \text{sen} + I \cdot \text{sen} \cdot \text{sen}}$$

Debe quedar claro, sin embargo, que no podemos expresar la función (10) de esta manera. Nos hace falta todavía otra manera de combinar funciones. Esta combinación, la composición de dos funciones, es con mucho la más importante.

Si f y g son dos funciones cualesquiera, definimos una nueva función $f \circ g$, la **composición** de f y g por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x));$$

el dominio de $f \circ g$ es $\{x\colon x$ está en el dominio de g y $g(x)$ está en el dominio de $f\}$.

El símbolo «$f \circ g$» se lee a menudo «f círculo g». Comparado con la frase «la composición de f y g» esto tiene, por supuesto, la ventaja de la brevedad, pero tiene otra ventaja de mucho mayor alcance: existe menor probabilidad de confundir $f \circ g$ con $g \circ f$ y éstas *no* deben ser confundidas ya que en general no son iguales; de hecho, casi todas las f y g elegidas al azar podrán ilustrar este punto (pruébese con $f = I \cdot I$ y con $g = \text{sen}$, por ejemplo). Para no volvernos demasiado aprensivos acerca de la operación de composición, apresurémonos a decir que la composición *es* asociativa

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

(y la demostración es una trivialidad); esta función se designa por $f \circ g \circ h$. Podemos expresar ahora las funciones (10), (11) y (12) por

(10) $f = \text{sen} \circ (I \cdot I)$,

(11) $f = \text{sen} \circ \text{sen} \circ (I \cdot I)$,

(12) $f = (\text{sen} \cdot \text{sen}) \circ \text{sen} \circ (\text{sen} \cdot \text{sen}) \circ (I \cdot [(\text{sen} \cdot \text{sen}) \circ (I \cdot I)]) \cdot \text{sen} \circ \left(\dfrac{I + \text{sen} \circ (I \cdot \text{sen})}{I + \text{sen}} \right)$

Un hecho habrá quedado probablemente claro. Aunque este método de escribir funciones revela su «estructura» muy claramente, no es breve ni conveniente. El nombre más breve para la función f tal que $f(x) = \text{sen}\,(x^2)$ para todo x, parece ser desgraciadamente «la función f tal que $f(x) = \text{sen}\,(x^2)$ para todo x». La necesidad de abreviar esta tortuosa descripción se ha visto claro desde hace doscientos años, pero ninguna abreviación razonable ha recibido universal apoyo. Por el momento, lo más aceptado es algo así como

$$x \to \text{sen}\,(x^2)$$

(léase «x va a $\text{sen}\,(x^2)$» o simplemente «x flecha $\text{sen}\,(x^2)$»), pero tiene poca popularidad entre los autores de textos de cálculo infinitesimal. En este libro admitiremos algo de elipsis hablando de «la función $f(x) = \text{sen}\,(x^2)$». Más popular es la totalmente drástica abreviación: «La función $\text{sen}\,(x^2)$». Por razones de precisión no haremos nunca uso de esta descripción, la cual confunde en rigor un número y una función, pero a pesar de todo resulta tan conveniente que es probable que el lector termine adoptándola para uso personal. Como con cualquier convenio, el factor motivante es la utilidad y este criterio es razonable siempre que las ligeras deficiencias lógicas no puedan causar confusión. En ocasiones la

confusión *surgirá* a menos que se use una descripción más precisa. Por ejemplo, «la función $x + t^3$» es una frase ambigua; puede significar ya sea

$$x \to x + t^3, \text{ es decir, la función } f \text{ tal que } f(x) = x + t^3 \text{ para todo } x$$

o bien

$$t \to x + t^3, \text{ es decir, la función } f \text{ tal que } f(t) = x + t^3 \text{ para todo } t.$$

Sin embargo, como veremos, para muchos conceptos importantes asociados con funciones, el cálculo infinitesimal dispone de una notación que lleva la «$x \to$» incorporada.

El estudio que llevamos hecho de las funciones ha sido suficientemente extenso para ponernos en condiciones de reconsiderar nuestra definición. Hemos definido una función como una «regla», pero lo que esto quiere decir no está claro del todo. Si preguntamos ¿qué pasa si nos saltamos esta regla?, no es fácil decir si esta pregunta es únicamente de chiste o si en realidad encierra algo serio. Una objeción más sustancial al uso de la palabra «regla» es que

$$f(x) = x^2$$

y

$$f(x) = x^2 + 3x + 3 - 3(x + 1)$$

son ciertamente reglas *distintas*, si por regla entendemos las instrucciones que se dan para determinar $f(x)$; sin embargo, queremos que

$$f(x) = x^2$$

y

$$f(x) = x^2 + 3x + 3 - 3(x + 1)$$

definan la misma función. Por esta razón, una función se define a veces como una «asociación» entre números; por desgracia, la palabra «asociación» escapa a las objeciones hechas contra «regla» solamente por el hecho de que es todavía más vaga.

Existe, por supuesto, una manera satisfactoria de definir funciones, pues de lo contrario no nos hubiésemos preocupado tanto de hacer la crítica a nuestra definición original. Pero una definición satisfactoria no puede consistir en encontrar sinónimos de palabras dificultosas. La definición que los matemáticos han aceptado finalmente para «función» es un hermoso ejemplo de los medios que han permitido incorporar las ideas intuitivas a la matemática rigurosa. Lo que de verdad importa preguntar acerca de una función no es «¿qué es una regla?», o «¿qué es una asociación?», sino «¿qué es lo que hace falta saber acerca de una función para saber absolutamente todo lo referente a ella?». La contestación a la última pregunta es fácil: para todo número x hace falta saber cuál es el número $f(x)$; podemos imaginarnos una tabla que reúna toda la información que se puede desear acerca de la función $f(x) = x^2$:

x	$f(x)$
1	1
-1	1
2	4
-2	4
$\sqrt{2}$	2
$-\sqrt{2}$	2
π	π^2
$-\pi$	π^2

No es ni siquiera necesario disponer los números en una tabla (lo cual sería imposible si los quisiéramos poner todos). En lugar de una disposición en dos columnas podemos considerar varios pares de números

$$(1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4), (\pi, \pi^2), (\sqrt{2}, 2), \ldots$$

simplemente reunidos formando un conjunto.* Para encontrar $f(1)$ tomamos simplemente el segundo número del par cuyo primer miembro es 1; para encontrar $f(\pi)$ tomamos el segundo número del par cuyo primer miembro es π. Parece que queramos decir que una función podría ser definida como una colección de

* Los pares que aquí se presentan son llamados a veces pares ordenados para destacar que, por ejemplo (2, 4) no es el mismo par que (4, 2). Honestamente debemos advertir que vamos a definir funciones en términos de pares ordenados, otro término sin definir. Sin embargo los pares ordenados *pueden* ser definidos y para los escépticos hemos provisto un apéndice a este capítulo.

pares de números. Por ejemplo, si nos dieran la siguiente colección (que contiene exactamente 5 pares):

$$f = \{(1, 7), (3, 7), (5, 3), (4, 8), (8, 4)\},$$

entonces $f(1) = 7$, $f(3) = 7$, $f(5) = 3$, $f(4) = 8$, $f(8) = 4$ y 1, 3, 4, 5, 8 son los únicos números del dominio de f. Si consideramos la colección

$$f = \{(1, 7), (3, 7), (2, 5), (1, 8), (8, 4)\},$$

entonces $f(3) = 7$, $f(2) = 5$, $f(8) = 4$; pero es imposible decir si $f(1) = 7$ o $f(1) = 8$. En otras palabras, una función no puede definirse como una colección cualquiera de pares de números; debemos excluir la posibilidad que ha surgido en este caso. Esto nos lleva a la siguiente definición.

DEFINICIÓN

Una **función** es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si (a, b) y (a, c) pertenecen ambos a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.

Ésta es nuestra primera definición completa y da idea del formato que vamos a utilizar siempre para definir nuevos conceptos importantes. Estas definiciones son tan importantes (por lo menos lo son tanto como los teoremas), que es esencial saber reconocer cuándo en realidad se nos presenta una y saber distinguirlas de comentarios, que motivan observaciones, y de explicaciones casuales. Serán precedidas por la palabra **DEFINICIÓN**, contendrán el término que va a ser definido en negritas y constituirán de por sí un párrafo.

Hay otra definición (en realidad define a la vez dos cosas) que ahora puede formularse con rigor:

DEFINICIÓN

Si f es una función, el **dominio** de f es el conjunto de todos los a para los que existe algún b tal que (a, b) está en f. Si a está en el dominio de f, se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número b *único* tal que (a, b) está en f. Este b único se designa por $\mathbf{f(a)}$.

Con esta definición hemos alcanzado nuestro objetivo: Lo importante de una función f es que el número $f(x)$ esté determinado para todo número x de su dominio. El lector puede tener la impresión de que hemos llegado al punto en que una definición intuitiva ha sido sustituida por una abstracción que la mente puede apenas captar. Dos consuelos podemos ofrecer a esto. En primer lugar, aunque una función ha sido definida como una colección de pares, nada impide que el lector imagine una función como una regla. En segundo lugar ni la definición intuitiva ni la formal nos dan la mejor manera de representarse una función. La mejor manera consiste en hacer dibujos; pero esto requiere de por sí todo un capítulo.

PROBLEMAS

1. Sea $f(x) = 1/(1 + x)$. Interpretar lo siguiente:

(i) $f(f(x))$ (¿Para que x tiene sentido?)

(ii) $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

(iii) $f(cx)$.

(iv) $f(x + y)$.

(v) $f(x) + f(y)$.

(vi) ¿Para que números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$? Indicación: Hay muchos más de los que a primera vista parece.

(vii) ¿Para que números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para dos números distintos x?

2. Sea $g(x) = x^2$ y sea

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional.} \end{cases}$$

(i) ¿Para cuáles y es $h(y) \leq y$?

(ii) ¿Para cuáles y es $h(y) \leq g(y)$?

(iii) ¿Qué es $g(h(z)) - h(z)$?

(iv) ¿Para cuáles w es $g(w) \leq w$?

(v) ¿Para cuáles ε es $g(g(\varepsilon)) = g(\varepsilon)$?

3. Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

(i) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
(ii) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$.
(iii) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x - 2}$.
(iv) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$.
(v) $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 2}$.

4. Sean $S(x) = x^2$, $P(x) = 2^x$ y $s(x) = \operatorname{sen} x$. Determinar los siguientes valores. En cada caso la solución debe ser un *número*.

(i) $(S \circ P)(y)$.
(ii) $(S \circ s)(y)$.
(iii) $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t)$.
(iv) $s(t^3)$.

5. Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de S, P, s usando solamente $+$, $\cdot$ y $\circ$ (por ejemplo, la solución de (i) es $P \circ s$). En cada caso la solución debe ser una *función*.
(i) $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$.
(ii) $f(x) = \operatorname{sen} 2^x$.
(iii) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$.
(iv) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (recordar que $\operatorname{sen}^2 x$ es una abreviación de $(\operatorname{sen} x)^2$).
(v) $f(t) = 2^{2^t}$. (Obsérvese: a^{b^c} significa siempre $a^{(b^c)}$; este convenio se adopta porque $(a^b)^c$ puede escribirse más sencillamente a^{bc}.)
(vi) $f(u) = \operatorname{sen}(2^u + 2^{u^2})$.
(vii) $f(y) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2^{2^{2^{\operatorname{sen} y}}})))$.
(viii) $f(a) = 2^{\operatorname{sen}^2 a} + \operatorname{sen}(a^2) + 2^{\operatorname{sen}(a^2 + \operatorname{sen} a)}$.

Las funciones polinómicas, por ser sencillas y al mismo tiempo flexibles, ocupan un lugar destacado en el estudio de las funciones. Los dos problemas siguientes ponen de manifiesto su flexibilidad y dan una orientación para deducir sus propiedades elementales más importantes.

6. (a) Si $x_1, \ldots, x_n$ son números distintos, encontrar una función polinómica f_i de grado $n - 1$ que tome el valor 1 en x_i y 0 en x_j para $j \neq i$. Indicación: El producto de todos los $(x - x_j)$ para $j \neq i$ es 0 en x_j si $j \neq i$.

(Este producto es designado generalmente por

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (x - x_j),$$

donde el símbolo Π (pi mayúscula) desempeña para productos el mismo papel que Σ para sumas.)

(b) Encontrar ahora una función polinómica de grado $n-1$ tal que $f(x_i)=a_i$, donde $a_1, \ldots, a_n$ son números dados. (Utilícense las funciones f_i de la parte (a). La fórmula que se obtenga es la llamada «fórmula de interpolación de Lagrange».)

7. (a) Demostrar que para cualquier función polinómica f y cualquier número a existe una función polinómica g y un número b tales que $f(x) = (x-a)g(x) + b$ para todo x. (La idea es esencialmente dividir $f(x)$ por $(x-a)$ mediante la división larga hasta encontrar un resto constante. Por ejemplo, el cálculo

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & +x & -2 & \\
\hline
x-1 & x^3 & & -3x & +1 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\
\hline
 & & x^2 & -3x & \\
 & & x^2 & -x & \\
\hline
 & & & -2x & +1 \\
 & & & -2x & +2 \\
\hline
 & & & & -1
\end{array}$$

hace ver que $x^3 - 3x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 2) - 1$. Es posible dar una demostración formal por inducción sobre el grado de f.)

(b) Demostrar que si $f(a) = 0$, entonces $f(x) = (x-a)g(x)$ para alguna función polinómica g. (La recíproca es evidente.)

(c) Demostrar que si f es una función polinómica de grado n, entonces f tiene a lo sumo n raíces, es decir, existen a lo sumo n números a tales que $f(a) = 0$.

(d) Demostrar que para todo n existe una función polinómica de grado n con raíces. Si n es par, encontrar una función polinómica de grado n sin raíces, y si n es impar, encontrar una con una sola raíz.

8. ¿Para qué números a, b, c y d la función

$$f(x) = \frac{ax + d}{cx + b}$$

satisface $f(f(x)) = x$ para todo x?

9. (a) Si A es un conjunto cualquiera de números reales, defínase una función C_A como sigue:

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \text{ está en } A \\ 0, \text{ si } x \text{ no está en } A. \end{cases}$$

Encuéntrense expresiones para $C_{A \cap B}$, $C_{A \cup B}$ y $C_{\mathbf{R}-A}$, en términos de C_A y C_B. (El símbolo $A \cap B$ ha sido definido en este capítulo, pero los otros dos pueden ser nuevos para el lector. Se pueden definir como sigue:
$A \cup B = \{x\colon\ x \text{ está en } A \text{ o } x \text{ está en } B\}$,
$\mathbf{R} - A = \{x\colon\ x \text{ está en } \mathbf{R}, \text{ pero } x \text{ no está en } A\}$.)

(b) Supóngase que f es una función tal que $f(x) = 0$ o 1 para todo x. Demostrar que existe un conjunto A tal que $f = C_A$.

(c) Demostrar que $f = f^2$ si y sólo si $f = C_A$ para algún conjunto A.

10. (a) ¿Para qué funciones f existe una función g tal que $f = g^2$? Indicación: El lector puede de seguro dar la respuesta adecuada si se sustituye «función» por «número».

(b) ¿Para qué función f existe una función g tal que $f = 1/g$?

*(c) ¿Para qué funciones b y c podemos encontrar una función x tal que

$$(x(t))^2 + b(t)x(t) + c(t) = 0$$

para todos los números t?

*(d) ¿Qué condiciones deben satisfacer las funciones a y b si ha de existir una función x tal que

$$a(t)x(t) + b(t) = 0$$

para todos los números t? ¿Cuántas funciones x de éstas existirán?

11. (a) Supóngase que H es una función e y un número tal que $H(H(y)) = y$. ¿Cuál es el valor de

$$\underbrace{H(H(H(\cdots(H(y)\cdots)}_{80 \text{ veces}}?$$

(b) La misma pregunta sustituyendo 80 por 81.

(c) La misma pregunta si $H(H(y)) = H(y)$.

*(d) Encuéntrese una función H tal que $H(H(x)) = H(x)$ para todos los números x y tal que $H(1) = 36$, $H(2) = \pi/3$, $H(13) = 47$, $H(36) = 36$, $H(\pi/3) = \pi/3$, $H(47) = 47$. (No se intente «despejar» $H(x)$; existen muchas funciones H que satisfacen $H(H(x)) = H(x)$. Las demás condiciones impuestas a H se han dado para orientar acerca de la manera de encontrar un H adecuado.)

*(e) Encontrar una función H tal que $H(H(x)) = H(x)$ para todo x y tal que $H(1) = 7$, $H(17) = 18$.

12. Una función f es **par** si $f(x) = f(-x)$, e **impar** si $f(x) = -f(-x)$. Por ejemplo, f es par si $f(x) = x^2$ o $f(x) = |x|$ o $f(x) = \cos x$, mientras que f es impar si $f(x) = x$ o $f(x) = \operatorname{sen} x$.

(*a*) Determinar si $f + g$ es par, impar o no necesariamente ninguna de las dos cosas, en los cuatro casos obtenidos al tomar f par o impar y g par o impar. (Las soluciones pueden ser convenientemente dispuestas en una tabla 2×2.)

(b) Hágase lo mismo para $f \cdot g$.

(c) Hágase lo mismo para $f \circ g$.

(d) Demostrar que para toda función par f puede escribirse $f(x) = g(|x|)$, para una infinidad de funciones g.

***13.** (a) Demostrar que cualquier función f con dominio $\mathbf{R}$ puede ser puesta en la forma $f = E + O$, con E par y O impar.

(b) Demuéstrese que esta manera de expresar f es única. (Si se intenta resolver primero la parte (b) «despejando» E y O, se encontrará probablemente la solución a la parte (a).)

14. Si f es una función cualquiera, definir una nueva función $|f|$ mediante $|f|(x) = |f(x)|$. Si f y g son funciones, definir dos nuevas funciones, $\text{máx}\,(f, g)$ y $\text{mín}\,(f, g)$, mediante

$$\text{máx}\,(f, g)(x) = \text{máx}\,(f(x), g(x)),$$
$$\text{mín}\,(f, g)(x) = \text{mín}\,(f(x), g(x)).$$

Encontrar una expresión para $\text{máx}\,(f, g)$ y $\text{mín}\,(f, g)$ en términos de $|\ \ |$.

15. (a) Demostrar que $f = \text{máx}\,(f, 0) + \text{mín}\,(f, 0)$. Esta manera particular de escribir f es bastante usada; las funciones $\text{máx}\,(f, 0)$ y $\text{mín}\,(f, 0)$ se llaman respectivamente **parte positiva** y **parte negativa** de f.

(b) Una función f se dice que es **no negativa** si $f(x) \geq 0$ para todo x. Demostrar que para cualquier función f puede ponerse $f = g - h$ de infinitas maneras con g y h no negativas. (La «manera corriente» es $g =$

$= \text{máx}\,(f, 0)$ y $h = -\text{mín}\,(f, 0)$. Indicación: Cualquier *nùmèro* puede ciertamente expresarse de infinitas maneras como diferencia de dos *números* no negativos.

***16.** Supongase que f satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y.

(a) Demostrar que $f(x_1 + \ldots + x_n) = f(x_1) + \ldots + f(x_n)$.

(b) Demostrar que existe algún número c tal que $f(x) = cx$ para todos los números *racionales* x (en este punto no intentamos decir nada acerca de $f(x)$ cuando x es irracional). Indicación: Piénsese primero en cómo debe ser c. Demostrar luego que $f(x) = cx$, primero cuando x es un entero, después cuando x es el recíproco de un entero, y finalmente para todo racional x.

***17.** Si $f(x) = 0$ para todo x, entonces f satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y y también $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ para todo x e y. Supóngase ahora que f satisface estas dos propiedades, pero que $f(x)$ no es siempre 0. Demostrar que $f(x) = x$ para todo x como sigue:

(a) Demostrar que $f(1) = 1$.

(b) Demostrar que $f(x) = x$ si x es racional.

(c) Demostrar que $f(x) > 0$ si $x > 0$. (Esta parte es artificiosa, pero habiendo puesto atención a las observaciones filosóficas que van con los problemas de los dos últimos capítulos, se sabrá lo que hacer.)

(d) Demostrar que $f(x) > f(y)$ si $x > y$.

(e) Demostrar que $f(x) = x$ para todo x. Indicación: Hágase uso del hecho de que entre dos números cualesquiera existe un número racional.

***18.** ¿Qué condiciones precisas deben satisfacer f, g, h y k para que $f(x)g(y) = h(x)k(y)$ para todo x e y?

***19.** (a) Demostrar que no existen funciones f y g con alguna de las propiedades siguientes:

(i) $f(x) + g(y) = xy$ para todo x e y.
(ii) $f(x) \cdot g(y) = x + y$ para todo x e y.

Indicación: Trátese de obtener información acerca de f y g eligiendo valores particulares de x e y.

(b) Hallar funciones f y g tales que $f(x + y) = g(xy)$ para todo x e y.

***20.** (a) Hallar una función f que no sea constante y tal que $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$.

(b) Supóngase que $f(y) - f(x) \leq (y - x)^2$ para todo x e y. (¿Por qué esto implica $|f(y) - f(x)| \leq (y - x)^2$?) Demostrar que f es una constante. Indicación: Divídase el intervalo $[x, y]$ en n partes iguales.

21. Demostrar o dar un contraejemplo de las siguientes proposiciones:

(a) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.
(b) $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$.
(c) $\dfrac{1}{f \circ g} = \dfrac{1}{f} \circ g$.
(d) $\dfrac{1}{f \circ g} = f \circ \left(\dfrac{1}{g}\right)$.

22. (a) Supóngase que $g = h \circ f$. Demostrar que si $f(x) = f(y)$, entonces $g(x) = g(y)$.
(b) Recíprocamente, supóngase que f y g son dos funciones tales que $g(x) = g(y)$ siempre que $f(x) = f(y)$. Demostrar que $g = h \circ f$ para alguna función h. Indicación: Inténtese definir $h(z)$ cuando z es de la forma $z = f(x)$ (éstos son los únicos z que importan) y aplicar la hipótesis para demostrar que la definición es consistente.

23. Supóngase que $f \circ g = I$ donde $I(x) = x$. Demostrar que
(a) Si $x \neq y$, entonces $g(x) \neq g(y)$.
(b) Todo número b puede escribirse $b = f(a)$ para algún número a.

***24.** (a) Supóngase que g es una función con la propiedad de ser $g(x) \neq g(y)$ si $x \neq y$. Demuéstrese que existe una función f tal que $f \circ g = I$.
(b) Supóngase que f es una función tal que todo número b puede escribirse en la forma $b = f(a)$ para algún número a. Demostrar que existe una función g tal que $f \circ g = I$.

***25.** Hallar una función f tal que $g \circ f = I$ para alguna función g, pero tal que no exista ninguna función h con $f \circ h = I$.

***26.** Supóngase $f \circ g = I$ y $h \circ f = I$. Demostrar que $g = h$. Indicación: Aplíquese el hecho de que la composición es asociativa.

27. (a) Supóngase $f(x) = x + 1$. ¿Existen funciones g tales que $f \circ g = g \circ f$?
(b) Supóngase que f es una función constante. ¿Para qué funciones g se cumple $f \circ g = g \circ f$?
(c) Supóngase que $f \circ g = g \circ f$ para *todas* las funciones g. Demostrar que f es la función identidad $f(x) = x$.

28. (a) Sea F el conjunto de todas las funciones cuyo dominio es **R**. Demuéstrese que con las definiciones de $+$ y $\cdot$ dadas en este capítulo, se cumplen todas las propiedades P1-P9, excepto P7, siempre que 0 y 1 se interpreten como funciones constantes.
(b) Demostrar que P7 no se cumple.

*(c) Demostrar que no pueden cumplirse P10-P12. En otros términos, demostrar que no existe ninguna colección P de funciones en F, tales que P10-P12 se cumplen para P. (Es suficiente, y esto simplificará las cosas, considerar sólo funciones que sean 0, excepto en dos puntos x_0 y x_1.)

(d) Supóngase que se ha definido $f < g$ en el sentido de que $f(x) < g(x)$ para todo x. ¿Cuáles de las propiedades P'10-P'13 (del problema 1-8) se cumplen ahora?

(e) Si $f < g$, ¿se cumple $h \circ f < h \circ g$? ¿Es $f \circ h < g \circ h$?

APÉNDICE. PARES ORDENADOS

No sólo en la definición de funciones, sino también en otras partes del libro es necesario aplicar el concepto de par ordenado de objetos. Todavía no hemos dado una definición, ni siquiera hemos dicho explícitamente cuáles son las propiedades que ha de tener un par ordenado. La propiedad que vamos a exigir dice formalmente que un par ordenado (a, b) debe quedar determinado por a y b y por el orden en que a y b vienen dados:

$$\text{si } (a, b) = (c, d), \text{ entonces } a = c \text{ y } b = d.$$

Se pueden tratar muy cómodamente los pares ordenados introduciendo simplemente (a, b) como un término sin definir y adoptando como axioma la propiedad básica; al ser esta propiedad el único hecho importante acerca de pares ordenados, no hace falta preocuparse demasiado acerca de lo que un par ordenado «realmente» es. El lector que encuentre satisfactorio este tratamiento no hace falta que lea más.

Lo que queda de este corto apéndice va dedicado a aquellos lectores que no se sientan satisfechos si no se definen de algún modo los pares ordenados y de tal manera que la propiedad básica pase a ser un teorema. No existe motivo alguno para que restrinjamos nuestra atención a los pares ordenados de números; igual de razonable e igual de importante es disponer de la noción de par ordenado de dos objetos matemáticos cualesquiera. Esto significa que nuestra definición debe encerrar solamente conceptos comunes a todas las ramas de la matemática. El único concepto común presente en todas las zonas de la matemática es el de conjunto, y los pares ordenados (lo mismo que cualquier otra cosa en matemáticas) pueden ser definidos en este contexto; un par ordenado resultará ser un conjunto de naturaleza bastante especial.

El conjunto $\{a, b\}$ que contiene a los dos elementos a y b podría parecer lo adecuado como definición de (a, b), pero como definición no vale puesto que a partir de $\{a, b\}$ no hay manera de saber cuál de los dos a o b ha de ser tenido por primer elemento. Más a propósito resulta el peculiar conjunto:

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Este conjunto tiene dos elementos, cada uno de los cuales es *a su vez* un conjunto; un elemento es el conjunto $\{a\}$ que contiene a a como único elemento, y el otro elemento es el conjunto $\{a, b\}$. Aunque pueda parecer chocante, vamos a tomar

a este conjunto como definición de (a, b). La elección quedará justificada con el teorema que sigue a la definición; se verá que esta definición cumple su cometido y realmente ya no quedará nada importante que decir.

DEFINICIÓN

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

TEOREMA

Si $(a, b) = (c, d)$, entonces $a = c$ y $b = d$.

DEMOSTRACIÓN

La hipótesis significa que

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}.$$

Ahora bien, $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ contiene justamente dos elementos $\{a\}$ y $\{a, b\}$ y a es el único elemento común a estos dos elementos de $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Del mismo modo, es c el único elemento común a los dos elementos de $\{\{c\}, \{c, d\}\}$. Por lo tanto, $a = c$. Así, pues, tenemos

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\},$$

y solamente queda por demostrar que $b = d$. Conviene distinguir dos casos.
Caso 1. $b = a$. En este caso, $\{a, b\} = \{a\}$, de modo que el conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ tiene en realidad un solo elemento que es $\{a\}$. Lo mismo vale para $\{\{a\}, \{a, d\}\}$, de modo que $\{a, d\} = \{a\}$, lo cual implica $d = a = b$.
Caso 2. $b \neq a$. En este caso, b pertenece a uno de los elementos de $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, pero no al otro. Debe, por lo tanto, cumplirse que b pertenece a uno de los elementos de $\{\{a\}, \{a, d\}\}$, pero no al otro. Esto solamente puede ocurrir si b pertenece a $\{a, d\}$, pero no a $\{a\}$; así, pues, $b = a$ o $b = d$, pero $b \neq a$, con lo que $b = d$.

CAPÍTULO

4

GRÁFICAS

Si a un matemático se le mencionan los números reales es probable que, sin él quererlo, se forme en su mente la imagen de una recta. Y es probable también que él ni rechazará ni tampoco acogerá con demasiado entusiasmo esta representación mental de los números reales. La «intuición geométrica» le permitirá interpretar proposiciones acerca de números en función de esta imagen y posiblemente incluso le sugerirá métodos para demostrarlas. Aunque las propiedades de los números reales que se estudiaron en la parte I se prestan poco a ser representadas por una imagen geométrica, una tal representación será muy útil en la parte II.

El lector estará ya, probablemente, familiarizado con el método convencional de considerar la línea recta como una imagen de los números reales, es decir, de asociar a cada número real un punto de una recta. Para hacer esto (figura 1) tomamos arbitrariamente un punto al que llamamos 0 y otro punto a la derecha



FIGURA 1

al que llamamos 1. Al punto situado a distancia doble a la derecha le llamamos 2, al punto que dista de 0 lo mismo que 1, pero situado a la izquierda de 0, le llamamos —1, etc. Con esta definición, si $a < b$, entonces el punto correspondiente a a queda a la izquierda del punto correspondiente a b. Podemos también dibujar

números racionales, tales como $\frac{1}{2}$, de la manera sabida. Se puede admitir como evidente que los números irracionales encajan en este esquema, de tal modo que todo número real puede ser dibujado como punto de una recta. No insistiremos demasiado en querer justificar esta suposición, puesto que este método de «dibujar» números es únicamente un método de representar ciertas ideas abstractas y nuestras demostraciones no se apoyarán nunca en estas imágenes (aunque frecuentemente las usaremos para sugerir o para hacer más comprensible una demostración). Debido a que esta imagen geométrica, aun no siendo esencial, desempeña un papel tan prominente, al hablar de números se utiliza con frecuencia la terminología geométrica; a un número se le da, a veces, el nombre de *punto*, y **R** recibe a veces, el nombre de *recta real.*

El número $|a - b|$ tiene una interpretación sencilla en función de esta imagen geométrica: es la distancia entre a y b, la longitud del segmento rectilíneo que tiene por extremos a y b. Esto significa, eligiendo un ejemplo que, por la frecuencia con que se presenta merece consideración especial, que el conjunto de los números x que satisfacen $|x - a| < \varepsilon$ puede ser interpretado como el conjunto de puntos cuya distancia a a es menor que ε. Este conjunto de puntos es el «intervalo» de $a - \varepsilon$ a $a + \varepsilon$, que puede ser también descrito como los puntos correspondientes a números x con $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ (figura 2).



FIGURA 2

Los conjuntos de puntos que corresponden a intervalos surgen con tanta frecuencia que es conveniente disponer de nombres especiales para ellos. El conjunto $\{x : a < x < b\}$ se designa por (a, b) y es llamado **intervalo abierto** de a a b. Esta notación da origen, naturalmente, a cierta ambigüedad, puesto que (a, b) se usa también para designar un par de números, pero queda siempre claro (o puede ser aclarado fácilmente) por el contexto, si de lo que se habla es de un par o de un intervalo. Nótese que si $a \geq b$, entonces $(a, b) = \emptyset$, el conjunto sin elementos; en la práctica, sin embargo, se supone casi siempre (explícitamente si se ha tenido cuidado o de otro modo implícitamente) que siempre que se habla de un intervalo (a, b), el número a es menor que el b.

El conjunto $\{x : a \leq x \leq b\}$ se designa por $[a, b]$ y recibe el nombre de **intervalo cerrado** de a a b. Este símbolo se reserva por lo general para el caso $a < b$, pero algunas veces se utiliza también para $a = b$. Las representaciones usuales para los intervalos (a, b) y $[a, b]$ se pueden ver en la figura 3; al no haber nin-

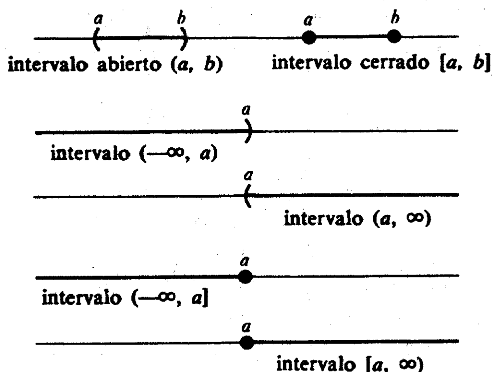


FIGURA 3

guna imagen que pueda indicar con aceptable exactitud la diferencia entre los dos intervalos, se han adoptado distintos convenios. La figura 3 muestra también ciertos intervalos «infinitos». El conjunto $\{x : x > a\}$ se designa por (a, ∞), mientras que el conjunto $\{x : x \geq a\}$ se designa por $[a, \infty)$; los conjuntos $(-\infty, a)$ y $(-\infty, a]$ se definen del mismo modo. En este punto es obligado hacer una advertencia: Los símbolos ∞ y $-\infty$, aunque corrientemente se leen «infinito» y «menos infinito» son *meramente* sugestivos; no existe ningún número «∞» que satisfaga $\infty \geq a$ para todos los números a. Aunque los símbolos ∞ y $-\infty$ aparecen en muchos contextos, es siempre necesario definir estos usos en términos que hagan referencia solamente a números. El conjunto **R** de todos los números reales se considera también como un «intervalo» y se designa a veces por $(-\infty, \infty)$.

De mayor interés para nosotros que un método para dibujar números es un método para dibujar pares de números. Este procedimiento, probablemente conocido también por el lector, requiere un «sistema de coordenadas», dos líneas rectas que se cortan en ángulo recto. Para distinguir estas rectas llamamos a una de ellas *eje horizontal* y a la otra *eje vertical.* (Quizás desde un punto de vista lógico sea preferible una terminología más prosaica tal como «primero» y «segundo» eje, pero como siempre se suelen coger los libros y desde luego los encerados de la misma manera, resulta más descriptivo decir «horizontal» y «vertical». Cada uno de los dos ejes podría ser descrito mediante números reales, pero también podemos designar los puntos del eje horizontal mediante pares $(a, 0)$ y los puntos del eje vertical mediante pares $(0, b)$, de manera que la intersección de los dos ejes, el «origen» del sistema de coordenadas, sea designado por $(0, 0)$. Cualquier punto (a, b) se podrá trazar ahora como en la figura 4 en el vértice del rectángulo

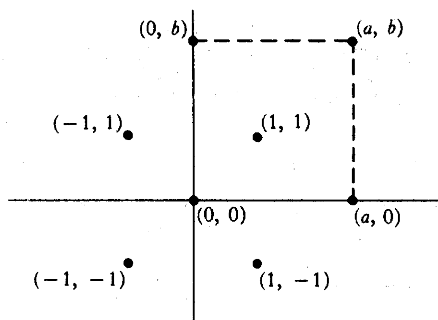


FIGURA 4

cuyos otros tres vértices son los designados por (0, 0), (*a*, 0) y (0, *b*). Los números *a* y *b* reciben respectivamente los nombres de primera y segunda coordenada del punto determinado de esta manera.

Recordemos que lo que realmente nos interesa es hallar un método para dibujar funciones. Puesto que una función no es más que una colección de pares de números, el trazado de una función se reduce a trazar cada uno de los pares de la misma. El dibujo así obtenido recibe el nombre de **gráfica** de la función. En otros términos, la gráfica contiene todos los puntos correspondientes a pares $(x, f(x))$. Puesto que la mayor parte de las funciones contienen infinitos pares, el trazado de una gráfica parece tener que ser una laboriosa tarea, pero de hecho muchas funciones son fáciles de dibujar.

No es de sorprender que las funciones más sencillas, las funciones constantes $f(x) = c$, tengan las gráficas más sencillas. Es fácil ver que la gráfica de la función $f(x) = c$ es una recta paralela al eje horizontal, a distancia c de él (figura 5).

Las funciones $f(x) = cx$ tienen también gráficas particularmente sencillas; líneas rectas que pasan por (0, 0), como en la figura 6. Una demostración de

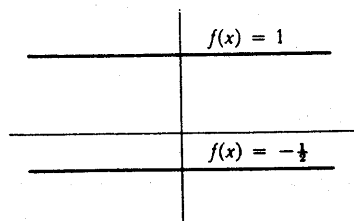


FIGURA 5

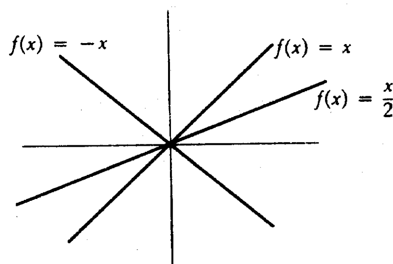


FIGURA 6

este hecho se indica en la figura 7: Sea x un número distinto de 0 y sea L la recta que pasa por el origen O que corresponde a $(0, 0)$ y por el punto A correspondiente a (x, cx). Un punto A' con primera coordenada y estará sobre L siempre que el triángulo $A'B'O$ sea semejante al triángulo ABO, así, pues, siempre que

$$\frac{A'B'}{OB'} = \frac{AB}{OB} = c;$$

ésta es precisamente la condición de que A' corresponda al par (y, cy), es decir, que A' esté sobre la gráfica de f. En el argumento se ha supuesto implícitamente que $c > 0$, pero los otros casos se tratan de modo igualmente fácil. El número c que mide la razón entre los lados que aparecen en la demostración, recibe el nombre de *pendiente* de la recta, y toda recta paralela a ésta se dice también que tiene pendiente c.

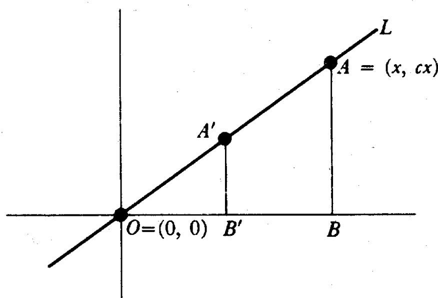


FIGURA 7

Esta demostración no ha sido numerada ni tampoco tratada como demostración formal. De hecho, para una demostración rigurosa haría falta una digresión para la cual no estamos preparados. La demostración rigurosa de *cualquier* proposición que relacione conceptos algebraicos y geométricos requeriría en primer lugar una verdadera demostración (o una aceptación explícita) de que los puntos de una línea recta se corresponden exactamente con los números reales. Aparte de esto sería necesario desarrollar la geometría plana con la misma precisión con que pretendemos desarrollar las propiedades de los números reales. Ahora bien, el desarrollo detallado de la geometría plana es ciertamente un hermoso tema, pero en ningún modo es requisito previo para el estudio del cálculo. Utilizaremos

imágenes geométricas solamente como una ayuda para la intuición; para nuestros fines (y para la mayor parte de las matemáticas) es perfectamente satisfactorio *definir* el plano como el conjunto de todos los pares de números reales, y *definir* las rectas como ciertas colecciones de pares, incluyendo, entre otras, las colecciones $\{(x, cx): x \text{ un número real}\}$. Para dotar a esta geometría, artificialmente construida, de toda la estructura de la geometría que se estudia en bachillerato hace falta una definición más. Si (a, b) y (c, d) son puntos del plano, es decir, pares de números reales, definimos la distancia entre (a, b) y (c, d) como

$$\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

Si no está claro lo que motiva esta definición, la figura 8 puede servir como explicación adecuada; con esta definición el teorema de Pitágoras ha sido incorporado a nuestra geometría.*

Volviendo una vez más a nuestra imagen geométrica informal, no es difícil ver (figura 9) que la gráfica de la función $f(x) = cx + d$ es una recta de pen-

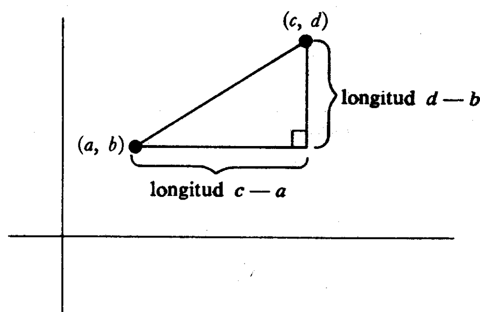


FIGURA 8

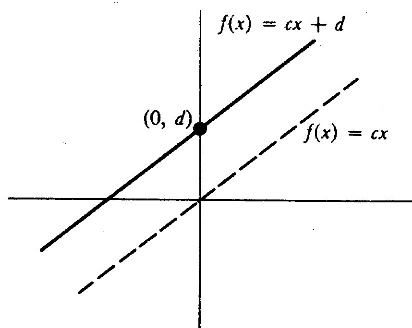


FIGURA 9

diente c que pasa por el punto $(0, d)$. Por esto, las funciones $f(x) = cx + d$ reciben el nombre de **funciones lineales.** Aunque sencillas, las funciones lineales

* El lector escrupuloso podría objetar esta definición diciendo que los números negativos no se sabe que tengan raíces cuadradas. Esta objeción es verdaderamente incontestable por el momento; la definición tendrá que ser aceptada con reservas hasta que sea dilucidado este punto.

se presentan con frecuencia y el lector debería sentirse cómodo trabajando con ellas. El siguiente es un ejemplo típico cuya solución no debe presentar dificultad. Dados dos puntos distintos (a, b) y (c, d), hallar la función lineal f cuya gráfica pasa por (a, b) y (c, d). Esto equivale a decir que $f(a) = b$ y $f(c) = d$. Si f ha de ser de la forma $f(x) = \alpha x + \beta$, entonces se debe tener

$$\alpha a + \beta = b,$$
$$\alpha c + \beta = d;$$

por lo tanto, $\alpha = (d - b)/(c - a)$ y $\beta = b - [(d - b)/(c - a)]a$, de manera que

$$f(x) = \frac{d-b}{c-a}x + b - \frac{d-b}{c-a}a = \frac{d-b}{c-a}(x - a) + b,$$

fórmula fácil de recordar usando la forma «punto-pendiente» (véase problema 6).

Esta solución es, por supuesto, solamente posible si $a \neq c$; las gráficas de las funciones lineales corresponden solamente a rectas no paralelas al eje vertical. Las rectas verticales no son gráficas de *ninguna* función; de hecho la gráfica de una función no puede contener ni siquiera dos puntos situados sobre la misma vertical. Esta conclusión se desprende inmediatamente de la definición de función; dos puntos sobre la misma vertical corresponden a pares de la forma (a, b) y (a, c) y, por definición, una función no puede contener (a, b) y (a, c) si $b \neq c$. Viceversa, si un conjunto de puntos del plano tiene la propiedad de que no hay dos puntos situados sobre la misma vertical, entonces dicho conjunto es la gráfica de una función. Así, los dos primeros conjuntos de la figura 10 no son gráficas de funciones y los dos últimos sí lo son; nótese que el cuarto es la gráfica de una función cuyo dominio no es todo $\mathbf{R}$, pues algunas líneas verticales no tienen sobre ellas ningún punto del conjunto.

Después de las funciones lineales, quizás la función más simple sea $f(x) = x^2$. Si trazamos algunos de los pares de f, es decir, algunos de los pares de la forma (x, x^2), obtenemos una imagen como la de la figura 11.

No es difícil convencerse de que todos los pares (x, x^2) están sobre una curva como la que se ve en la figura 12; esta curva es conocida por el nombre de **parábola.**

Puesto que una gráfica no es sino un dibujo sobre papel, hecho (en este caso) con tinta de imprenta, la pregunta «¿Es ésta la forma verdadera de la gráfica?» es difícil de formular con sentido. Nunca es un dibujo *realmente* correcto puesto

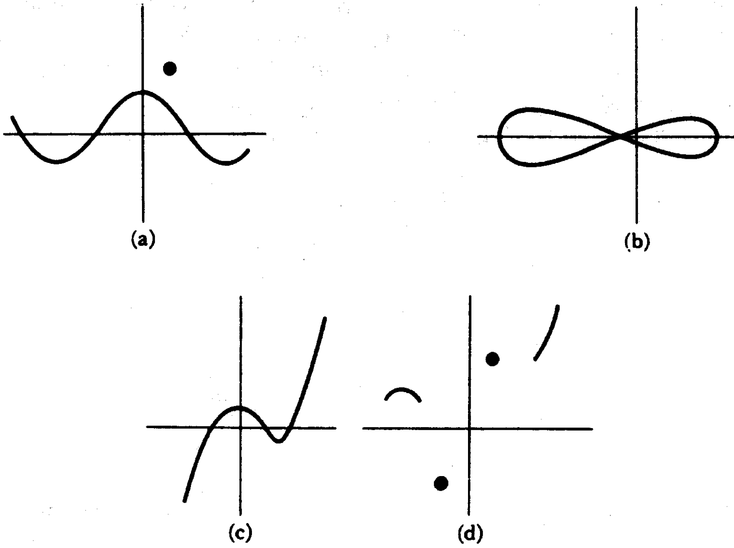


FIGURA 10

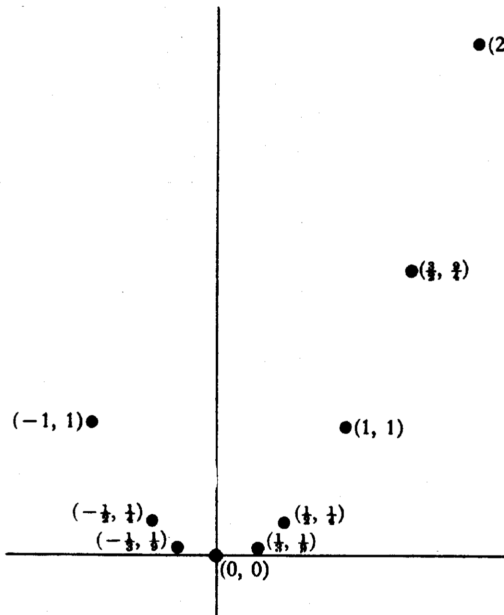


FIGURA 11

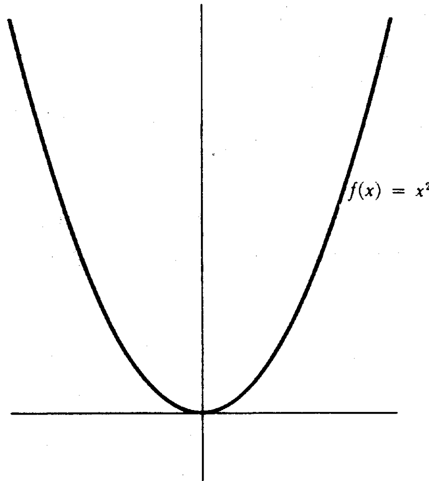


FIGURA 12

que toda línea tiene un grueso. Sin embargo, hay algunas preguntas que se *pueden* hacer: por ejemplo, ¿de qué forma se puede estar seguro que la gráfica no tiene el aspecto de uno de los dibujos de la figura 13? Es fácil ver e incluso demostrar que la gráfica no puede tener el mismo aspecto que (a); pues si $0 < x < y$, entonces $x^2 < y^2$, de manera que la gráfica debería ser más alta en y que en x, lo cual no es el caso en (a). Es también fácil ver, dibujando sencillamente una gráfica muy exacta, trazando en primer lugar muchos pares (x, x^2), que la gráfica no puede tener un gran «salto» como en (b) o un «ángulo» como en (c). Para demos-

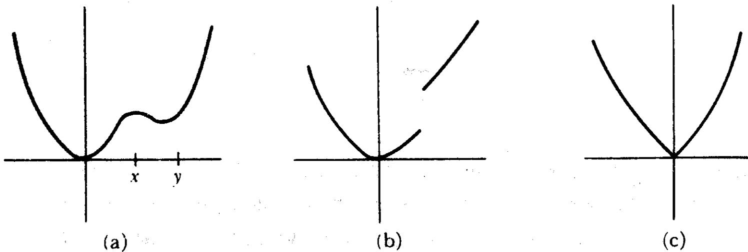


FIGURA 13

trar esto, sin embargo, necesitamos primero decir de manera matemática, qué quiere decir que una función tenga un «salto» o un «ángulo»; estas ideas encierran

ya algunos de los conceptos fundamentales del cálculo. Eventualmente podremos definirlas con rigor, pero mientras tanto el lector puede entretenerse intentando definir estos conceptos y examinando después críticamente sus definiciones. Estas definiciones pueden ser comparadas luego con las establecidas por los matemáticos. Aquellos para quienes la comparación resulte favorable merecen ciertamente la enhorabuena.

Las funciones $f(x) = x^n$ para los distintos números naturales n son, a veces, llamadas **funciones potenciales.** Resulta fácil comparar sus gráficas como en la figura 14, dibujando varias a la vez.

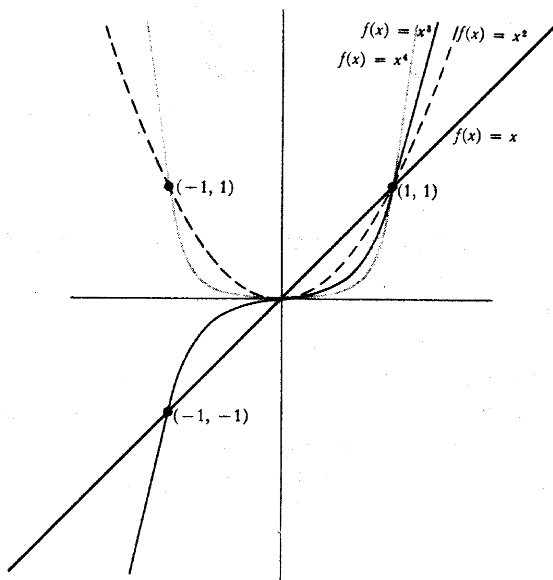


FIGURA 14

Las funciones potenciales son solamente casos especiales de las funciones polinómicas introducidas en el capítulo anterior. En la figura 15 se han trazado dos gráficas, mientras que en la figura 16 se trata de dar una idea general de la función polinómica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

en el caso $a_n > 0$.

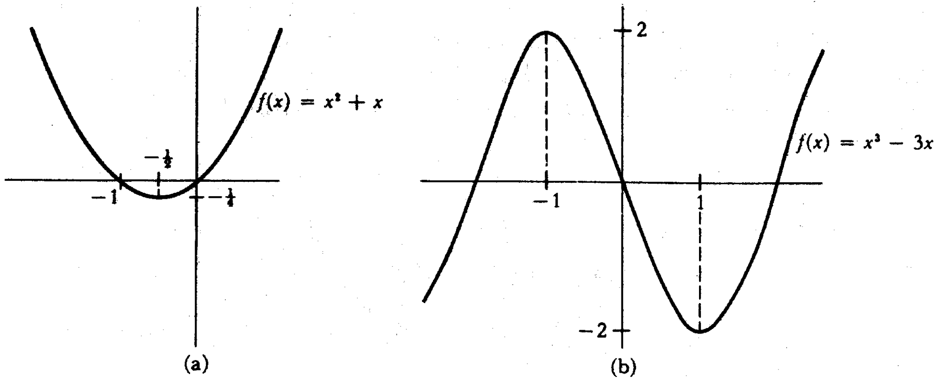


FIGURA 15

En general, la gráfica de f tendrá a lo sumo $n - 1$ «cumbres» o «valles» (una «cumbre» es un punto como el $(x, f(x))$ de la figura 16, mientras que un «valle» es un punto como el $(y, f(y))$. El número de cumbres y valles puede, en realidad,

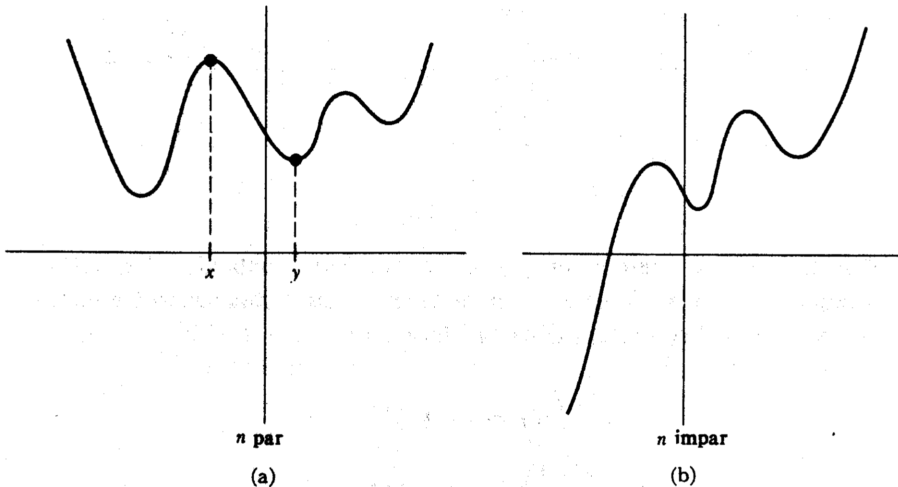


FIGURA 16

ser mucho más pequeño (las funciones potenciales, por ejemplo, tienen a lo sumo un valle). Aunque estas proposiciones se formulan fácilmente, no intentaremos siquiera demostrarlas hasta la parte III (una vez que se disponga de los eficaces métodos de la parte III, las demostraciones serán muy fáciles).

La figura 17 muestra las gráficas de varias funciones racionales. Las funciones racionales exhiben todavía mayor variedad que las funciones polinómicas, pero su comportamiento será también fácil de analizar una vez que se pueda hacer uso de la derivada, el instrumento básico de la parte III.

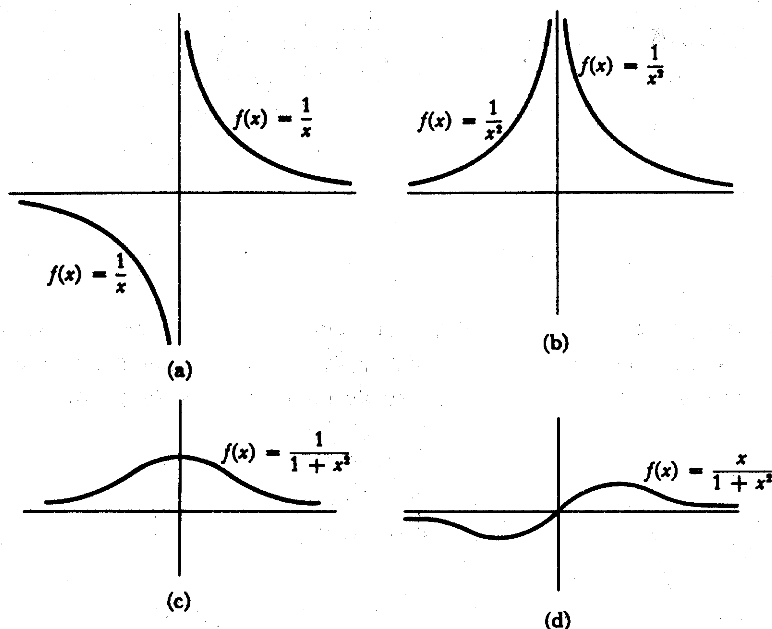


FIGURA 17

Muchas gráficas interesantes pueden construirse «juntando» las gráficas de funciones ya estudiadas. La gráfica de la figura 18 está compuesta totalmente por rectas. La función f con esta gráfica satisface

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^{n+1},$$
$$f\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{n+1},$$
$$f(x) = 1, \qquad |x| \geq 1,$$

y es una función lineal en cada intervalo $[1/(n+1), 1/n]$ y $[-1/n, -1/(n+1)]$. (El número 0 no pertenece al dominio de f.) Se puede escribir, por supuesto, una fórmula explícita para $f(x)$, cuando x está en $[1/(n+1), 1/n]$; éste es un buen

FIGURA 18

ejercicio en el uso de funciones lineales y con él se convencerá el lector que una buena imagen vale más que cien palabras.

En realidad, existe una manera mucho más sencilla de definir una función

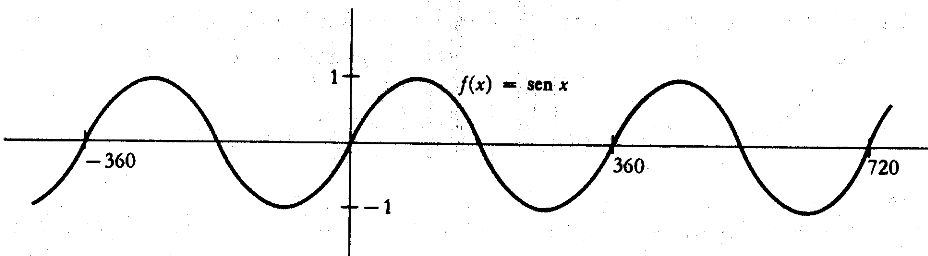


FIGURA 19

con esta misma propiedad de oscilar infinidad de veces en la proximidad de 0, utilizando la función seno. En el capítulo 15 estudiaremos con detalle esta función y en particular la medida en radianes; de momento será más fácil usar medidas en grados para ángulos. La gráfica de la función seno se muestra en la figura 19 (se ha modificado la escala sobre el eje horizontal para que la gráfica quede más clara; además de otras importantes propiedades matemáticas, la medida en radianes tiene la ventaja de que estos cambios de escala son innecesarios).

Consideremos ahora la función $f(x) = \text{sen } 1/x$. La gráfica de f se puede ver en la figura 20. (Para dibujar esta gráfica conviene observar primero que

$$f(x) = 0 \qquad \text{para } x = \frac{1}{180}, \frac{1}{360}, \frac{1}{540}, \dots,$$

$$f(x) = 1 \qquad \text{para } x = \frac{1}{90}, \frac{1}{90 + 360}, \frac{1}{90 + 720}, \dots,$$

$$f(x) = -1 \qquad \text{para } x = \frac{1}{270}, \frac{1}{270 + 360}, \frac{1}{270 + 720}, \dots .)$$

Nótese que cuando x es grande, de modo que $1/x$ es pequeño, $f(x)$ es también pequeño; cuando x es «grande negativo», es decir, cuando $|x|$ es grande con x negativo, de nuevo está $f(x)$ próxima a 0, aunque es $f(x) < 0$.

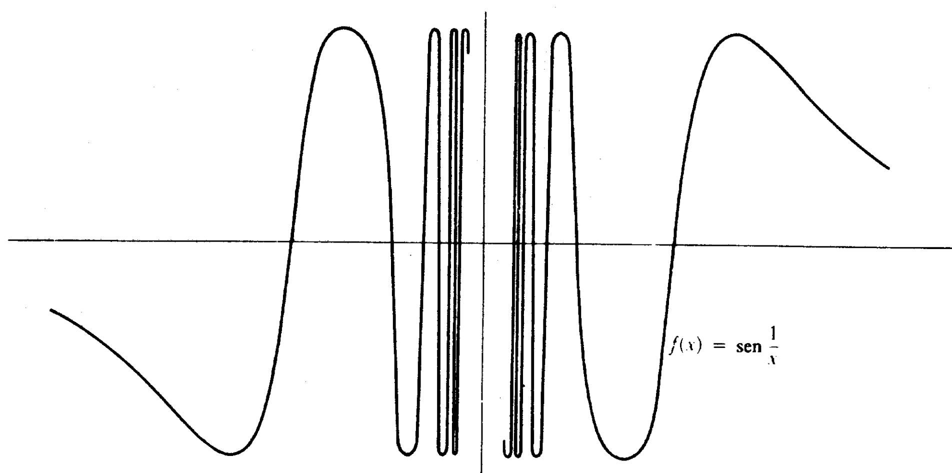


FIGURA 20

Una modificación interesante de esta función es $f(x) = x \text{ sen } 1/x$. La gráfica

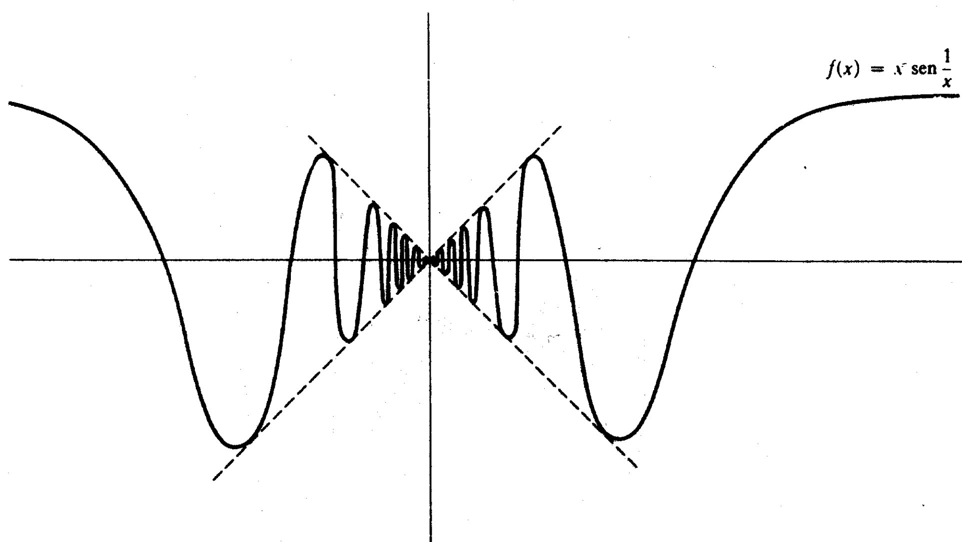


FIGURA 21

de esta función se esboza en la figura 21. Puesto que sen $1/x$ oscila infinidad de veces en la proximidad de 0 entre 1 y —1, la función $f(x) = x$ sen $1/x$ oscila infinidad de veces entre x y $-x$. El comportamiento de la gráfica cuando x es grande o grande negativo es más difícil de analizar. Puesto que sen $1/x$ se va aproximando a 0, mientras que x se va haciendo cada vez más grande parece que no pueda haber manera de poder decir cómo va a ser el producto. Este producto *se podrá* hallar, pero éste es otro asunto que es mejor diferir hasta la parte III. La gráfica de $f(x) = x^2$ sen $1/x$ se ha trazado también (figura 22).

Para estas funciones infinitamente oscilantes no se puede esperar que la gráfica sea realmente «exacta». Lo más que se puede hacer es trazar una parte de ella, dejando la parte próxima a 0 (que es la parte interesante). En realidad es fácil encontrar funciones mucho más sencillas cuya gráfica no puede ser trazada con «exactitud». Las gráficas de

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

solamente se pueden distinguir mediante un convenio parecido al usado para intervalos abiertos y cerrados (figura 23).

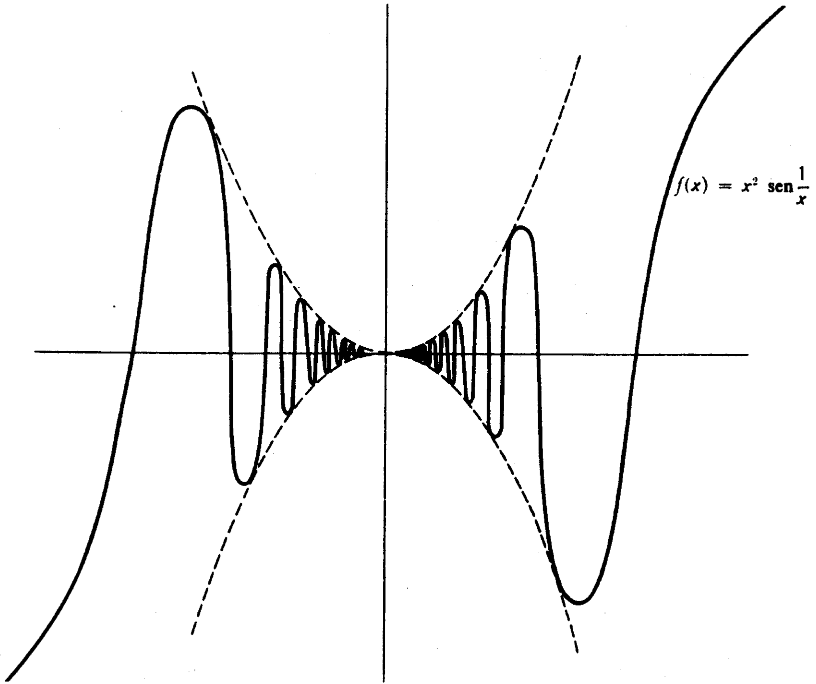


FIGURA 22

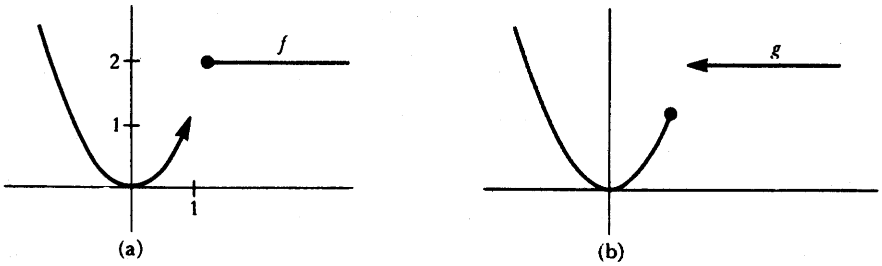


FIGURA 23

Nuestro último ejemplo es una función cuya gráfica no es dibujable y esto de un modo espectacular:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1, & x \text{ racional.} \end{cases}$$

La gráfica de f debe contener infinitos puntos sobre el eje horizontal y también infinitos puntos sobre una recta paralela al eje horizontal, pero no debe contener totalmente ninguna de estas rectas. La figura 24 nos enseña la imagen corriente de esta gráfica en los libros de texto. Para distinguir las dos partes de esta gráfica,

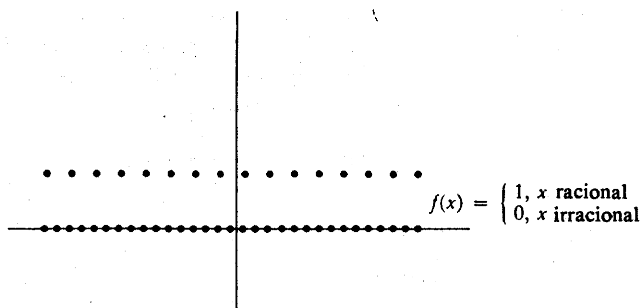


FIGURA 24

los puntos se han puesto más juntos sobre la línea correspondiente a x irracional. (Existe, en realidad, una razón matemática que justifica este convenio, pero está basada en algunas ideas que se introducen en los problemas 20-5 y 20-6.)

Las peculiaridades exhibidas por algunas funciones son tan sugestivas que es fácil olvidar algunos de los más importantes y más sencillos subconjuntos del plano que no son gráficas de funciones. El ejemplo más importante entre todos es el del **círculo.** Un círculo de centro (a, b) y radio $r > 0$ contiene, por definición, todos los puntos (x, y) cuya distancia a (a, b) es igual a r. El círculo está formado así (figura 25) por todos los puntos (x, y) con

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

o

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

El círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1, considerado a menudo como una especie de patrón, recibe el nombre de *círculo unidad.*

Un pariente próximo del círculo es la **elipse.** Se define ésta como el conjunto de puntos cuya *suma* de distancias a dos puntos fijos es constante. (Cuando los

dos puntos fijos coinciden, se obtiene el círculo.) Si se toman los puntos fijos

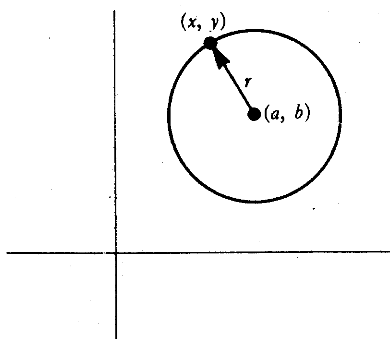


FIGURA 25

como $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ y la suma de distancias se toma como $2a$ (el factor 2 simplifica los cálculos), entonces (x, y) está sobre la elipse si y sólo si

$$\sqrt{(x-(-c))^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

o

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

o

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

o

$$4(cx-a^2)=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

o

$$c^2x^2-2cxa^2+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

o

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

o

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Esto se suele escribir sencillamente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (puesto que es claro que se debe elegir $a > c$, se sigue que $a^2 - c^2 > 0$). En la figura 26 se exhibe la imagen de una elipse. La elipse corta al eje horizontal cuando $y = 0$, de manera que

$$\frac{x^2}{a^2} = 1, \qquad x = \pm a,$$

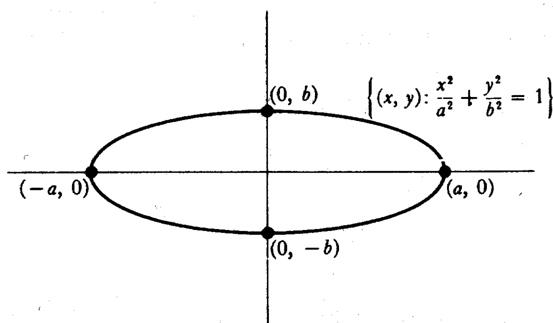


FIGURA 26

y corta al eje vertical cuando $x = 0$, de manera que

$$\frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad y = \pm b.$$

La **hipérbola** se define de manera análoga, sólo que ahora requeriremos que sea constante la *diferencia* de las dos distancias. Eligiendo de nuevo los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ y tomando $2a$ como diferencia constante se obtiene como condición de que (x, y) esté sobre la hipérbola,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

lo que, simplificando, da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Sin embargo, en este caso se debe elegir $c > a$, de manera que $a^2 - c^2 < 0$. Si $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, entonces (x, y) está sobre la hipérbola si y sólo si

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La imagen se puede ver en la figura 27. Contiene dos tramos, porque la diferencia entre las distancias de (x, y) a $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ puede tomarse en dos órdenes distintos. La hipérbola corta al eje horizontal cuando $y = 0$, de manera que $x = \pm a$, pero no corta al eje vertical.

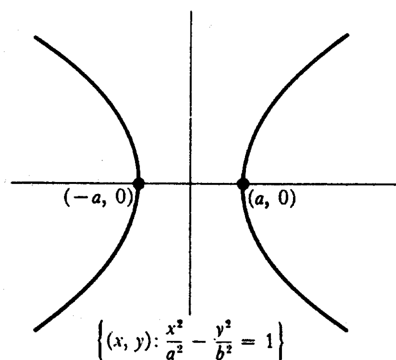


FIGURA 27

Es interesante (figura 28) comparar la hipérbola que tiene $a = b = \sqrt{2}$ con la gráfica de la función $f(x) = 1/x$. Las figuras tienen el mismo aspecto y los dos conjuntos son en realidad idénticos, salvo una rotación de un ángulo de 45° (problema 23).

Es claro que ninguna rotación del plano podrá convertir círculos o elipses en gráficas de funciones. Sin embargo, el estudio de estas importantes figuras geométricas puede reducirse a menudo al estudio de funciones. Las elipses, por ejem-

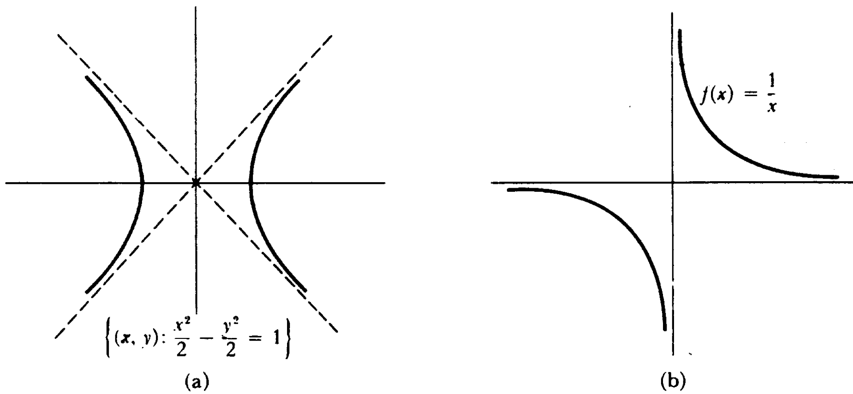


FIGURA 28

plo, están compuestas por las gráficas de dos funciones,

$$f(x) = b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}, \qquad -a \leq x \leq a$$

y

$$g(x) = -b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}, \quad -a \leq x \leq a.$$

Existen, por supuesto, muchos otros pares de funciones con esta misma propiedad. Por ejemplo, se puede tomar

$$f(x) = \begin{cases} b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}, & 0 < x \leq a \\ -b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}, & -a \leq x \leq 0 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} -b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}, & 0 < x \leq a \\ b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}, & -a \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Podríamos también elegir

$$f(x) = \begin{cases} b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}, & x \text{ racional}, \quad -a \leq x \leq a \\ -b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}, & x \text{ irracional}, \quad -a \leq x \leq a \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} -b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}, & x \text{ racional}, \quad -a \leq x \leq a \\ b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}, & x \text{ irracional}, \quad -a \leq x \leq a. \end{cases}$$

Pero todos estos otros pares necesariamente encierran funciones raras que van dando saltos. Una demostración e incluso una formulación precisa de este hecho resultaría por el momento demasiado difícil. Aunque el lector haya, probablemente, empezado ya a distinguir las funciones con gráficas regulares de las que tienen gráficas irregulares, resulta muy difícil establecer una definición regular de función regular.* No es nada fácil dar una definición matemática de este concepto y una gran parte de este libro puede interpretarse como una serie de intentos progresivos de establecer las condiciones que debe satisfacer una función regular. A medida que vayamos definiendo estas condiciones nos preocuparemos de comprobar si hemos conseguido realmente seleccionar aquellas funciones que merecen el nombre de «regulares». La respuesta será, por desgracia, siempre «no» o, en el mejor de los casos, un «sí» condicionado.

PROBLEMAS

1. Indíquese sobre una recta el conjunto de todas las x que satisfacen las siguientes condiciones. Dar también un nombre a cada conjunto, utilizando la notación para los intervalos (en algunos casos será necesario también el signo $\cup$).

(i) $|x - 3| < 1$.
(ii) $|x - 3| \leq 1$.
(iii) $|x - a| < \varepsilon$.
(iv) $|x^2 - 1| < \frac{1}{2}$.
(v) $\dfrac{1}{1 + x^2} \geq \frac{1}{5}$.
(vi) $\dfrac{1}{1 + x^2} \leq a$ (respóndase en términos de a, distinguiendo varios casos).

* Hemos intentado reflejar el juego de palabras del autor. En la versión original la palabra que se repite es «reasonable»: razonable. (Nota del traductor.)

(vii) $x^2 + 1 \geq 2$.
(viii) $(x + 1)(x - 1)(x - 2) > 0$.

2. Existe un procedimiento muy útil para describir los puntos del intervalo cerrado $[a, b]$(suponiendo como siempre que es $a < b$).

(a) Consideremos en primer lugar el intervalo $[0, b]$, para $b > 0$. Demostrar que si x está en $[0, b]$, entonces $x = tb$ para un cierto t con $0 \leq t \leq 1$. ¿Cómo se puede interpretar el número t? ¿Cuál es el punto medio del intervalo $[0, b]$?

(b) Demostrar ahora que si x está en $[a, b]$, entonces $x = (1 - t)a + tb$ para un cierto t con $0 \leq t \leq 1$. Ayuda: Esta expresión se puede poner también en la forma $a + t(b - a)$. ¿Cuál es el punto medio del intervalo $[a, b]$? ¿Cuál es el punto que está a 1/3 de camino de a a b?

(c) Demostrar a la inversa que si $0 \leq t \leq 1$, entonces $x = (1 - t)a + tb$ está en $[a, b]$.

(d) Los puntos del intervalo *abierto* (a, b) son los de la forma $(1 - t)a + tb$ para $0 < t < 1$.

3. Dibujar el conjunto de todos los puntos (x, y) que satisface las siguientes condiciones. (En la mayor parte de los casos la imagen será una parte apreciable del plano y no simplemente una recta o una curva.)

(i) $x > y$.
(ii) $x + a > y + b$.
(iii) $y < x^2$.
(iv) $y \leq x^2$.
(v) $|x - y| < 1$.
(vi) $|x + y| < 1$.
(vii) $x + y$ es un entero.
(viii) $\dfrac{1}{x + y}$ es un entero.
(ix) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 < 1$.
(x) $x^2 < y < x^4$.

4. Dibujar el conjunto de los puntos (x, y) que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $|x| + |y| = 1.$
(ii) $|x| - |y| = 1.$
(iii) $|x - 1| = |y - 1|.$
(iv) $|1 - x| = |y - 1|.$
(v) $x^2 + y^2 = 0.$
(vi) $xy = 0.$
(vii) $x^2 - 2x + y^2 = 4.$
(viii) $x^2 = y^2.$

5. Dibujar el conjunto de los puntos (x, y) que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $x = y^2.$

(ii) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$

(iii) $x = |y|.$

(iv) $x = \operatorname{sen} y.$

Indicación: Si se intercambian entre sí x e y, las soluciones son ya conocidas.

6. (a) Demostrar que la recta que pasa por (a, b) y de pendiente m es la gráfica de la función $f(x) = m(x - a) + b$. Esta fórmula, conocida como «forma punto-pendiente», es mucho más conveniente que la expresión equivalente $f(x) = mx + (b - ma)$; con la forma punto-pendiente queda inmediatamente claro que la pendiente es m y que el valor de f en a es b.

(b) Para $a \neq c$, demostrar que la recta que pasa por (a, b) y (c, d) es la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{d - b}{c - a}(x - a) + b.$$

(c) ¿Cuáles son las condiciones para que las gráficas de $f(x) = mx + b$ y $g(x) = m'x + b'$ sean rectas paralelas?

7. (a) Si A, B y C, siendo A y B distintos de 0, son números cualesquiera, demostrar que el conjunto de todos los (x, y) que satisfacen $Ax+By+C = 0$ es una recta (que puede ser vertical). Indicación: Aclarar primero cuándo se tiene una recta vertical.

(b) Demostrar a la inversa que toda recta, incluyendo las verticales, puede ser descrita como el conjunto de todos los (x, y) que satisfacen $Ax + By + C = 0$.

8. (a) Demostrar que las gráficas de las funciones

$$f(x) = mx + b,$$
$$g(x) = nx + c,$$

son perpendiculares si $mn = -1$, calculando los cuadrados de las longitudes de los lados del triángulo de la figura 29. (¿Por qué no se restringe la generalidad al considerar este caso especial en que las rectas se cortan en el origen?)

(b) Demostrar que las dos rectas que consisten en todos los puntos (x, y) que satisfacen las condiciones

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$

son perpendiculares si y sólo si $AA' + BB' = 0$.

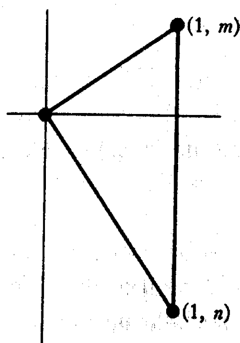


FIGURA 29

9. (a) Utilizando el problema 1-19, demostrar que

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

(b) Demostrar que

$$\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \leq \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}.$$

Interpretar esta desigualdad geométrica (llamada «desigualdad triangular»). ¿En qué casos se satisface la igualdad?

10. Esbozar las gráficas de las siguientes funciones, trazando un número de puntos suficiente para obtener una buena idea del aspecto general. (Una parte del problema consiste en hacer una estimación acerca de cuántos puntos serían «suficientes»; las preguntas que se plantean tienen por objeto hacer ver que vale más discurrir un poco que trazar centenares de puntos.)

(i) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}\cdot$ (¿Qué ocurre cuando x está próximo a 0 y cuando x es grande? ¿Qué posición ocupa la gráfica en relación con la gráfica de la función identidad? ¿Por qué es suficiente considerar primero sólo x positivos?)

(ii) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}\cdot$

(iii) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}\cdot$

(iv) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}\cdot$

11. Describir los rasgos generales de la gráfica de f si
(i) f es par.
(ii) f es impar.
(iii) f es no negativa.
(iv) $f(x) = f(x + a)$ para todo x (las funciones que tienen esta propiedad reciben el nombre de **periódicas**, con **período** a).

12. Trazar las funciones $f(x) = \sqrt[m]{x}$ para $m = 1, 2, 3, 4$. (Hay una manera fácil de hacer esto, utilizando la figura 14. Recuérdese, sin embargo, que $\sqrt[m]{x}$ significa la raíz m-ésima *positiva* de x cuando m es par; se debe también tener presente que existirá una diferencia notable entre las gráficas cuando m es par y cuando m es impar.)

13. (a) Trazar $f(x) = |x|$ y $f(x) = x^2$.
(b) Trazar $f(x) = |\text{sen } x|$ y $f(x) = \text{sen}^2\, x$. (Existe una diferencia importante entre las gráficas, diferencia que todavía no podemos ni siquiera describir con rigor. Inténtese descubrir en qué consiste; la parte (a) está destinada a servir de orientación).

14. Describir la gráfica de g en función de la gráfica de f si

(i) $g(x) = f(x) + c$.
(ii) $g(x) = f(x + c)$. (Aquí es fácil equivocarse.)
(iii) $g(x) = cf(x)$. (Distinguir los casos $c = 0$, $c > 0$, $c < 0$.)
(iv) $g(x) = f(cx)$.
(v) $g(x) = f(1/x)$.
(vi) $g(x) = f(|x|)$.
(vii) $g(x) = |f(x)|$.
(viii) $g(x) = \max(f, 0)$.
(ix) $g(x) = \min(f, 0)$.
(x) $g(x) = \max(f, 1)$.

15. Trazar la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Indicación: utilizar los métodos del problema 1-18.

16. Supóngase que A y C no son cero a la vez. Demostrar que el conjunto de todos los (x, y) que satisfacen

$$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0$$

es o bien una parábola, una elipse o una hipérbola (o posiblemente $\emptyset$). El caso $C = 0$ es en esencia el problema 15, y el caso $A = 0$ no es más que una variante. Considerar por separado los casos en que A y B son a la vez positivos o negativos y en que uno de ellos es positivo y el otro negativo.

17. Por $[x]$ se designa el mayor entero que es $\leq x$. Así, $[2{,}1] = [2] = 2$ y $[-0{,}9] = [-1{,}2] = -1$. Dibujar la gráfica de las funciones siguientes (todas ellas son muy interesantes, y algunas volverán a aparecer con frecuencia en otros problemas).

(i) $f(x) = [x]$.
(ii) $f(x) = x - [x]$.
(iii) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$.
(iv) $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$.
(v) $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$.
(vi) $f(x) = \dfrac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}$.

18. Trazar la gráfica de las funciones siguientes:

(i) $f(x) = \{x\}$, donde $\{x\}$ es la distancia de x al entero más próximo.
(ii) $f(x) = \{2x\}$.
(iii) $f(x) = \{x\} + \frac{1}{2}\{2x\}$.
(iv) $f(x) = \{4x\}$.
(v) $f(x) = \{x\} + \frac{1}{2}\{2x\} + \frac{1}{4}\{4x\}$.

Muchas funciones pueden describirse en función del desarrollo decimal de un número. Aunque no estaremos en condiciones de describir rigurosamente decimales infinitos hasta el capítulo 22, nuestra noción intuitiva de decimales infinitos debe ser suficiente para que podamos atacar el problema siguiente y otros que se ofrecerán antes del capítulo 22. En relación con los decimales infinitos existe una ambigüedad que debe ser eliminada: Todo decimal que termine en una sucesión infinita de nueves es igual a otro que termina en una sucesión infinita de ceros (por ejemplo, 1,23999... = 1,24000...). Nosotros utilizaremos siempre el que termina en una sucesión de nueves.

***19.** Describir lo mejor que se pueda las gráficas de las funciones siguientes (una descripción completa es, por lo general, imposible).

(i) $f(x) =$ el primer número del desarrollo decimal de x.
(ii) $f(x) =$ el segundo número del desarrollo decimal de x.
(iii) $f(x) =$ el número de sietes del desarrollo decimal de x si este número es finito, y 0 en el caso contrario.
(iv) $f(x) = 0$ si el número de sietes del desarrollo decimal de x es finito y 1 en el caso contrario.
(v) $f(x) =$ el número obtenido sustituyendo todas las cifras del desarrollo decimal de x que vienen después del primer 7 (si las hay) por 0.
(vi) $f(x) = 0$ si 1 no aparece en el desarrollo decimal de x, y n si 1 aparece por primera vez en el n-ésimo lugar.

***20.** Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q} \text{ racional en forma irreducible.} \end{cases}$$

(Un número p/q es **irreducible** si p y q son enteros sin divisores comunes, y $q > 0$.) Dibujar la gráfica de f tan bien como se sepa (no desparramar puntos al azar sobre el papel; considérese en primer lugar los números racionales con $q = 2$ y después aquéllos con $q = 3$, etc.).

21. (a) Los puntos de la gráfica de $f(x) = x^2$ son los de la forma (x, x^2). Demostrar que cada uno de tales puntos equidista del punto $(0, \frac{1}{4})$ y de la gráfica de $g(x) = -\frac{1}{4}$. (Véase la figura 30.)

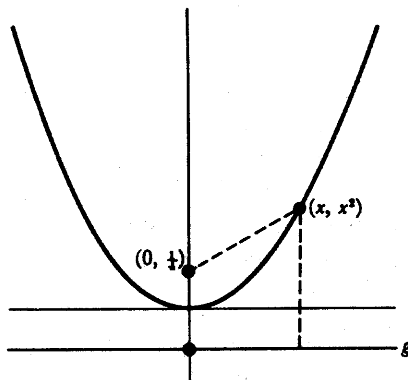


FIGURA 30

(b) Dado un punto $P = (\alpha, \beta)$ y una recta horizontal L, gráfica de la función $g(x) = \gamma$, demostrar que el conjunto de todos los puntos (x, y) que equidistan de P y L es la gráfica de una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

***22.** (a) Demostrar que el cuadrado de la distancia de (c, d) a (x, mx) es

$$x^2(m^2 + 1) + x(-2md - 2c) + d^2 + c^2.$$

Utilizando el problema 1-18 para encontrar el mínimo de estos números demostrar que la distancia de (c, d) a la gráfica $f(x) = mx$ es

$$|cm - d|/\sqrt{m^2 + 1}.$$

(b) Hallar la distancia de (c, d) a la gráfica de $f(x) = x + b$. Reducir este caso a la parte (a).

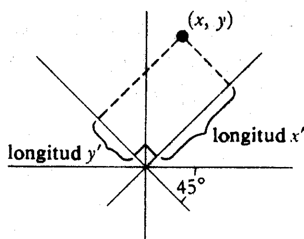


FIGURA 31

***23.** (a) Utilizando el problema 22, demostrar que los números x' e y' indicados en la figura 31 vienen dados por

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y,$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y.$$

(b) Demostrar que el conjunto de todos los (x, y) con $(x'/\sqrt{2})^2 - (y'/\sqrt{2})^2 = 1$ es lo mismo que el conjunto de todos los (x, y) con $xy = 1$.

APÉNDICE. COORDENADAS POLARES

Hemos actuado en todo este capítulo como si existiera una única manera de identificar puntos del plano mediante pares de números. Existen en realidad muchas maneras distintas cada una de las cuales da lugar a un «sistema de coordenadas distinto». Las coordenadas usuales de un punto reciben el nombre de coordenadas cartesianas, por el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650) que fue quien primero introdujo el concepto de sistemas de coordenadas. En muchas situaciones resulta más conveniente introducir coordenadas polares, como se muestra en la figura 1. Se asigna al punto P las coordenadas (r, θ) siendo r la distancia de P al origen 0 y θ el ángulo formado por el eje horizontal y la recta que va de 0 a P. Este ángulo se puede medir ya sea en grados o radianes (capítulo 15), pero en cualquier caso θ no queda determinado sin ambigüedad. Por ejemplo, si se mide en grados, los puntos situados sobre la parte derecha del eje horizontal pueden tener $\theta = 0$ o $\theta = 360$; además θ es totalmente ambiguo en el origen 0. Así pues, si se quiere que cada punto que se considere le corresponda un par único (r, θ) hará falta excluir alguno de los rayos que pasan por el origen.

Por otra parte, no existe problema alguno en hacer corresponder un punto único a todo punto (r, θ). Podemos efectivamente hacer corresponder un punto a (r, θ) incluso cuando es $r < 0$, de acuerdo con el esquema de la figura 2. Tiene pues sentido hablar de «las coordenadas polares» de un punto dado.

FIGURA 1

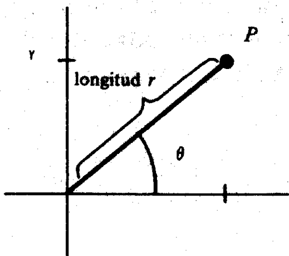
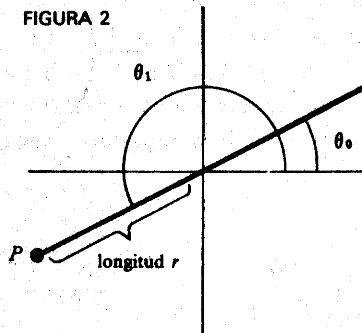


FIGURA 2



P es el punto de coordenadas polares (r, θ_1) y también el punto de coordenadas polares $(-r, \theta_0)$

Con la figura 1 (y la figura 2) queda claro que el punto de coordenadas (r, θ) tiene las coordenadas cartesianas (x, y) dadas por

$$x = r \cos \theta, \qquad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

Recíprocamente, si un punto tiene las coordenadas (x, y), entonces sus coordenadas polares (r, θ) (cualesquiera de ellas) satisfacen

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \qquad \text{si } x \neq 0.$$

Supongamos ahora que f es una función. Entendemos por **gráfica de f en coordenadas polares** al conjunto de todos los puntos P cuyas coordenadas polares (r, θ) satisfacen la ecuación $r = f(\theta)$. Dicho de otro modo, la gráfica de f en coordenadas polares es el conjunto de todos los puntos de coordenadas polares $(f(\theta), \theta)$. No hay que atribuir ningún significado especial al hecho de que se consideren pares $(f(\theta), \theta)$ con $f(\theta)$ en primer lugar en contraposición a los pares $(x, f(x))$ de la gráfica habitual de f; es puramente convencional tomar r como primera y θ como segunda coordenada polar.

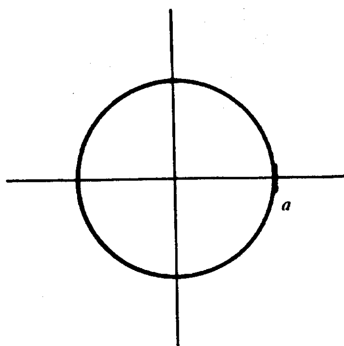


FIGURA 3

De la gráfica de f en coordenadas polares se dice a veces que es «la gráfica de la ecuación $r = f(\theta)$». Supóngase por ejemplo que f es una función constante, $f(\theta) = a$ para todo θ. La gráfica de la ecuación $r = a$ es sencillamente una circunferencia de centro 0 y radio a (figura 3). Este ejemplo hace ver ostensiblemente que las coordenadas polares simplifican mucho las cosas cuando existe algún tipo de simetría respecto al origen 0.

La gráfica de la ecuación $r = \theta$ es la que se muestra en la figura 4. La línea continua corresponde a todos los valores de $\theta \geq 0$, mientras que la línea de trazos corresponde a los valores $\theta \leq 0$.

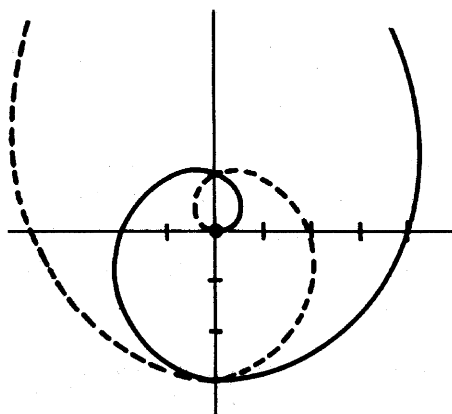


FIGURA 4

Consideremos finalmente la gráfica de la ecuación $r = \cos\theta$. La figura 5(a) muestra la parte que corresponde a $0 \leq \theta \leq 90$ [con θ en grados]. La figura 5(b) muestra la parte que corresponde a $90 \leq \theta \leq 180$; aquí es $r < 0$. Se puede comprobar que no se añade ningún punto para $\theta > 180$ ó $\theta < 0$. Resulta fácil describir esta misma gráfica en función de las coordenadas cartesianas de sus puntos. Puesto que las coordenadas polares de un punto cualquiera de la gráfica satisfacen

$$r = \cos\theta,$$

y por lo tanto

$$r^2 = r\cos\theta,$$

sus coordenadas cartesianas satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = x$$

la cual describe una circunferencia (problema 3-16). [Recíprocamente, está claro que si las coordenadas cartesianas de un punto satisfacen $x^2 + y^2 = x$, este punto se halla sobre la gráfica de la ecuación $r = \cos\theta$.]

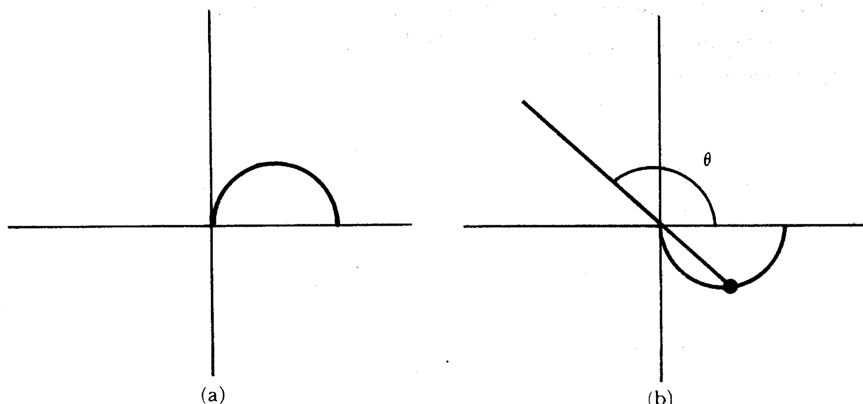


FIGURA 5

PROBLEMAS

1. Demostrar que si dos puntos tienen por coordenadas polares (r_1, θ_1), (r_2, θ_2), la distancia d entre ellos viene dada por

$$d^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2).$$

¿Qué significa esto en términos geométricos?

2. Describir los rasgos generales de la gráfica de f en coordenadas polares cuando

   (i) f es par
   (ii) f es impar
   (iii) $f(\theta) = f(\theta + 180)$, viniendo θ medido en grados

3. Esbozar las gráficas de las ecuaciones siguientes

   (i) $r = a \operatorname{sen} \theta$.
   (ii) $r = a \sec \theta$. Ayuda: Se trata de una gráfica muy sencilla
   (iii) $r = \cos 2\theta$. Ojo con esta. ¡Que haya suerte!
   (iv) $r = \cos 3\theta$.
   (v) $r = |\cos 2\theta|$.
   (vi) $r = |\cos 3\theta|$.

4. Hallar las ecuaciones de los puntos de las gráficas (i), (ii) y (iii) del problema 3 en coordenadas cartesianas.

5. (a) Esbozar la gráfica de la *cardioide* $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$.
   (b) Demostrar que es también la gráfica de $r = -1 - \operatorname{sen} \theta$.

(c) Demostrar que se puede describir mediante la ecuación

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - y,$$

y concluir que se puede describir mediante la ecuación

$$(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2.$$

6. Esbozar las gráficas de las ecuaciones siguientes.

(i) $r = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta$.
(ii) $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$.
(iii) $r = 2 + \cos \theta$.

7. (a) Esbozar la gráfica de la *lemniscata*.

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

(b) Hallar una ecuación de la misma en coordenadas cartesianas.

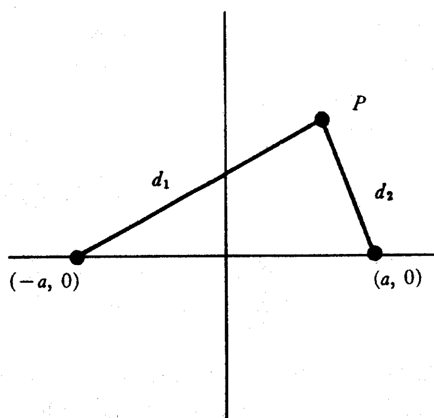


FIGURA 6

(c) Demostrar que se trata del conjunto de todos los puntos P de la figura 6 que satisfacen $d_1 d_2 = a^2$.

(d) Pensar que forma van a tener las curvas constituídas por el conjunto de todos los puntos P que satisfacen $d_1 d_2 = b$, cuando es $b > a^2$ y cuando es $b < a^2$.

CAPÍTULO

5

LÍMITES

Entre todos los conceptos que se presentan en el cálculo infinitesimal, el de límite es, a no dudarlo, el más importante, y quizás también el más difícil. El objeto de este capítulo es dar la definición de límite, pero una vez más vamos a empezar con una definición provisional; lo que vamos a definir no es la palabra «límite», sino la noción de función que tiende hacia un límite.

DEFINICIÓN PROVISIONAL

La función f tiende hacia el límite l cerca de a, si se puede hacer que $f(x)$ esté tan cerca como queramos de l haciendo que x esté suficientemente cerca de a, pero siendo distinto de a.

De las seis funciones dibujadas en la figura 1, solamente las tres primeras tienden hacia l en a. Nótese que aunque no se haya definido $g(a)$ y $h(a)$ esté definido «de mala manera», se sigue cumpliendo que g y h tienden hacia l cerca de a. Eso se debe a que nosotros hemos excluido explícitamente de nuestra definición la necesidad de siquiera tener en cuenta el valor de la función en a; solamente hace falta que $f(x)$ esté próximo a l cuando x está próximo a a pero es *distinto de a*. Sencillamente no nos interesa el valor de $f(a)$ ni siquiera la cuestión de si $f(a)$ está definido.

Una manera conveniente de representar el aserto de que f tiende hacia l cerca de a, la da un método de dibujar funciones que no se mencionó en el capítulo 4. En este método dibujamos dos rectas, cada una de ellas representando **R**, y flechas

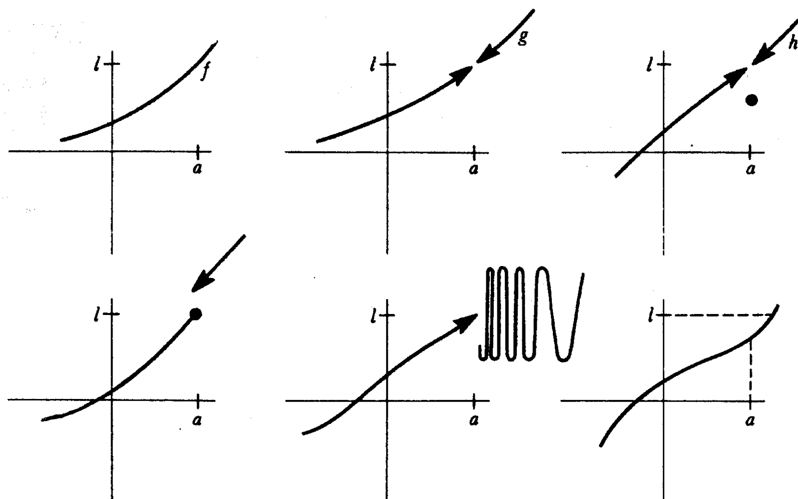
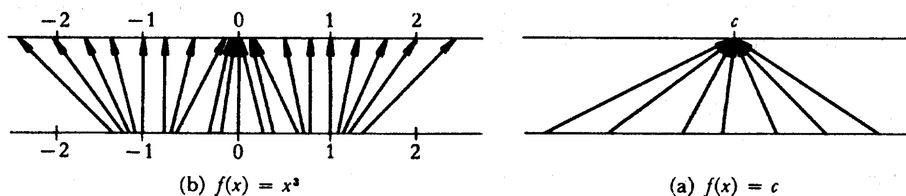


FIGURA 1

que van desde un punto x de una al $f(x)$ de la otra. En la figura 2 se hace ver esta representación para dos funciones diferentes.



(b) $f(x) = x^3$ (a) $f(x) = c$

FIGURA 2

Considérese ahora la función f cuya representación tiene el aspecto de la figura 3. Supongamos que se exige que $f(x)$ esté próxima a l, pongamos dentro del intervalo abierto B dibujado en la figura 3. Esto puede garantizarse si se consideran solamente los números x del intervalo A de la figura 3. (En este diagrama

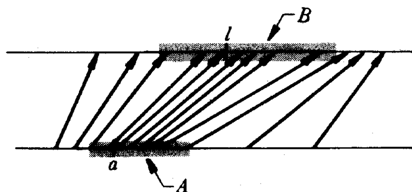


FIGURA 3

hemos elegido el intervalo mayor entre todos los que cumplen lo dicho; cualquier intervalo más pequeño conteniendo a a hubiese valido.) Si elegimos un intervalo B' más pequeño (figura 4), por lo general nos hará falta elegir un A' más pequeño, pero por pequeño que elijamos al intervalo B, tendrá que haber siempre algún intervalo abierto A que vaya bien.

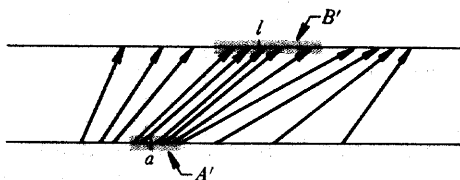


FIGURA 4

Es posible una interpretación gráfica parecida utilizando la gráfica de f, pero en este caso el intervalo B debe dibujarse sobre el eje vertical, y el conjunto A sobre el eje horizontal. El hecho de que $f(x)$ esté en B cuando x está en A significa que la parte de la gráfica que queda por encima de A está contenida en la región limitada por las rectas horizontales que pasan por los extremos de B; compárese la figura 5(a), donde se ha elegido un intervalo A válido, con la figura 5(b) en la que A es demasiado grande.

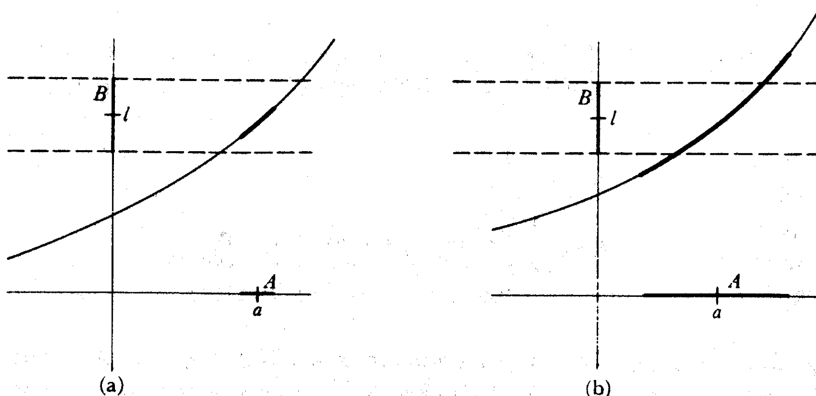


FIGURA 5

Para aplicar nuestra definición a una función particular consideremos $f(x) = x$ sen $1/x$ (figura 6). A pesar del comportamiento errático de esta función en la

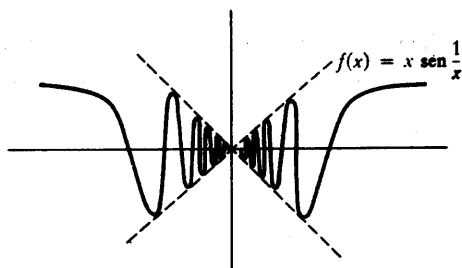


FIGURA 6

proximidad de 0, está claro, por lo menos intuitivamente, que f tiende hacia 0 cerca de 0, y ciertamente se debe esperar de nuestra definición que permita llegar a la misma conclusión. En el caso que estamos considerando, tanto a como l de la definición son 0, de modo que debemos preguntar si es posible hacer $f(x) = x$ sen $1/x$ tan próximo a 0 como se quiera haciendo que x esté suficientemente cerca de 0, pero siendo $\neq 0$. Para fijar las ideas supongamos que x sen $1/x$ esté a menos de $\frac{1}{10}$ de 0. Esto quiere decir que queremos que sea

$$-\frac{1}{10} < x \operatorname{sen}\frac{1}{x} < \frac{1}{10},$$

o, más sucintamente, $|x \operatorname{sen} 1/x| < \frac{1}{10}$. Ahora bien, esto es fácil. Puesto que

$$\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq 1, \text{ para todo } x \neq 0,$$

se tiene

$$\left|x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq |x|, \text{ para todo } x \neq 0.$$

Esto significa que si $|x| < \frac{1}{10}$ y $x \neq 0$ entonces $|x \operatorname{sen} 1/x| < \frac{1}{10}$; en otros términos, x sen $1/x$ está a menos de $\frac{1}{10}$ de 0 siempre que x esté a menos de $\frac{1}{10}$ de 0, pero siendo $\neq 0$. No hay nada de especial en el número $\frac{1}{10}$; es igualmente fácil garantizar que $|f(x) - 0| < \frac{1}{100}$; hágase simplemente que $|x| < \frac{1}{100}$, pero $x \neq 0$. De hecho si tomamos cualquier número positivo ε podemos hacer $|f(x) - 0| < \varepsilon$, haciendo simplemente que $|x| < \varepsilon$ y $x \neq 0$.

Para la función $f(x) = x^2$ sen $1/x$ (figura 7) parece todavía más claro que f tiende hacia 0 cerca de 0. Si, por ejemplo, queremos que

$$\left| x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{10},$$

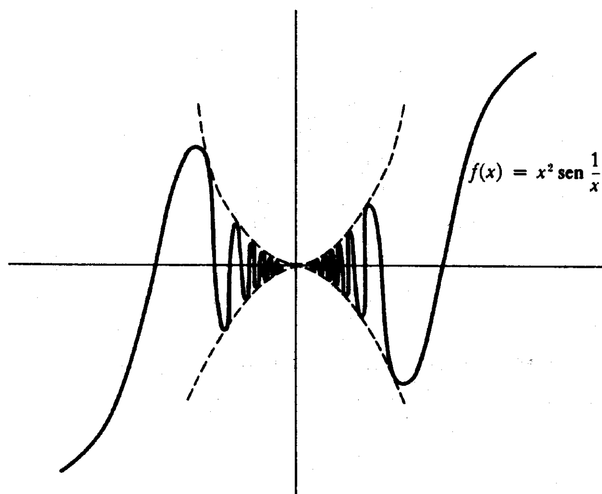


FIGURA 7

entonces nos hará falta ciertamente hacer sólo que $|x| < \frac{1}{10}$ y $x \neq 0$, puesto que esto implica que $|x^2| < \frac{1}{100}$ y, en consecuencia,

$$\left| x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x^2| < \frac{1}{100} < \frac{1}{10}.$$

(Lo podríamos hacer todavía mejor poniendo $|x| < 1/\sqrt{10}$ y $x \neq 0$, pero no hay ninguna ventaja particular en ser tan económicos.) En general, si $\varepsilon > 0$, para asegurar que

$$\left| x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| < \varepsilon,$$

se necesita hacer sólo

$$|x| < \varepsilon \quad \text{y} \quad x \neq 0,$$

siempre que $\varepsilon \leq 1$. Si se nos da un ε mayor que 1 (esto podría ser, aunque son los ε «pequeños» los que son de interés), entonces no basta con hacer que sea $|x| < \varepsilon$, pero ciertamente basta hacer que sea $|x| < 1$ y $x \neq 0$.

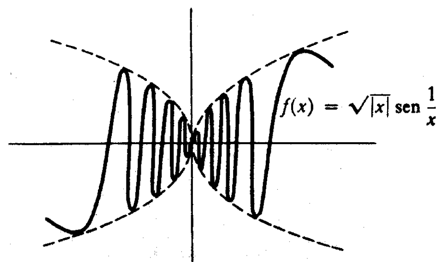


FIGURA 8

Como tercer ejemplo considérese la función $f(x) = \sqrt{|x|}$ sen $1/x$ (figura 8). Para hacer que sea $|\sqrt{|x|}$ sen $1/x| < \varepsilon$ podemos hacer que

$$|x| < \varepsilon^2 \quad \text{y} \quad x \neq 0,$$

(los cálculos se dejan al lector).

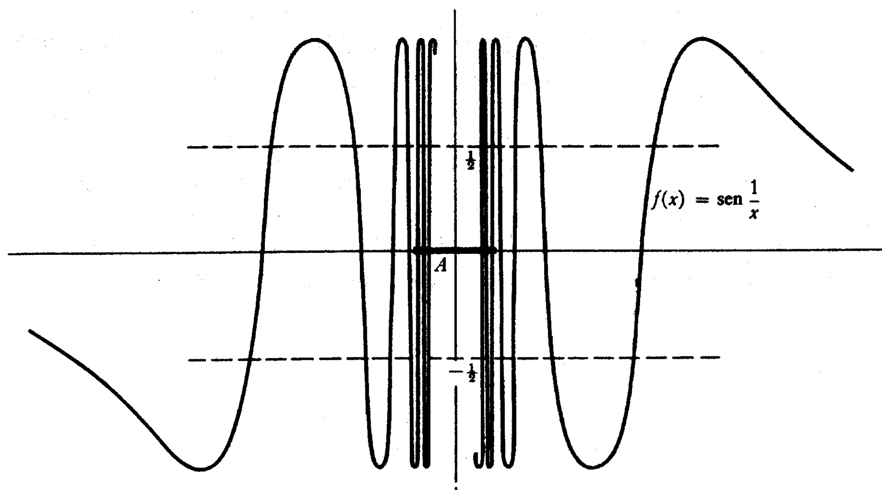


FIGURA 9

Consideremos finalmente la función $f(x) = \text{sen } 1/x$ (figura 9). Para esta función es *falso* que f tiende hacia 0 cerca de 0. Esto equivale a decir que no es verdad para todo número $\varepsilon > 0$ que se pueda hacer $|f(x) - 0| < \varepsilon$ eligiendo x suficientemente pequeño y $\neq 0$. Para demostrar esto nos basta con encontrar *un* $\varepsilon > 0$ para el cual no se pueda garantizar la condición $|f(x) - 0| < \varepsilon$, por pequeño que se haga $|x|$. De hecho $\varepsilon = \frac{1}{2}$ cumplirá lo dicho: es imposible asegurar que sea $|f(x)| < \frac{1}{2}$ por pequeño que sea $|x|$; pues si A es un intervalo cualquiera que contiene 0, existe algún número $x = 1/(90 + 360n)$ que está en este intervalo, y para este x es $f(x) = 1$.

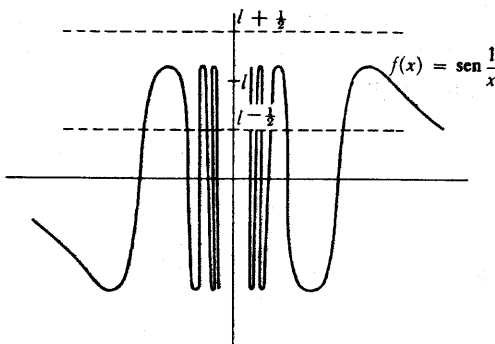


FIGURA 10

La misma argumentación puede utilizarse (figura 10) para demostrar que f no se aproxima a *ningún* número cerca de 0. Para demostrar esto debemos encontrar, cualquiera que sea el número particular l, algún número $\varepsilon > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ *no* se cumpla por pequeño que se haga x. Esto se verifica para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, cualquiera que sea l; es decir, por pequeño que se haga $|x|$, no se puede asegurar que sea $|f(x) - l| < \frac{1}{2}$. La razón es que, para cualquier intervalo A que contenga 0 existe algún $x_1 = 1/(90 + 360n)$ en este intervalo, de tal modo que

$$f(x_1) = 1,$$

y también algún $x_2 = 1/(270 + 360m)$ en este intervalo, tal que

$$f(x_2) = -1.$$

Pero el intervalo de $l - \frac{1}{2}$ a $l + \frac{1}{2}$ no puede contener a la vez -1 y 1, puesto que su longitud total es solamente 1, así no se puede tener al mismo tiempo

$$|1 - l| < \tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad |-1 - l| < \tfrac{1}{2},$$

sea l el que sea.

El fenómeno planteado por $f(x) = \text{sen } 1/x$ cerca de 0 puede presentarse de muchas maneras. Si consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1, & x \text{ racional,} \end{cases}$$

entonces, cualquiera que sea a, f no tiende cerca de a hacia ningún número l. En efecto, no es posible hacer $|f(x) - l| < \frac{1}{4}$ por mucho que se aproxime x a a, porque en cualquier intervalo alrededor de a existen números x con $f(x) = 0$, y también números x con $f(x) = 1$, de modo que deberíamos tener al mismo tiempo $|0 - l| < \frac{1}{4}$ y $|1 - l| < \frac{1}{4}$.

Una variedad curiosa de este comportamiento lo presenta la función de la figura 11.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional.} \end{cases}$$

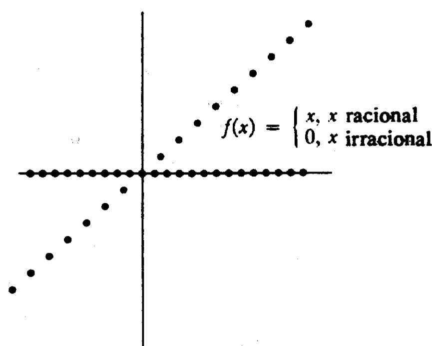


FIGURA 11

El comportamiento de esta función es «opuesto» al de $g(x) = \text{sen } 1/x$; tiende hacia 0 en 0, pero no se aproxima a ningún número en a si $a \neq 0$. Ahora ya el lector no debería encontrar dificultad en convencerse de que esto es así.

Como contraste con las funciones consideradas hasta ahora, que han sido del todo patológicas, vamos a examinar algunas de las más sencillas.

Si $f(x) = c$, entonces f tiende hacia c cerca de a para todo número a. En efecto, para asegurar que $|f(x) - c| < \varepsilon$ no se necesita en absoluto restringir x a estar cerca de a; la condición se satisface automáticamente (figura 12).

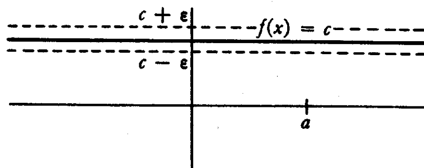


FIGURA 12

Haciendo una ligera variación, sea f la función de la figura 13:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

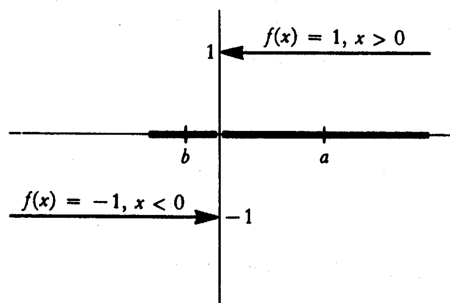


FIGURA 13

Si $a > 0$, entonces f tiende hacia 1 cerca de a; en efecto, para asegurar que $|f(x) - 1| < \varepsilon$ basta ciertamente exigir que $|x - a| < a$, pues esto implica

$$-a < x - a$$

o $$0 < x,$$

de modo que $f(x) = 1$. Análogamente, si $b < 0$, entonces f tiende hacia -1 cerca de b: para asegurar que $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$ basta exigir que $|x - b| < -b$. Finalmente, como puede comprobar el lector, f no tiende cerca de 0 a ningún número.

La función $f(x) = x$ es fácil de tratar. Evidentemente f tiende hacia a cerca de a: para asegurar que $|f(x) - a| < \varepsilon$ nos basta exigir que $|x - a| < \varepsilon$.

La función $f(x) = x^2$ requiere algo más de trabajo. Para hacer ver que f tiende hacia a^2 cerca de a, hace falta ver de qué manera se asegura que

$$|x^2 - a^2| < \varepsilon.$$

El procedimiento más idóneo parece ser la factorización: queremos que sea

$$|x - a| \cdot |x + a| < \varepsilon.$$

La dificultad está evidentemente en el factor $|x + a|$. Por otra parte, no hace falta hacer $|x + a|$ particularmente pequeño; siempre que conozcamos ***alguna*** cota para los valores de $|x + a|$ iremos bien. Por ejemplo, si $|x + a| < 1\,000\,000$, solamente nos hará falta hacer $|x - a| < \varepsilon/1\,000\,000$. Exijamos, pues, para empezar, que sea $|x - a| < 1$ (cualquier otro número positivo distinto de 1 serviría igual); es de esperar que esto obligue a que x no sea demasiado grande y, en consecuencia, a que no sea demasiado grande $|x + a|$. En efecto, por el problema 1-12 se ve que

$$|x| - |a| \leq |x - a| < 1,$$

de modo que

$$|x| < 1 + |a|,$$

y en consecuencia

$$|x + a| \leq |x| + |a| < 2|a| + 1.$$

Sólo hace falta ahora la condición adicional $|x - a| < \varepsilon/(2|a| + 1)$. En otras palabras,

$$\text{si } |x - a| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|a| + 1}\right), \text{ entonces } |x^2 - a^2| < \varepsilon.$$

Naturalmente, para ε pequeño, $\min(1, \varepsilon/(2|a| + 1))$ será igual a $\varepsilon/(2|a| + 1)$.

Precisamente el mismo tipo de artificio hará ver que si $f(x) = x^3$, entonces f tiende hacia a^3 cerca de a. En efecto,

si $|x - a| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{(1 + |a|)^2 + |a|(1 + |a|) + |a|^2}\right)$, entonces $|x^3 - a^3| < \varepsilon$.

La demostración de este aserto hará ver que el complicado denominador procede de lo siguiente: Si $|x - a| < 1$, entonces $|x| < |a| + 1$, en consecuencia,

$$\begin{aligned}|x^2 + ax + a^2| &\leq |x|^2 + |a| \cdot |x| + |a|^2\\ &< (1 + |a|)^2 + |a|(1 + |a|) + |a|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}&|x^3 - a^3| = |x - a| \cdot |x^2 + ax + a^2|\\ &< \frac{\varepsilon}{(1 + |a|)^2 + |a|(1 + |a|) + |a|^2} \cdot [(1 + |a|)^2 + |a|(1 + |a|) + |a|^2]\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Ha llegado el momento de hacer notar que, de las muchas demostraciones que hemos dado acerca de límites, ninguna de ellas ha sido una demostración en el verdadero sentido de la palabra. El defecto está, no en nuestro razonamiento, sino en nuestra definición. Si nuestra definición provisional de función estaba abierta a la crítica, mucho más vulnerable aún es nuestra definición de tender hacia un límite. Sencillamente, esta definición no es suficientemente precisa para poder hacer uso de ella en las demostraciones. No está claro cómo se puede «hacer» $f(x)$ próximo a l (cualquiera que sea el significado de la palabra próximo) «haciendo que» x esté suficientemente próximo a a (por muy próximo que tenga que ser el «suficientemente» próximo). A pesar de las críticas a nuestra definición, el lector pensará (eso espero, ciertamente) que nuestras argumentaciones eran, a pesar de todo, convincentes del todo. Para presentar una argumentación del tipo que fuera, nos hemos visto prácticamente obligados a inventar la verdadera definición. Es posible llegar a esta definición en varias etapas, poniendo en claro en cada una de ellas alguna frase que todavía permanezca oscura. Volvamos, una vez más, sobre nuestra definición provisional:

> La función f tiende hacia el límite l cerca de a, si podemos hacer $f(x)$ tan próximo a l como queramos haciendo que x esté suficientemente próximo a a, pero siendo distinto de a.

El primer cambio que hicimos en esta definición consistió en poner en claro que hacer $f(x)$ próximo a l significa hacer $|f(x) - l|$ pequeño, y lo mismo para x y a:

> La función f tiende hacia el límite l cerca de a, si podemos hacer $|f(x) - l|$ tan pequeño como queramos haciendo $|x - a|$ suficientemente pequeño, pero $x \neq a$.

El segundo cambio, más crucial, consistió en aclarar que hacer $|f(x) - l|$ «tan pequeño como queramos» significa hacer $|f(x) - l| < \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$ que se nos dé:

> La función f tiende hacia el límite l cerca de a, si para todo número $\varepsilon > 0$ podemos hacer $|f(x) - l| < \varepsilon$ haciendo que $|x - a|$ sea suficientemente pequeño y $x \neq a$.

No existe ninguna pauta que sea común a todas las demostraciones dadas acerca de límites. Para cada número $\varepsilon > 0$ hemos encontrado algún otro número positivo, llamémoslo δ, con la propiedad de que si $x \neq a$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Para la función $f(x) = x$ sen $1/x$ (con $a = 0$, $l = 0$) el número δ era precisamente el mismo número ε; para $f(x) = \sqrt{|x|}$ sen $1/x$ era ε^2 si $\varepsilon \leq 1$, y 1 si $\varepsilon > 1$; para $f(x) = x^2$ era el mínimo entre 1 y $\varepsilon/(2|a| + 1)$. En general, puede no estar claro cómo se ha de hallar el número δ una vez dado ε, pero es la condición $|x - a| < \delta$ la que nos expresa la pequeñez de «suficientemente» pequeño:

> La función f tiende hacia el límite l cerca de a, si para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $|x - a| < \delta$ y $x \neq a$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Ésta es, prácticamente, la definición que vamos a adoptar. Haremos solamente un cambio trivial, destacando que «$|x - a| < \delta$ y $x \neq a$» puede expresarse igualmente poniendo «$0 < |x - a| < \delta$».

DEFINICIÓN

> La función f **tiende hacia el límite** l **en** a significa: para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Esta definición es tan importante (*todo* lo que emprendamos a partir de ahora va a depender de ella) que sería vano pasar adelante sin saberla. ¡Apréndala el lector de memoria si es necesario, como si fuese un poema! Esto es, por lo menos, mejor que emplearla incorrectamente; quien haga esto, irremediablemente sacará demostraciones incorrectas. Para ejercitarse en dar demostraciones correctas, sería bueno que el lector repasara las explicaciones demostrativas acerca de funciones que tienden a límites y diera demostraciones auténticas de cada una de ellas. Esto exige escribir la definición correcta de lo que se está demostrando, pero no mucho

más; el trabajo algebraico está todo hecho. Para demostrar que f *no* tiende hacia l en a, téngase cuidado en negar la definición correctamente:

Si *no* es verdad que

para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$,

se cumple entonces que,

existe *algún* $\varepsilon > 0$ tal que para *todo* $\delta > 0$ existe *algún* x para el cual es $0 < |x - a| < \delta$, pero no $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Así, para demostrar que la función $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ no tiende a 0 cerca de 0, consideramos $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y observamos que para todo $\delta > 0$ existe algún x con $0 < |x - 0| < \delta$, pero no $|\operatorname{sen} 1/x - 0| < \frac{1}{2}$, a saber, un x de la forma $1/(90 + 360n)$ con n suficientemente grande para que $1/(90 + 360n) < \delta$.

Para ilustrar cómo se aplica la definición a una función que tiende a un límite, hemos reservado la función de la figura 14, ejemplo típico, pero uno de los más complicados.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional, } 0 < x < 1 \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible, } 0 < x < 1. \end{cases}$$

(Recuérdese que p/q es irreducible si p y q son enteros sin divisores comunes y $q > 0$.

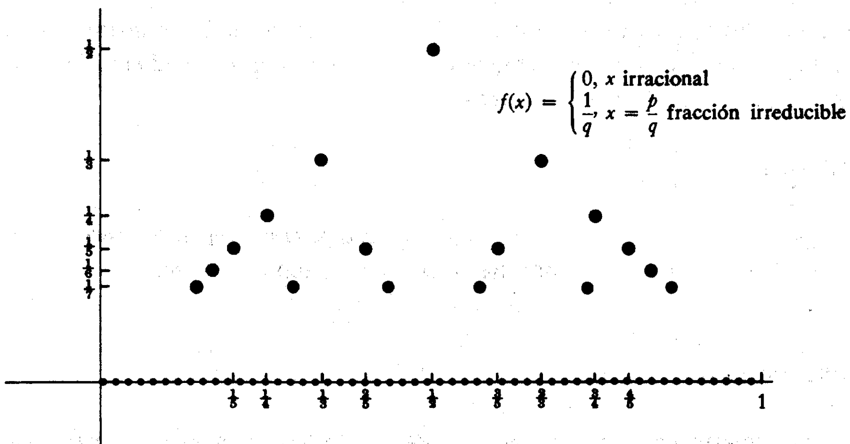


FIGURA 14

Para cualquier número a, con $0 < a < 1$, la función f tiende hacia 0 en a. Para demostrar esto, considérese un número cualquiera $\varepsilon > 0$. Sea n un número

natural suficientemente grande para que $1/n \leq \varepsilon$. Obsérvese que los únicos números x para los que pudiera ser falso $|f(x) - 0| < \varepsilon$ son:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}; \ldots ; \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}.$$

(Si a es racional, entonces a podría ser uno de estos números.) Por muchos de tales números que pueda haber, son en todo caso en número finito. Por lo tanto, entre todos estos números habrá uno que será el más próximo a a; es decir, $|p/q - a|$ es mínimo para algún p/q entre estos números. (Si ocurre que a es uno de estos números, considérense entonces sólo los valores $|p/q - a|$ para $p/q \neq a$. Puede elegirse como δ esta distancia mínima. Pues si $0 < |x - a| < \delta$, entonces x *no es ninguno* de los

$$\frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

y por lo tanto *se cumple* $|f(x) - 0| < \varepsilon$. Obsérvese que nuestra descripción del δ que va bien para un ε determinado es del todo adecuada; no es, en ningún modo, preciso dar una fórmula para δ en términos de ε.

Armados con nuestra definición, estamos ahora en condiciones de demostrar nuestro primer teorema; el lector probablemente habrá supuesto el resultado desde el principio, cosa muy razonable. Este teorema es verdaderamente una prueba de la validez de nuestra definición: si el teorema no pudiera demostrarse, nuestra definición no serviría de nada.

TEOREMA 1

Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en a. En otros términos, si f tiende hacia l en a, y f tiende hacia m en a, entonces $l = m$.

DEMOSTRACIÓN

Siendo éste nuestro primer teorema acerca de límites, será ciertamente necesario traducir la hipótesis en concordancia con la definición.

Puesto que f tiende hacia l en a, sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe algún número $\delta_1 > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Sabemos también, puesto que f tiende hacia m en a, que existe algún $\delta_2 > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |f(x) - m| < \varepsilon.$$

Hemos tenido que emplear dos números, δ_1 y δ_2, ya que no podemos asegurar que el δ que va bien en una definición irá bien en la otra. Sin embargo, de hecho, es ahora fácil concluir que para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(x) - m| < \varepsilon;$$

basta simplemente elegir $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Para completar la demostración solamente nos queda tomar un $\varepsilon > 0$ particular para el cual las dos condiciones

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(x) - m| < \varepsilon$$

no puedan cumplirse a la vez si $l \neq m$. La elección adecuada la sugiere la figura 15. Si $l \neq m$, de modo que $|l - m| > 0$, podemos tomar como ε a $|l - m|/2$. Se sigue que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \frac{|l - m|}{2}$$

$$\text{y } |f(x) - m| < \frac{|l - m|}{2}.$$

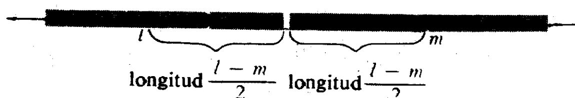


FIGURA 15

Esto implica que para $0 < |x - a| < \delta$ tenemos

$$|l - m| = |l - f(x) + f(x) - m| \leq |l - f(x)| + |f(x) - m|$$

$$< \frac{|l-m|}{2} + \frac{|l-m|}{2}$$
$$= |l-m|,$$

lo cual es una contradicción. ▮

El número l al que tiende f cerca de a se designa por $\lim_{x \to a} f(x)$ (léase: el límite de $f(x)$ cuando x tienda hacia a). Esta definición es solamente posible debido al teorema 1, el cual asegura que $\lim_{x \to a} f(x)$ no puede representar dos números distintos. La ecuación

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

tiene exactamente el mismo significado que la frase

f tiende hacia l en a.

Queda todavía la posibilidad de que f no tienda hacia l en a para ningún l, de modo que, cualquiera que sea l, $\lim_{x \to a} f(x) = l$ es falso. Esto se expresa, por lo general, diciendo que «$\lim_{x \to a} f(x)$ no existe».

Obsérvese que en nuestra nueva notación se introduce una letra de más, la x, completamente irrelevante, y que podría ser sustituida por t, y, o por cualquier otra letra que no haya aparecido ya; los símbolos

$$\lim_{x \to a} f(x), \qquad \lim_{t \to a} f(t), \qquad \lim_{y \to a} f(y),$$

designan todos precisamente el mismo número, que depende de f y a y no tiene nada que ver con x, t, o y (estas letras, en realidad, no designan absolutamente nada). Un símbolo más lógico sería algo así como lim f, pero esta notación es, a pesar de su brevedad, tan irritablemente rígida que casi nadie ha propuesto en serio utilizarla. La notación $\lim_{x \to a} f(x)$ es mucho más útil porque una función f muchas veces no tiene un nombre sencillo, aun cuando pueda ser posible expresar $f(x)$ mediante una fórmula sencilla que encierra x. Así, el breve símbolo

$$\lim_{x \to a} (x^2 + \operatorname{sen} x)$$

solamente puede ser parafraseado mediante la incómoda expresión

$$\lim_{a} f, \text{ donde } f(x) = x^2 + \operatorname{sen} x.$$

Otra ventaja del simbolismo corriente es ilustrada por las siguientes expresiones

$$\lim_{x \to a} x + t^3,$$

$$\lim_{t \to a} x + t^3.$$

La primera representa el número a que tiende f en a cuando

$$f(x) = x + t^3, \text{ para todo } x;$$

la segunda representa el número a que tiene f en a cuando

$$f(t) = x + t^3, \text{ para todo } t.$$

El lector no debe encontrar dificultad (especialmente si consulta el teorema 2) en demostrar que

$$\lim_{x \to a} x + t^3 = a + t^3,$$

$$\lim_{t \to a} x + t^3 = x + a^3.$$

Estos ejemplos ilustran la ventaja principal de nuestra notación, que es su flexibilidad. De hecho la notación $\lim_{x \to a} f(x)$ es tan flexible, que existe algún peligro de olvidar lo que realmente significa. Presentamos aquí un sencillo ejercicio en el uso de la notación cuya importancia se verá más tarde: primero interpretar con precisión y después demostrar la igualdad de las siguientes expresiones

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} f(a + h).$$

Una parte importante de este capítulo consiste en la demostración de un teorema que facilitará el cálculo de muchos límites. La demostración depende de ciertas propiedades de desigualdades y valores absolutos, poco sorprendentes cuando se considera la definición de límite. Aunque estos hechos han sido ya establecidos en los problemas 1-20, 1-21 y 1-22, debido a su importancia serán pre-

sentados de nuevo en forma de lema (un lema es un teorema auxiliar, un resultado que vale la pena destacar solamente en virtud del papel prominente que desempeña en la demostración de otro teorema). El lema dice, a grandes rasgos, que si x está cerca de x_0, e y está cerca de y_0, entonces $x + y$ estará cerca de $x_0 + y_0$, xy estará cerca de x_0y_0 y $1/y$ estará cerca de $1/y_0$. Esta afirmación intuitiva es mucho más fácil de recordar que las estimaciones precisas del lema, y no estaría de más leer primero la demostración del teorema 2, para ver cómo se aplican estas estimaciones.

LEMA

(1) Si

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

entonces

$$|(x + y)| - (x_0 + y_0)| < \varepsilon.$$

(2) Si

$$|x - x_0| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}\right) \quad \text{y} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)},$$

entonces

$$|xy - x_0y_0| < \varepsilon.$$

(3) Si $y_0 \neq 0$ y

$$|y - y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon|y_0|^2}{2}\right),$$

entonces $y \neq 0$ y

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN

(1) $|(x+y)-(x_0+y_0)| = |(x-x_0)+(y-y_0)|$

$$\leq |x-x_0| + |y-y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) Puesto que $|x-x_0| < 1$ se tiene

$$|x| - |x_0| \leq |x-x_0| < 1,$$

de modo que

$$|x| < 1 + |x_0|.$$

Así pues

$$\begin{aligned} |xy - x_0y_0| &= |x(y-y_0) + y_0(x-x_0)| \\ &\leq |x| \cdot |y-y_0| + |y_0| \cdot |x-x_0| \\ &< (1+|x_0|) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)} + |y_0| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(3) Se tiene

$$|y_0| - |y| < |y-y_0| < \frac{|y_0|}{2},$$

de modo que $|y| > |y_0|/2$. En particular, $y \neq 0$, y

$$\frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}.$$

Así pues

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y| \cdot |y_0|} < \frac{2}{|y_0|} \cdot \frac{1}{|y_0|} \cdot \frac{\varepsilon |y_0|^2}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

TEOREMA 2

Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim_{x \to a} g(x) = m$, entonces

$$(1)\quad \lim_{x \to a} (f + g)(x) = l + m;$$
$$(2)\quad \lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = l \cdot m.$$

Además, si $m \neq 0$, entonces

$$(3)\quad \lim_{x \to a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}.$$

DEMOSTRACIÓN

La hipótesis significa que para todo $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para todo x,

$$\begin{aligned} &\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon, \\ \text{y } &\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto significa (ya que, después de todo, $\varepsilon/2$ es también un número positivo) que existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para todo x,

$$\begin{aligned} &\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \text{y } &\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Sea ahora $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta_2$ se cumplen las dos, de modo que es a la vez

$$|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pero según la parte (1) del lema esto implica que $|(f + g)(x) - (l + m)| < \varepsilon$. Esto demuestra (1).

Para demostrar (2) procedemos de la misma manera, después de consultar la parte (2) del lema. Si $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|m| + 1)}\right),$$

$$\text{y} \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2(|l| + 1)}.$$

Pongamos de nuevo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$|f(x) - l| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|m| + 1)}\right) \quad \text{y} \quad |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2(|l| + 1)}.$$

Así pues, según el lema, $|(f \cdot g)(x) - l \cdot m| < \varepsilon$, y esto demuestra (2).

Finalmente, si $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |g(x) - m| < \min\left(\frac{|m|}{2}, \frac{\varepsilon|m|^2}{2}\right).$$

Pero según la parte (3) del lema, esto significa, en primer lugar que $g(x) \neq 0$, de modo que $(1/g)(x)$ tiene sentido, y en segundo lugar que

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon.$$

Esto demuestra (3). ▮

Aplicando el teorema 2 se demuestran, trivialmente, resultados del tipo

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 + 7x^5}{x^2 + 1} = \frac{a^3 + 7a^5}{a^2 + 1},$$

sin pasar por el proceso laborioso de encontrar un δ para un ε dado. Debemos empezar con

$$\lim_{x \to a} 7 = 7,$$

$$\lim_{x \to a} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \to a} x = a,$$

pero éstos son fáciles de demostrar directamente. Sin embargo, si *queremos* encontrar el δ, la demostración del teorema 2 equivale a unas instrucciones para hacer esto. Tomando un ejemplo más sencillo, supóngase que queremos encontrar un δ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |x^2 + x - (a^2 + a)| < \varepsilon.$$

Consultando la demostración del teorema 2(1), se ve que debemos encontrar primero δ_1 y $\delta_2 > 0$ tales que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1; \text{ entonces } |x^2 - a^2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{y si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |x - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esto lo sabemos hacer ya por las demostraciones que hemos dado de que $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$ y $\lim_{x\to a} x = a$:

$$\delta_1 = \min\left(1, \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2(|a| + 1)}\right),$$

$$\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así pues, podemos tomar

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) = \min\left(\min\left(1, \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2(|a| + 1)}\right), \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Si es $a \neq 0$, se puede aplicar el mismo método para encontrar un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{entonces } \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right| < \varepsilon.$$

La demostración del teorema 2(3) hace ver que se seguirá la segunda condición si encontramos un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |x^2 - a^2| < \min\left(\frac{|a|^2}{2}, \frac{\varepsilon|a|^4}{2}\right).$$

Así pues, podemos tomar

$$\delta = \min\left(1, \frac{\min\left(\frac{|a|^2}{2}, \frac{\varepsilon|a|^4}{2}\right)}{2(|a| + 1)}\right).$$

Estas complicadas expresiones para δ pueden, naturalmente, simplificarse una vez deducidas.

Hay un detalle técnico en la demostración del teorema 2 que merece comentario. Para que esté definido $\lim_{x \to a} f(x)$ no es necesario, como sabemos, que f esté definido en a, ni es necesario tampoco que f esté definido en todos los puntos $x \neq a$. Sin embargo, debe haber algún $\delta > 0$ tal que $f(x)$ esté definida para los x que satisfacen $0 < |x - a| < \delta$; de otro modo la cláusula

«si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$»

no tendría sentido en absoluto, ya que el símbolo $f(x)$ dejaría de tener sentido para algunos x. Si f y g son dos funciones bien definidas, es fácil ver que también están bien definidas $f + g$ y $f \cdot g$. Sin embargo, la cosa no está tan clara para $1/g$, puesto que $1/g$ no está definida para x cuando es $g(x) = 0$. De todos modos, este hecho ha quedado ya establecido en la demostración del teorema 2(3).

Hay veces en que vendría bien hablar del límite a que tiende f en a, aun cuando no exista ningún $\delta > 0$ tal que $f(x)$ esté definida para los x que satisfacen $0 < |x - a| < \delta$. Se puede tratar, por ejemplo, de distinguir el comportamiento de las dos funciones de la figura 16, aunque no estén definidas para números menores que a. Para la función de la figura 16(a) escribimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l \quad \text{o} \quad \lim_{x \downarrow a} f(x) = l.$$

(Los símbolos de la izquierda se leen: el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a desde arriba.) Estos «límites desde arriba» están evidentemente en estrecha relación con los límites ordinarios, y la definición es muy parecida: $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < x - a < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

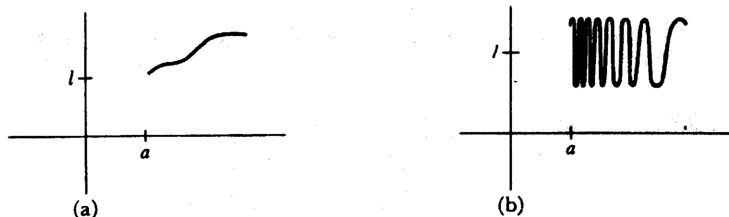


FIGURA 16

(La condición «$0 < x - a < \delta$» es equivalente a «$0 < |x - a| < \delta$ y $x > a$».)

Los «límites desde abajo» (figura 17) se definen de manera análoga: $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$ [o $\lim_{x \uparrow a} f(x) = l$] significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < a - x < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

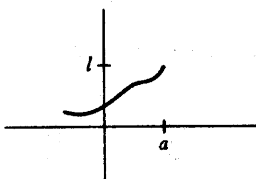


FIGURA 17

Es posible considerar límites desde abajo y desde arriba aunque la función esté definida tanto para valores mayores como para valores menores que a. Así, para la función f de la figura 13, se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$$

Constituye un ejercicio fácil (problema 29) demostrar que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe si y sólo si los dos límites $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existen y son iguales.

Lo mismo que las definiciones de límite desde arriba y desde abajo introducidas informalmente en el texto, existen otras modificaciones del concepto de límite que resultan útiles. En el capítulo 4 se dijo que si x es grande, entonces sen $1/x$ está cerca de 0. Este resultado se escribe por lo general

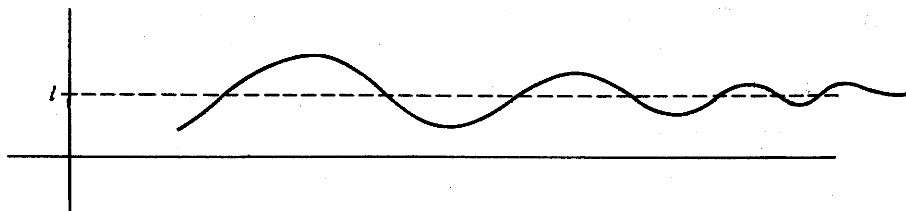


FIGURA 18

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} 1/x = 0.$$

El símbolo $\lim_{x \to \infty} f(x)$ se lee «límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia ∞», o «cuando x se hace infinito», y un límite de la forma $\lim_{x \to \infty} f(x)$ suele llamarse límite en el infinito. La figura 18 ilustra una situación general donde es $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$. Formalmente, $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número N tan grande, que, para todo x,

$$\text{si } x > N, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Debe quedar clara la analogía con la definición de límites ordinarios: mientras la condición «$0 < |x - a| < \delta$» expresa el hecho de que x está cerca de a, la condición «$x > N$» expresa el hecho de que x es grande.

Hemos dedicado tan poco tiempo a los límites desde arriba y desde abajo, así como a los límites en el infinito, porque la idea general que se oculta tras las definiciones debe quedar clara una vez que se ha comprendido la definición de límites ordinarios (que son, con mucho, los más importantes). Sobre estas definiciones se dan muchos ejercicios en los problemas, los cuales contienen también límites de otros tipos que son útiles en ocasiones.

PROBLEMAS

1. Hallar los siguientes límites. (Estos límites se obtienen todos, después de algunos cálculos, de las distintas partes del teorema 2; téngase cuidado en averiguar cuáles son las partes que se aplican, pero sin preocuparse de escribirlas.)

(i) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$.

(ii) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$.

(iii) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$.

(iv) $\lim_{x\to y} \frac{x^n - y^n}{x - y}$.

(v) $\lim_{y\to x} \frac{x^n - y^n}{x - y}$.

(vi) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a + h} - \sqrt{a}}{h}$.

2. Hallar los límites siguientes:

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$.

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$.

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$.

3. En cada uno de los siguientes casos, encontrar un δ tal que, $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$.

(i) $f(x) = x^4$; $l = a^4$.

(ii) $f(x) = \frac{1}{x}$; $a = 1$, $l = 1$.

(iii) $f(x) = x^4 + \frac{1}{x}$; $a = 1$, $l = 2$.

(iv) $f(x) = \frac{x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$; $a = 0$, $l = 0$.

(v) $f(x) = \sqrt{|x|}$; $a = 0$, $l = 0$.

(vi) $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 1$, $l = 1$.

4. Para cada una de las funciones del problema 4-17, decir para qué números a existe el límite $\lim_{x\to a} f(x)$.

*5. (a) Hágase lo mismo para cada una de las funciones del problema 4-19.
(b) El mismo problema usando decimales infinitos que terminen en una fila de ceros en lugar de los que terminan en una fila de nueves.

6. Supóngase que las funciones f y g tienen la siguiente propiedad: Para todo $\varepsilon > 0$ y todo x,

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \operatorname{sen}^2\left(\frac{\varepsilon^2}{9}\right) + \varepsilon, \text{ entonces } |f(x) - 2| < \varepsilon,$$

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \varepsilon^2, \text{ entonces } |g(x) - 4| < \varepsilon.$$

Para cada $\varepsilon > 0$ hallar un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

(i) Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) + g(x) - 6| < \varepsilon$.

(ii) Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x)g(x) - 8| < \varepsilon$.

(iii) Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{4}\right| < \varepsilon$.

(iv) Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

7. Dese un ejemplo de una función f para la cual la siguiente proposición sea *falsa:* Si $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon/2$ cuando $0 < |x - a| < \delta/2$.

8. (a) Si no existen los límites $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$, ¿pueden existir $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ o $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$?
(b) Si existen los límites $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$, ¿debe existir $\lim_{x \to a} g(x)$?
(c) Si existe el límite $\lim_{x \to a} f(x)$ y no existe el límite $\lim_{x \to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$?
(d) Si existen los límites $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$, ¿se sigue de ello que existe $\lim_{x \to a} g(x)$?

9. Demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a + h)$. (En este ejercicio se trata principalmente de comprender el significado de los términos.)

10. (a) Demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si y sólo si $\lim_{x \to a} [f(x) - l] = 0$. (Véase primero por qué la proposición es evidente; dar después una demostración rigurosa. En este capítulo la mayor parte de los problemas en los que se

piden demostraciones deben tratarse de la misma manera.)

(b) Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x-a)$.

(c) Demostrar que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.

(d) Dar un ejemplo en el que exista $\lim_{x\to 0} f(x^2)$, pero no $\lim_{x\to 0} f(x)$.

11. Supóngase que existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ cuando $0 < |x-a| < \delta$. Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Dicho de otro modo, $\lim_{x\to a} f(x)$ depende solamente de los valores de $f(x)$ cuando x está cerca de a; este hecho se expresa a veces diciendo que los límites constituyen una «propiedad local». (Será conveniente usar δ', o alguna otra letra, en lugar de δ, en la definición de límites.)

12. (a) Supóngase que $f(x) \leq g(x)$ para todo x. Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$, siempre que estos límites existan.

(b) ¿De qué modo puede obtenerse una hipótesis más débil?

(c) Si $f(x) < g(x)$ para todo x, ¿se sigue de ello necesariamente que $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$?

13. Supóngase que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$. Demostrar que existe $\lim_{x\to a} g(x)$ y que $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$. (Trácese un dibujo.)

***14.** (a) Demostrar que si $\lim_{x\to 0} f(x)/x = l$ y $b \neq 0$, entonces $\lim_{x\to 0} f(bx)/x = bl$. Indicación: Póngase $f(bx)/x = b[f(bx)/bx]$.

(b) ¿Qué ocurre si $b = 0$?

(c) La parte (a) nos permite hallar $\lim_{x\to 0}(\text{sen } 2x)/x$ en función de $\lim_{x\to 0}(\text{sen } x)/x$. Hallar este límite por otro procedimiento.

15. Calcular los límites siguientes en función del número $\alpha = \lim_{x\to 0} (\text{sen } x)/x$.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 2x}{x}$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx}$.

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 2x}{x}$.

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 2x}{x^2}$.

(v) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

(vi) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x + 2x}{x + x^2}$.

(vii) $\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$.

(viii) $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$.

(ix) $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$.

(x) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2(3+\operatorname{sen} x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}$.

(xi) $\lim_{x\to 1} (x^2-1)^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)^3$.

16. (a) Demostrar que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces $\lim_{x\to a} |f|(x) = |l|$.

(b) Demostrar que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$, entonces $\lim_{x\to a} \max(f, g)(x) = \max(l, m)$ y lo mismo para el mínimo.

17. (a) Demostrar que $\lim_{x\to 0} 1/x$ no existe, es decir, demostrar que, cualquiera que sea l, $\lim_{x\to 0} 1/x = l$ es falso.

(b) Demostrar que $\lim_{x\to 1} 1/(x-1)$ no existe.

18. Demostrar que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces existe un número $\delta > 0$ y un número M tal que $|f(x)| < M$ si $0 < |x-a| < \delta$. (¿Cómo puede verse esto gráficamente?) Indicación: ¿Por qué basta con demostrar que $l - 1 < f(x) < l + 1$ para $0 < |x-a| < \delta$?

19. Demostrar que si $f(x) = 0$ para x irracional y $f(x) = 1$ para x racional, entonces no existe $\lim_{x\to a} f(x)$ cualquiera que sea a.

***20.** Demostrar que si $f(x) = x$ para x racional y $f(x) = -x$ para x irracional, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe si $a \neq 0$.

21. (a) Demostrar que si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 0} g(x) \operatorname{sen} 1/x = 0$.

(b) Generalizar este hecho como sigue: Si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ y $|h(x)| \leq M$ para todo x, entonces $\lim_{x\to 0} g(x)h(x) = 0$. [Naturalmente la parte (*a*) es innecesaria si se consigue hacer la parte (b); en realidad la formulación de la

parte (b) puede facilitar las cosas más que (a) y ésta es una de las ventajas de la generalización.]

22. Considérese una función f con la siguiente propiedad: Si g es una función cualquiera para la cual no existe el $\lim_{x \to 0} g(x)$, entonces tampoco existe $\lim_{x \to 0} [f(x) + g(x)]$. Demostrar que esto ocurre si y sólo si $\lim_{x \to 0} f(x)$ *existe*. Indicación: Esto es en realidad muy fácil: La suposición de que no existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ lleva inmediatamente a una contradicción si se considera una g con la condición dicha.

**23. Este problema es el análogo del problema 22 cuando $f + g$ se sustituye por $f \cdot g$. En este caso la situación es considerablemente más compleja y el análisis debe hacerse en varias etapas (el lector que desee un problema difícil puede buscar una solución independiente).

(a) Supóngase que existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ y es $\neq 0$. Demostrar que si $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe, entonces tampoco existe $\lim_{x \to 0} f(x)g(x)$.

(b) Demostrar el mismo resultado si $\lim_{x \to 0} |f(x)| = \infty$. (La definición precisa de este tipo de límite se da en el problema 37.)

(c) Demostrar que si no se cumple ninguna de estas dos condiciones, entonces existe una función g tal que $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe, pero existe $\lim_{x \to 0} f(x)g(x)$. Indicación: Considerar por separado los dos casos siguientes: (1) Para algún $\varepsilon > 0$ se tiene $|f(x)| > \varepsilon$ para todos los x suficientemente pequeños. (2) Para todo $\varepsilon > 0$, existen x tan pequeños como se quiera con $|f(x)| < \varepsilon$. En el segundo caso, empiécese por elegir puntos x_n con $|x_n| < 1/n$ y $|f(x_n)| < 1/n$.

*24. Supóngase que, para todo número natural n, A_n es un conjunto *finito* de números en [0, 1], y que A_n y A_m carecen de elementos comunes si $m \neq n$. Defínase f como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{si } x \text{ está en } A_n \\ 0, & \text{si } x \text{ no está en } A_n \text{ para ningún } n. \end{cases}$$

Demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ para todo a de [0, 1].

25. Explíquese por qué son correctas las siguientes definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$:
Para todo $\delta > 0$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que, para todo x,

(i) Si $0 < |x - a| < \varepsilon$, entonces $|f(x) - l| < \delta$.

(ii) Si $0 < |x - a| < \varepsilon$, entonces $|f(x) - l| \leq \delta$.
(iii) Si $0 < |x - a| < \varepsilon$, entonces $|f(x) - l| < 5\delta$.
(iv) Si $0 < |x - a| < \varepsilon/10$, entonces $|f(x) - l| < \delta$.

***26.** Pónganse ejemplos para demostrar que las siguientes definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$ *no* son correctas.

(a) Para todo $\delta > 0$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|f(x) - l| < \varepsilon$, entonces $0 < |x - a| < \delta$.

27. Para cada una de las funciones del problema 4-17 indíquese para qué números a existen los límites laterales $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$.

***28.** (a) Hágase lo mismo para cada una de las funciones del problema 4-19.

(b) Considérese también lo que ocurre si se usan decimales que terminan en una fila de ceros en vez de decimales que terminan en nueves.

29. Demostrar que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$.

30. Demostrar que

(i) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(-x)$.

(ii) $\lim_{x \to 0} f(|x|) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$.

(iii) $\lim_{x \to 0} f(x^2) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$.

(Estas ecuaciones y otras como ellas son susceptibles de diversas interpretaciones. Pueden significar solamente que los dos límites son iguales si es que ambos existen; o que si uno determinado de ellos existe, el otro también existe y es igual a él; o que si cualquiera de los dos existe entonces el otro existe y es igual a él. Decida el lector por sí mismo cuáles de estas interpretaciones son adecuadas.)

***31.** Supóngase que $\lim_{x \to a^-} f(x) < \lim_{x \to a^+} f(x)$. (Ilústrese esta proposición con un dibujo.) Demostrar que existe algún $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(y)$ siempre que $x < a < y$, $|x - a| < \delta$ e $|y - a| < \delta$. ¿Se cumple la recíproca?

***32.** Demostrar que $\lim_{x \to \infty} (a_n x^n + \ldots + a_0)/(b_m x^m + \ldots + b_0)$ existe si y sólo si $m \geq n$. ¿Cuál es el límite cuando $m = n$? ¿Y cuándo $m > n$? Indicación: El límite fácil es $\lim_{x \to \infty} 1/x^k = 0$; consígase mediante alguna manipulación algebraica que ésta sea la única información necesaria.

33. Hallar los límites siguientes

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x + \operatorname{sen}^3 x}{5x + 6}$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 5}$.

(iii) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$.

(iv) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1 + \operatorname{sen}^2 x)}{(x + \operatorname{sen} x)^2}$.

34. Demostrar que $\lim_{x\to 0^+} f(1/x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$

35. Hallar los límites siguientes en función del número $\alpha = \lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)/x$.

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

36. Definir " $\lim_{x\to -\infty} f(x) = l$."

(a) Hallar $\lim_{x\to -\infty} (a_n x^n + \cdots + a_0)/(b_m x^m + \cdots + b_0)$.

(b) Demostrar que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(-x)$.

(c) Demostrar que $\lim_{x\to 0^-} f(1/x) = \lim_{x\to -\infty} f(x)$.

37. Definimos $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ en el sentido de que para todo N existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) > N$. (Trazar un dibujo adecuado.)

(a) Demostrar que $\lim_{x\to 3} 1/(x - 3)^2 = \infty$.

(b) Demostrar que si $f(x) > \varepsilon > 0$ para todo x, y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty.$$

38. (a) Definir $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. (O por lo menos con-

vénzase el lector que podría escribir las definiciones si tuviera humor para ello. ¿Cuántos otros símbolos podría definir?)

(b) Demostrar que $\lim_{x \to 0^+} 1/x = \infty$.

(c) Demostrar que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ si y sólo si $\lim_{x \to \infty} f(1/x) = \infty$.

39. Hallar los siguientes límites, si existen

(i) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 4x - 7}{7x^2 - x + 1}$.

(ii) $\lim_{x \to \infty} x(1 + \operatorname{sen}^2 x)$.

(iii) $\lim_{x \to \infty} x \operatorname{sen}^2 x$.

(iv) $\lim_{x \to \infty} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

(v) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$.

(vi) $\lim_{x \to \infty} x(\sqrt{x + 2} - \sqrt{x})$.

(vii) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{|x|}}{x}$.

40. (a) Hallar el perímetro de un n-ágono regular inscrito en una circunferencia de radio r; para las funciones trigonométricas que entren en juego, utilizar el radián como argumento.
Solución: $2rn \operatorname{sen}(\pi/n)$.

(b) ¿A qué valor se aproxima este perímetro cuando n es muy grande?

41. Una vez ya en la imprenta el manuscrito de la primera edición de este libro, se me ocurrió una manera mucho más sencilla de demostrar que $\lim x^2 = a^2$, y $\lim_{x \to a} x^3 = a^3$, sin pasar por todos los pasos de la página 83. Supongamos que queremos demostrar que $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$, siendo $a > 0$. Dado $\varepsilon > 0$ hacemos simplemente que δ sea el mínimo de $\sqrt{a^2 + \varepsilon} - a$ y $a - \sqrt{a^2 + \varepsilon}$ (ver figura 19); entonces $|x - a| < \delta$ implica que $\sqrt{a^2 - \varepsilon} < x < \sqrt{a^2 + \varepsilon}$, de modo que $a^2 - \varepsilon < x^2 < a^2 + \varepsilon$, o $|x^2 - a^2| < \varepsilon$. Por fortuna no llegué a tiempo para introducir estos cambios, puesto que esta «demostración» es totalmente falsa. ¿Dónde se encuentra el fallo?

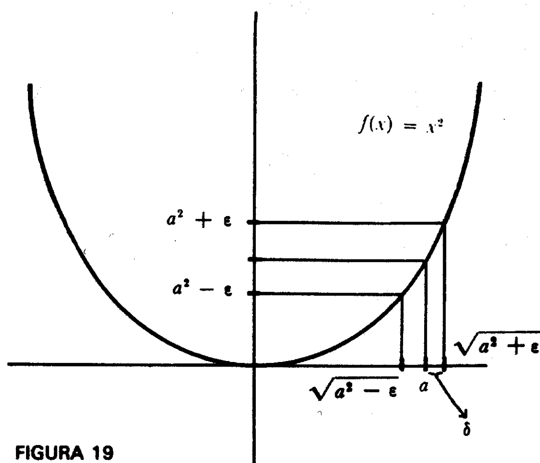

$f(x) = x^2$
$a^2 + \varepsilon$
$a^2 - \varepsilon$
$\sqrt{a^2 + \varepsilon}$
$\sqrt{a^2 - \varepsilon}$
a
δ

FIGURA 19

CAPÍTULO

6

FUNCIONES CONTINUAS

Si f es una función cualquiera, no se cumple necesariamente que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

En efecto, esto puede dejar de ser cierto de muchas maneras. Por ejemplo, f puede incluso no estar definida en a, en cuyo caso la ecuación no tiene sentido (figura 1).

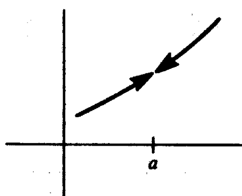


FIGURA 1

También puede no existir $\lim_{x \to a} f(x)$ (figura 2). Finalmente, como se ve en la figura 3, aun estando definida f en a y existiendo $\lim_{x \to a} f(x)$, el límite puede no ser igual a $f(a)$.

Parece natural considerar como anormal todo comportamiento de este tipo y distinguir con algún calificativo honroso aquellas funciones que no presentan

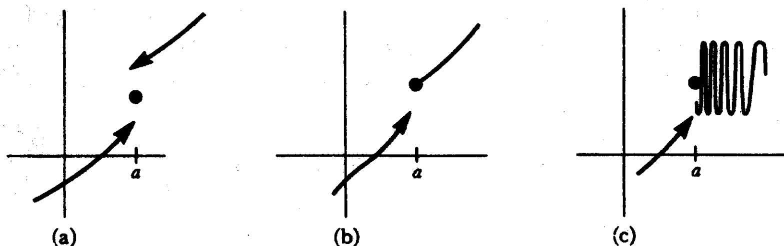


FIGURA 2

estas peculiaridades. El calificativo adoptado ha sido «continua». Intuitivamente, una función f es continua si su gráfica no contiene interrupciones, ni saltos ni oscilaciones indefinidas. Aunque esta descripción es, por lo general, suficiente para

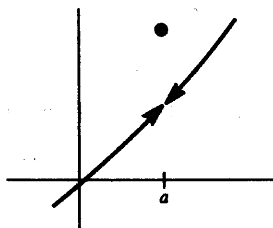


FIGURA 3

decidir si una función es continua observando simplemente su gráfica (habilidad que merece ser cultivada), es fácil engañarse, y la definición rigurosa es *muy* importante.

DEFINICIÓN

La función f es **continua en a** si
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

No tendremos dificultad alguna en hallar muchos ejemplos de funciones que son, o no son, continuas en algún número a; todo ejemplo referente a límites suministra un ejemplo referente a continuidad, y el capítulo 5 suministra ciertamente bastantes de éstos.

La función $f(x) = \text{sen } 1/x$ no es continua en 0, porque ni siquiera está definida en 0, y lo mismo vale para la función $g(x) = x \text{ sen } 1/x$. Por otra parte, si queremos extender la segunda de estas funciones, es decir, si queremos definir una nueva función G poniendo

$$G(x) = \begin{cases} x \text{ sen } 1/x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

entonces la elección de $a = G(0)$ puede hacerse de tal manera que G sea continua en 0; para hacer esto podemos (de hecho, debemos) definir $G(0) = 0$ (figura 4). Esta clase de extensión no es posible para f; si definimos

$$F(x) = \begin{cases} \text{sen } 1/x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

entonces F no será continua en 0, cualquiera que sea a, porque $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

La función

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

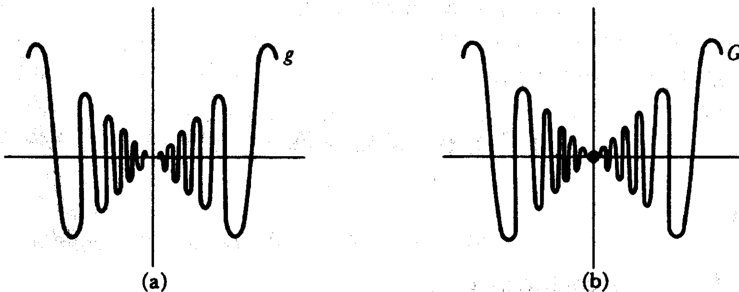


FIGURA 4

no es continua en a, *si* $a \neq 0$, puesto que $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe. Sin embargo, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, de modo que f es continua precisamente en un solo punto, el 0.

Las funciones $f(x) = c$, $g(x) = x$ y $h(x) = x^2$ son continuas en todos los números a, puesto que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c = f(a),$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} x = a = g(a),$$
$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} x^2 = a^2 = h(a).$$

Considérese finalmente la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

En el capítulo 5 hicimos ver que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ para todo a. Puesto que $0 = f(a)$ solamente cuando a es irracional, esta función es continua en a si a es irracional, pero no si a es racional.

Será más fácil todavía dar ejemplos de continuidad si demostramos dos sencillos teoremas.

TEOREMA 1

Si f y g son continuas en a, entonces

(1) $f + g$ es continua en a,
(2) $f \cdot g$ es continua en a.

Además, si $g(a) \neq 0$, entonces

(3) $1/g$ es continua en a.

DEMOSTRACIÓN

Puesto que f y g son continuas en a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Por el teorema 2(1) del capítulo 5 esto implica que

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a),$$

lo cual es precisamente la afirmación de que $f + g$ es continua en a. Las demostraciones de las partes (2) y (3) se dejan para el lector. ▮

Partiendo de las funciones $f(x) = c$ y $f(x) = x$, que son continuas en a, para todo a, podemos aplicar el teorema 1 para concluir que una función

$$f(x) = \frac{b_nx^m + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0}{c_mx^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_0}$$

es continua en todo punto de su dominio. Pero es difícil llegar a mucho más de esto. Cuando estudiemos en detalle la función seno será fácil demostrar que sen es continua en a para todo a; aceptemos de momento este hecho. Una función tal como

$$f(x) = \frac{\text{sen}^2\ x + x^2 + x^4\ \text{sen}\ x}{\text{sen}^{27}\ x + 4x^2\ \text{sen}^2\ x}$$

puede demostrarse ahora que es continua en todo punto de su dominio. Pero todavía no podemos demostrar la continuidad de una función tal como $f(x) = \text{sen}\ (x^2)$; necesitamos, evidentemente, un teorema referente a la composición de funciones continuas. Antes de formular este teorema, vale la pena destacar el siguiente punto acerca de la definición de continuidad. Si traducimos la ecuación $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ de acuerdo con la definición de límites, se obtiene

para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,
si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Pero en este caso, en que el límite es $f(a)$, la frase

$$0 < |x - a| < \delta$$

puede cambiarse por la condición más sencilla

$$|x - a| < \delta,$$

puesto que si $x = a$ se cumple ciertamente que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

TEOREMA 2

Si g es continua en a, y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a. [Obsérvese que se requiere que f sea continua en $g(a)$, no en a.]

DEMOSTRACIÓN

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo x,

$$\text{si } |x - a| < \delta \text{ entonces } |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \varepsilon,$$
$$\text{es decir, } |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Tendremos que aplicar primero la continuidad de f para estimar cómo de cerca tiene que estar $g(x)$ de $g(a)$ para que se cumpla esta desigualdad. Puesto que f es continua en $g(a)$, existe un $\delta' > 0$ tal que para todo y,

(1) si $|y - g(a)| < \delta'$, entonces $|f(y) - f(g(a))| < \varepsilon$.

En particular, esto significa que

(2) Si $|g(x) - g(a)| < \delta'$, entonces $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$.

Aplicamos ahora la continuidad de g para estimar cómo de cerca tiene que estar x de a para que se cumpla la desigualdad $|g(x) - g(a)| < \delta'$. El número δ' es un número positivo como cualquier otro número positivo; podemos, por lo tanto, tomar δ' como el ε (!) de la definición de continuidad de g en a. Deducimos que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

(3) Si $|x - a| < \delta$, entonces $|g(x) - g(a)| < \delta'$.

Combinando (2) y (3) vemos que para todo x,

$$\text{si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon. \blacksquare$$

Podemos ahora volver a considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Hemos observado ya que f es continua en 0. Unas cuantas aplicaciones de los teoremas 1 y 2, junto con la continuidad de sen, demuestran que f es también continua en a, para $a \neq 0$. El lector debería ser capaz de analizar con la misma facilidad funciones tales como $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen}^2(x^3)))$.

Los pocos teoremas de este capítulo se refieren todos a continuidad de funciones en un punto, pero el concepto de continuidad no empieza a ser interesante hasta que dirigimos nuestra atención a funciones que son continuas en todos los puntos de algún intervalo. Si f es continua en x para todo x de (a, b), entonces se dice que f es **continua en** (a, b). La continuidad en un intervalo cerrado se define de modo algo diferente; una función f se dice que es **continua en** $[a, b]$ si

(1) f es continua en x para todo x de (a, b),

(2) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Las funciones que son continuas en un intervalo suelen considerarse especialmente como buenas; de hecho puede decirse que la continuidad es la primera condición que debe satisfacer una función «razonable». Se suele, a veces, describir intuitivamente una función continua como aquella cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Al considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

se ve que esta descripción es un poco demasiado optimista, pero con todo es verdad que existen muchos resultados importantes acerca de funciones que son continuas en un intervalo. Estos teoremas son, por lo general, mucho más difíciles que los de este capítulo, pero existe un teorema sencillo que constituye un puente entre los dos tipos de resultados. La hipótesis de este teorema exige la continuidad en un punto solamente, pero la conclusión describe el comportamiento de la función en algún intervalo que contiene el punto. Aunque este teorema es, en realidad, un lema para posteriores argumentaciones, se incluye aquí como una visión anticipada de lo que ha de venir.

TEOREMA 3

Supóngase que f es continua en a, y $f(a) > 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x que satisface $|x - a| < \delta$. Análogamente, si $f(a) < 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo x que satisface $|x - a| < \delta$.

DEMOSTRACIÓN

Considérese el caso $f(a) > 0$ puesto que f que es continua en a, si $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Puesto que $f(a) > 0$ podemos tomar a $f(a)$ como el ε. Así, pues, existe $\delta > 0$ tal que para todo x,

$$\text{si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < f(a),$$

y esta última igualdad implica $f(x) > 0$.

Puede darse una demostración análoga en el caso $f(a) < 0$; tómese $\varepsilon = -f(a)$. O también se puede aplicar el primer caso a la función $-f$. ▌

PROBLEMAS

1. ¿Para cuáles de las siguientes funciones f existe una función F de dominio $\mathbf{R}$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo x del dominio de f?

(i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

(ii) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

(iii) $f(x) = 0$, x irracional.
(iv) $f(x) = 1/q$, $x = p/q$ racional en fracción irreducible.

2. ¿En qué puntos son continuas las funciones de los problemas 4-17 y 4-19?

3. (a) Supóngase que f es una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para todo x. Demostrar que f es continua en 0. [Obsérvese que $f(0)$ debe ser igual a 0.]
(b) Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún $a \neq 0$.
(c) Supóngase que g es continua en 0, $g(0) = 0$, y $|f(x)| \leq |g(x)|$. Demostrar que f es continua en 0.

4. Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ sea continua en todos los puntos.

5. Para todo número a, hallar la función que sea continua en a, pero no lo sea en ningún otro punto.

6. (a) Hallar una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, pero continua en todos los demás puntos.

(b) Hallar una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, y en 0, pero que sea continua en todos los demás puntos.

7. Supóngase que f satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$, y que f es continua en 0. Demostrar que f es continua en a para todo a.

8. Supóngase que f es continua en a y $f(a) = 0$. Demostrar que si $\alpha \neq 0$, entonces $f + \alpha$ es distinta de 0 en algún intervalo abierto que contiene a.

9. (a) Supóngase que f *no* es continua en a. Demostrar que para algún $\varepsilon > 0$ existen números x tan próximos como se quiera de a con $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Ilústrese esto gráficamente.

(b) Dedúzcase que para algún $\varepsilon > 0$, *o bien* existen números x tan próximos como se quiera de a con $f(x) < f(a) - \varepsilon$ o bien existen números x tan próximos como se quiera de a con $f(x) > f(a) + \varepsilon$.

10. (a) Demostrar que si f es continua en a, entonces también lo es $|f|$.

(b) Demostrar que toda función continua f puede escribirse en la forma $f = E + O$, donde E es par y continua y O es impar y continua.

(c) Demostrar que si f y g son continuas, también lo son $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$.

(d) Demostrar que toda función continua f puede escribirse en la forma $f = g - h$, donde g y h son no negativas y continuas.

11. Demostrar el teorema 1(3) aplicando el teorema 2 y la continuidad de la función $f(x) = 1/x$.

***12.** (a) Demostrar que si f es continua en l y $\lim_{x \to a} g(x) = l$, entonces $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(l)$. [Se puede hacer partiendo de las definiciones, pero es más fácil considerar la función G con $G(x) = g(x)$ para $x \neq a$, y $G(a) = l$.]

(b) Demostrar que si no se supone la continuidad de f en l, entonces no se cumple, por lo general, que $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$. Indicación: Hacer la prueba con $f(x) = 0$ para $x \neq l$, y $f(l) = 1$.

13. (a) Demostrar que si f es continua en $[a, b]$, entonces existe una función g que es continua en $\mathbf{R}$, y que satisface $g(x) = f(x)$ para todo x en $[a, b]$. Indicación: Puesto que hay evidentemente un gran margen para elegir, hágase la prueba con g constante en $(-\infty, a]$ y $[b, \infty)$.

(b) Hágase ver con un ejemplo que esta afirmación es falsa si se sustituye $[a, b]$ por (a, b).

14. (a) Supóngase que g y h son continuas en a, y que $g(a) = h(a)$. Defínase $f(x)$ como $g(x)$ si $x \geq a$ y $h(x)$ si $x \leq a$. Demostrar que f es continua en a.

(b) Supóngase que g es continua en $[a, b]$, h es continua en $[b, c]$ y $g(b) = h(b)$.

Sea $f(x)$ igual a $g(x)$ para x en $[a, b]$ e igual a $h(x)$ para x en $[b, c]$. Demostrar que f es continua en $[a, c]$. (Así, pues, las funciones continuas pueden «soldarse».)

15. (a) Demostrar la siguiente versión del teorema 3 para «continuidad por la derecha»: Supóngase que $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, y $f(a) > 0$. Existe entonces un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x que satisface $0 \leq x - a < \delta$. Análogamente, si $f(a) < 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo x que satisface $0 \leq x - a < \delta$.

(b) Demostrar una versión del teorema 3 cuando $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

16. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, pero es $\neq f(a)$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad evitable** en a.

(a) Si $f(x) = \text{sen}\ 1/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$, ¿tiene f una discontinuidad evitable en 0? ¿Y si $f(x) = x\ \text{sen}\ 1/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$?

(b) Supóngase que f tiene una discontinuidad evitable en a. Sea $g(x) = f(x)$ para $x \neq a$ y sea $g(a) = \lim_{x \to a} f(x)$. Demostrar que g es continua en a. (No tomarse demasiado trabajo; esto es muy fácil.)

(c) Sea $f(x) = 0$ si x es racional, y sea $f(p/q) = 1/q$ si p/q es una fracción irreducible. ¿Qué función es la g definida por $g(x) = \lim_{y \to x} f(y)$?

*(d) Sea f una función con la propiedad de que todo punto de discontinuidad es una discontinuidad evitable. Esto significa que $\lim_{y \to x} f(y)$ existe para todo x, pero que f puede ser discontinua en algunos (incluso en infinitos) números x. Defínase $g(x) = \lim_{y \to x} f(y)$. Demostrar que g es continua. [Esto no es tan fácil como la parte (b).]

**(e) ¿Existe alguna función f que sea discontinua en todo punto y que tenga solamente discontinuidades evitables? (Vale la pena considerar este problema ahora, pero principalmente como una prueba de intuición; aunque sospeche la solución correcta, el lector no podrá ciertamente demostrarla por ahora. Véase el problema 21-33.)

CAPÍTULO

7

TRES TEOREMAS FUERTES

Este capítulo está dedicado a tres teoremas acerca de funciones continuas y a algunas de sus consecuencias. Las demostraciones mismas de estos tres teoremas no se darán hasta el capítulo próximo, por razones que se explican al final de éste.

TEOREMA 1

Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$.
(Geométricamente, esto significa que la gráfica de una función continua que empieza por debajo del eje horizontal y termina por encima del mismo debe cruzar a este eje en algún punto, como en la figura 1.)

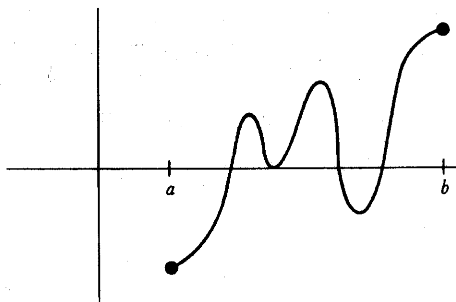


FIGURA 1

TEOREMA 2

Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \leq N$ para todo x en $[a, b]$.
(Geométricamente, este teorema significa que la gráfica de f queda por debajo de alguna línea paralela al eje horizontal como en la figura 2.)

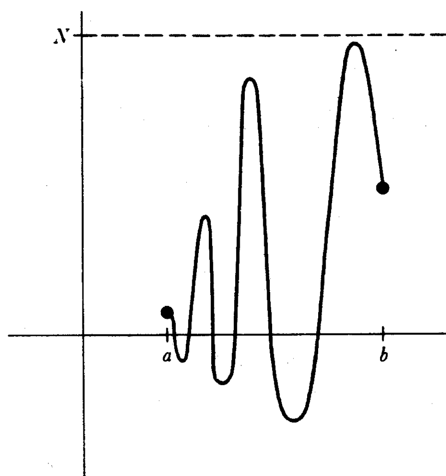


FIGURA 2

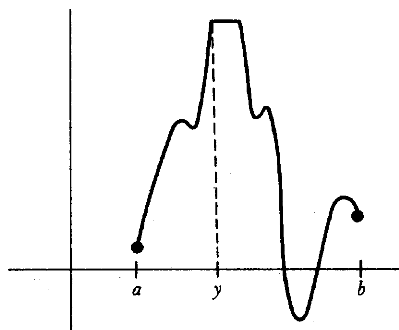


FIGURA 3

TEOREMA 3

Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe algún número y en $[a, b]$ tal que $f(y) > f(x)$ para todo x en $[a, b]$ (figura 3).

Estos tres teoremas difieren notablemente de los teoremas del capítulo 6. Las hipótesis de aquellos teoremas postulaban siempre continuidad en un solo punto mientras que las hipótesis de los teoremas presentes exigen continuidad en todo un intervalo $[a, b]$; si la continuidad deja de cumplirse en un solo punto, las conclusiones pueden no ser ciertas. Por ejemplo, sea f la función de la figura 4,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ 1, & \sqrt{2} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Entonces f es continua en todo punto de $[0, 2]$ excepto en $\sqrt{2}$, y $f(0) < 0 < f(2)$, pero no existe ningún punto x en $[0, 2]$ tal que $f(x) = 0$; la discontinuidad

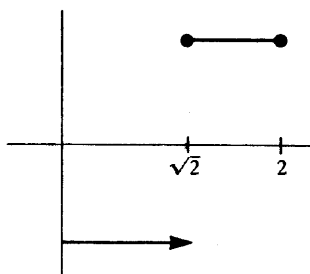


FIGURA 4

en el punto $\sqrt{2}$ es suficiente para destruir la conclusión del teorema 1.

Análogamente, supongamos que f es la función de la figura 5,

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

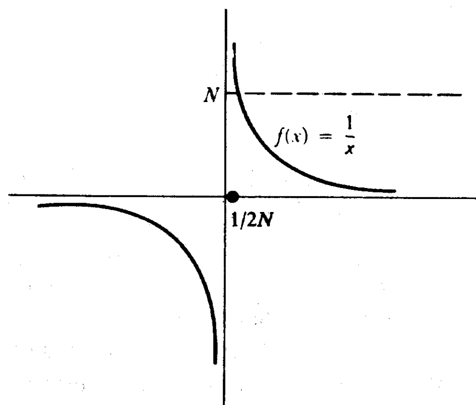


FIGURA 5

Entonces f es continua en todo punto de [0, 1] excepto en 0, pero f no está acotada superiormente en [0, 1]. En efecto, para cualquier número $N > 0$, se tiene $f(\frac{1}{2}N) = 2N > N$.

Este ejemplo hace ver también que el intervalo cerrado $[a, b]$ del teorema 2 no puede ser sustituido por el intervalo abierto (a, b), ya que la función f es continua en (0, 1), pero no está acotada en este intervalo.

Finalmente, consideremos la función de la figura 6,

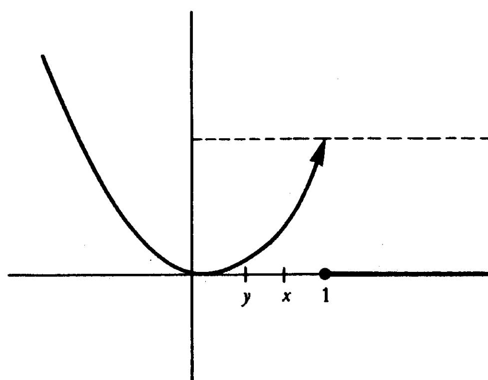


FIGURA 6

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

En el intervalo $[0, 1]$ la función f está acotada superiormente, de modo que f satisface la conclusión del teorema 2, aunque f no sea continua en $[0, 1]$. Pero f no satisface la conclusión del teorema 3; no existe ningún y en $[0, 1]$ tal que $f(y) \geq f(x)$ para todo x de $[0, 1]$; en efecto, no se cumple ciertamente que $f(1) \geq f(x)$ para todo x de $[0, 1]$, de modo que no podemos elegir $y = 1$, ni tampoco podemos elegir $0 \leq y < 1$ porque $f(y) < f(x)$ si x es un número cualquiera tal que $y < x < 1$.

Este ejemplo hace ver que el teorema 3 es considerablemente más fuerte que el teorema 2. El teorema 3 se parafrasea a menudo diciendo que una función continua en un intervalo cerrado «alcanza su valor máximo» en dicho intervalo.

Las hipótesis de nuestros tres teoremas son muy restrictivas, pero en compensación obtenemos unas conclusiones de naturaleza completamente distinta de las de los teoremas anteriores. Describen el comportamiento de una función no precisamente en un punto sino en todo un intervalo; tales propiedades «globales» de una función son siempre notablemente más difíciles de demostrar que las propiedades «locales», y en correspondencia con esto son de mucha mayor fuerza. Para ilustrar la utilidad de los teoremas 1, 2 y 3, deduciremos pronto algunas consecuencias importantes, pero será conveniente mencionar primero algunas generalizaciones simples de estos teoremas.

TEOREMA 4

Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = c$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $g = f - c$. Entonces g es continua, y $g(a) < 0 < g(b)$. Según el teorema 1, existe algún x en $[a, b]$ tal que $g(x) = 0$. Pero esto significa que $f(x) = c$. ▌

TEOREMA 5

Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) > c > f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = c$.

DEMOSTRACIÓN

La función $-f$ es continua en $[a, b]$ y $-f(a) < -c < -f(b)$. Según el teorema 4 existe algún x en $[a, b]$ tal que $-f(x) = -c$, lo cual significa que $f(x) = c$. ▌

Los teoremas 4 y 5 juntos demuestran que f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Todavía podemos decir más: Si c y d están en $[a, b]$, entonces f toma todos los valores comprendidos entre $f(c)$ y $f(d)$. La demostración es sencilla; si, por ejemplo, $c < d$, entonces basta aplicar los teoremas 4 y 5 al intervalo $[c, d]$. Resumiendo, si una función continua en un intervalo toma dos valores, entonces toma todos los valores comprendidos entre ellos; esta ligera generalización del teorema 1 recibe a menudo el nombre de teorema de los valores intermedios.

TEOREMA 6

Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada inferiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \geq N$ para todo x de $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN

La función $-f$ es continua en $[a, b]$, de modo que según el teorema 2, existe un número M tal que $-f(x) \leq M$ para todo x de $[a, b]$. Pero esto significa que $f(x) \geq -M$ para todo x de $[a, b]$, de modo que podemos poner $N = -M$. ▌

Los teoremas 2 y 6 juntos demuestran que una función continua f en $[a, b]$ está acotada en $[a, b]$, es decir, existe un número N tal que $|f(x)| \leq N$ para todo x de $[a, b]$. En efecto, puesto que el teorema 2 asegura la existencia de un número N_1 tal que $f(x) \leq N_1$ para todo x de $[a, b]$ y el teorema 6 asegura la existencia de un número N_2 tal que $f(x) \geq N_2$ para todo x de $[a, b]$, podemos tomar $N = \max(|N_1|, |N_2|)$.

TEOREMA 7

Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe algún y en $[a, b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x de $[a, b]$.
(Una función continua en un intervalo cerrado alcanza su mínimo en dicho intervalo.)

DEMOSTRACIÓN

La función $-f$ es continua en $[a, b]$; según el teorema 3 existe algún y en $[a, b]$ tal que $-f(y) \geq -f(x)$ para todo x de $[a, b]$, lo cual significa que $-f(y) \leq -f(x)$ para todo x de $[a, b]$. ▮

Una vez deducidas las consecuencias triviales de los teoremas 1, 2 y 3, empezaremos a demostrar algunas cosas interesantes.

TEOREMA 8

Todo número positivo posee una raíz cuadrada. En otras palabras, si $\alpha > 0$, entonces existe algún número x tal que $x^2 = \alpha$.

DEMOSTRACIÓN

Consideremos la función $f(x) = x^2$, la cual es ciertamente continua. Obsérvese que la afirmación del teorema puede ser expresada en términos de f: «el número α posee una raíz cuadrada» significa que f toma el valor α. La demostración de este hecho acerca de f será una consecuencia fácil del teorema 4.

Existe, evidentemente, un número $b > 0$ tal que $f(b) > \alpha$ (como se ve en la figura 7); en efecto, si $\alpha > 1$ podemos tomar $b = \alpha$, mientras que si $\alpha < 1$ podemos tomar $b = 1$. Puesto que $f(0) < \alpha < f(b)$, el teorema 4 aplicado a $[0, b]$ implica que para algún x (de $[0, b]$), tenemos $f(x) = \alpha$, es decir, $x^2 = \alpha$. ▮

Precisamente el mismo raciocinio puede aplicarse para demostrar que todo

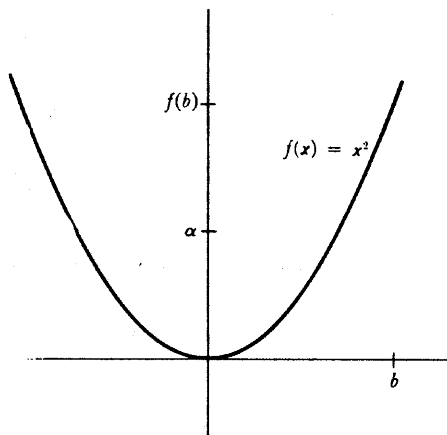


FIGURA 7

número positivo tiene una raíz n-ésima, cualquiera que sea el número n. Si n es impar, se puede decir más: *todo* número tiene una raíz n-ésima. Para demostrarlo basta observar que si el número positivo α tiene la raíz n-ésima x, es decir, si $x^n = \alpha$, entonces $(-x)^n = -\alpha$ (puesto que n es impar), de modo que $-\alpha$ tiene la raíz n-ésima $-\alpha$. Afirmar que, para un n impar, cualquier número α tiene una raíz n-ésima, equivale a afirmar que la ecuación

$$x^n - \alpha = 0$$

tiene una raíz si n es impar. El resultado expresado de este modo es susceptible de gran generalización.

TEOREMA 9

Si n es impar, entonces cualquier ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

posee una raíz.

DEMOSTRACIÓN

Tendremos que considerar, evidentemente, la función

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0;$$

habría que demostrar que f es unas veces positiva y otras negativa. La idea intuitiva es que para un $|x|$ grande, la función se parece mucho a $g(x) = x^n$ y, puesto que n es impar, esta función es positiva para x grandes positivos y negativa para x grandes negativos. Un poco de cálculo algebraico es todo lo que hace falta para dar forma a esta idea intuitiva.

Para analizar debidamente la función f conviene escribir

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right).$$

Obsérvese que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|x^n|}.$$

En consecuencia, si elegimos un x que satisfaga

$$(*) \quad |x| > 1,\ 2n|a_{n-1}|,\ \ldots,\ 2n|a_0|,$$

entonces $|x^k| > |x|$ y

$$\frac{|a_{n-k}|}{|x^k|} < \frac{|a_{n-k}|}{|x|} < \frac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}|} = \frac{1}{2n},$$

de modo que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ términos}} = \frac{1}{2}.$$

Expresado de otro modo,

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \leq \frac{1}{2},$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Por lo tantò, si elegimos un $x_1 > 0$ que satisfaga (*), entonces

$$\frac{x_1{}^n}{2} \leq x_1{}^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x_1),$$

de modo que $f(x_1) > 0$. Por otra parte, si $x_2 < 0$ satisface (*), entonces $x_2{}^n < 0$ y

$$\frac{x_2{}^n}{2} \geq x_2{}^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \cdots + \frac{a_0}{x_2{}^n}\right) = f(x_2),$$

de modo que $f(x_2) < 0$.

Aplicando ahora el teorema 1 al intervalo $[x_2, x_1]$ llegamos a la conclusión de que existe un x en $[x_1, x_2]$ tal que $f(x) = 0$. ▮

El teorema 9 resuelve tan felizmente el problema de las ecuaciones de grado impar que parece obligado intentar lo mismo respecto a las de grado par, no estudiadas hasta ahora. Sin embargo, el problema parece a primera vista insuperable. Unas ecuaciones tales como $x^2 - 1 = 0$ tienen una solución, mientras que otras tales como $x^2 + 1 = 0$ no la tienen; ¿qué más hay que decir? *Se puede* decir, con todo, algo de interés, considerando una cuestión más general. En vez de intentar resolver la ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

preguntémonos acerca de la posibilidad de resolver las ecuaciones

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = c$$

para todos los números posibles c. Esto equivale a hacer variar el término constante a_0. La información que se puede dar acerca de la solución de estas ecuaciones depende de un hecho que se ilustra en la figura 8.

La gráfica de la función $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, con n par, contiene, por lo menos en la forma en que la hemos dibujado, un punto más bajo que todos los demás. Dicho de otro modo existe un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todos los números x, es decir, la función f posee un mínimo, no solamente en todo intervalo cerrado, sino en la recta completa. (Obsérvese que esto no se cumple si n es

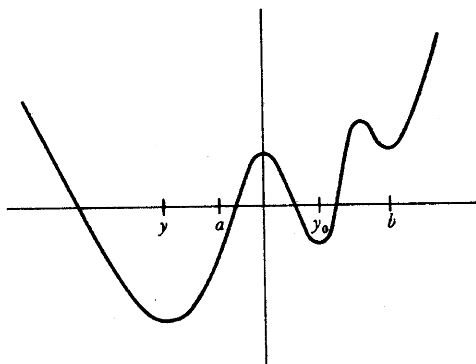


FIGURA 8

impar.) La demostración depende del teorema 7, pero hace falta una aplicación artificiosa del mismo. Podemos aplicar el teorema 7 a cualquier intervalo $[a, b]$, y obtener así un punto y_0 tal que $f(y_0)$ es el valor mínimo de f en $[a, b]$; pero si ocurre que $[a, b]$ es, por ejemplo, el intervalo de la figura 8, entonces el punto y_0 no será aquel en que f alcanza su valor mínimo para toda la recta. Toda la demostración del siguiente teorema se basa en la elección de $[a, b]$ de modo que esto no pueda ocurrir.

TEOREMA 10

Si n es par y $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, entonces existe un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x.

DEMOSTRACIÓN

Lo mismo que en el teorema 9, si

$$M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \ . \ . \ . \ , 2n|a_0|),$$

entonces para todo x con $|x| \geq M$, tenemos

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdot \cdot \cdot + \frac{a_0}{x^n}.$$

Al ser n par, $x^n \geq 0$ para todo x, de modo que

$$\frac{x^n}{2} \leq x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x),$$

siempre que $|x| \geq M$. Consideremos ahora el número $f(0)$. Sea $b > 0$ un número tal que $b^n \geq 2f(0)$ y también $b > M$. Entonces si $x \geq b$, tenemos (figura 9)

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$

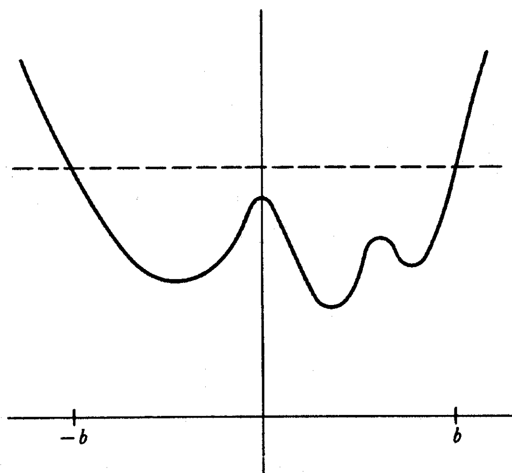


FIGURA 9

Análogamente, si $x \leq -b$, entonces

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{(-b)^n}{2} = \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$

Resumiendo:

si $x \geq b$ o $x \leq -b$, entonces $f(x) \geq f(0)$.

Apliquemos ahora el teorema 7 a la función f en el intervalo $[-b, b]$. Se deduce que existe un número y tal que

(1) si $-b \leq x \leq b$, entonces $f(y) \leq f(x)$.

En particular, $f(y) \leq f(0)$. De este modo

$$(2) \quad \text{si } x \leq -b \text{ o } x \geq b, \text{ entonces } f(x) \geq f(0) \geq f(y).$$

Combinando (1) y (2) vemos que $f(y) \leq f(x)$ para todo x. ▮

El teorema 10 permite ahora demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 11

Consideremos la ecuación

$$(*) \quad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = c,$$

y supongamos que n es par. Entonces existe un número m tal que (*) posee una solución para $c \geq m$ y no posee ninguna para $c < m$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ (figura 10).

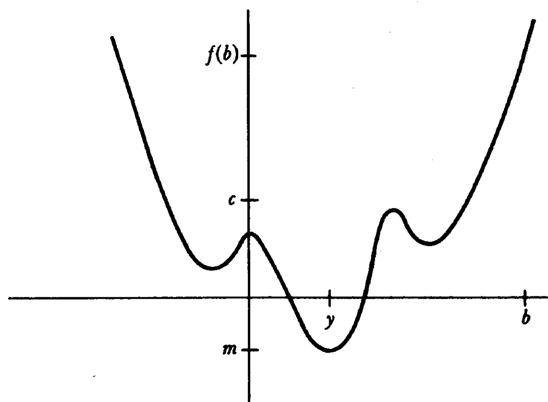


FIGURA 10

Según el teorema 10, existe un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x. Sea $m = f(y)$. Si $c < m$, entonces la ecuación (*) no tiene, evidentemente, ninguna solución, puesto que el primer miembro tiene un valor $\geq m$. Si $c = m$, entonces (*)

tiene y como solución. Finalmente, supongamos $c > m$. Sea b un número tal que $b > y$ y $f(b) > c$. Entonces $f(y) = m < c < f(b)$. En consecuencia, según el teorema 4, existe algún número x en $[y, b]$ tal que $f(x) = c$, con lo que x es una solución de (*). ▌

Estas consecuencias de los teoremas 1, 2 y 3 son las únicas que deduciremos ahora (sin embargo, estos teoremas desempeñarán un papel fundamental en todo lo que hagamos más adelante). Una sola cosa queda por hacer: demostrar los teoremas 1, 2 y 3. Por desgracia, no podemos hacerlo por ahora, ya que, a partir de nuestros conocimientos actuales acerca de los números reales (a saber, P1-P12), una demostración es *imposible.* De que esta infortunada conclusión es cierta podemos convencernos de varias maneras. Por ejemplo, la demostración del teorema 8 descansa solamente en la demostración del teorema 1; si pudiéramos demostrar el teorema 1, entonces la demostración del teorema 8 estaría completa, y así habríamos demostrado que todo número positivo tiene una raíz cuadrada. Según se ha indicado en la parte I, es imposible demostrar esto a partir de P1-P12. Consideremos de nuevo la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}.$$

Si no existiera ningún número x con $x^2 = 2$, entonces f sería continua, puesto que el denominador nunca sería $= 0$. Pero f no está acotada en $[0, 2]$. Así, pues, el teorema 2 depende esencialmente de la existencia de números que no son números racionales, y por lo tanto de alguna propiedad de los reales distinta de las P1-P12.

A pesar de nuestra incapacidad de demostrar los teoremas 1, 2 y 3, hay algunos resultados que reclamamos como ciertos. Si las figuras que hemos trazado tienen alguna conexión con las matemáticas que estamos haciendo, y si nuestra noción de función continua tiene algún grado de conexión con nuestra idea intuitiva, entonces los teoremas 1, 2 y 3 tienen necesariamente que ser verdad. Puesto que una demostración de cualquiera de estos teoremas debe exigir alguna propiedad nueva de **R** hasta ahora pasada por alto, nuestras dificultades presentes nos sugieren la manera de descubrir esta propiedad: Intentemos, por ejemplo, construir una demostración del teorema 1, y ver qué es lo que falla.

Una idea que parece prometedora es la de encontrar el primer punto en que $f(x) = 0$, es decir, el x más pequeño de $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$. Para encontrar este punto, consideremos primero el conjunto A que contiene todos los números x de $[a, b]$ tales que f es negativa en $[a, x]$. En la figura 11, x es uno de estos puntos, mientras que x' no lo es. El mismo conjunto A se indica mediante una línea grue-

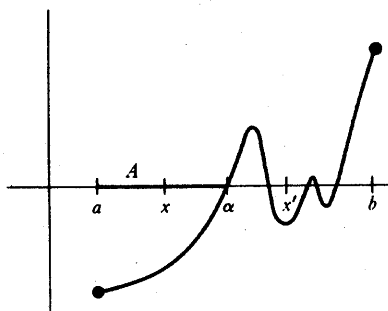


FIGURA 11

sa. Al ser f negativa en a y positiva en b, el conjunto A contiene algunos puntos mayores que a, mientras que todos los puntos suficientemente próximos a b no pertenecen a A. (Estamos aplicando aquí la continuidad de f en $[a, b]$ así como el problema 6-15.)

Supongamos ahora que α es el número más pequeño que es mayor que todos los miembros de A; evidentemente $a < \alpha < b$. Decimos que $f(\alpha) = 0$, y para demostrarlo nos basta con eliminar las posibilidades $f(\alpha) < 0$ y $f(\alpha) > 0$.

Supongamos primero que $f(\alpha) < 0$. Entonces, según el teorema 6-3, $f(x)$ sería menor que 0 para todo x de un intervalo pequeño conteniendo α, en particular para algunos números mayores que α (figura 12); pero esto contradice el hecho de que α es mayor que cualquier miembro de A, puesto que los números mayores estarían también en A. En consecuencia, $f(\alpha) < 0$ es falso.

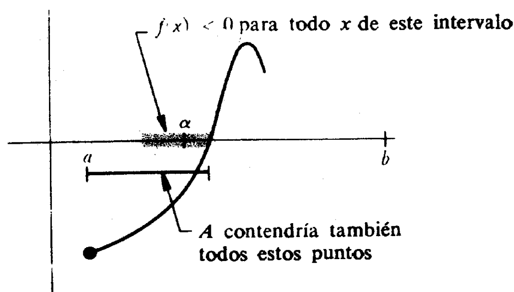


FIGURA 12

Por otra parte, supongamos $f(\alpha) > 0$. Aplicando de nuevo el teorema 6-3 vemos que $f(x)$ sería positivo para todo x de un intervalo pequeño conteniendo α,

en particular para algunos números menores que α (figura 13). Esto significa que estos números más pequeños están todos *fuera* de A. En consecuencia, se podría haber elegido un α todavía más pequeño que sería mayor que todos los miembros de A. Otra vez tenemos una contradicción; $f(\alpha) > 0$ es también falso. Por lo tanto, $f(\alpha) = 0$ y nos tienta decir c. q. d.

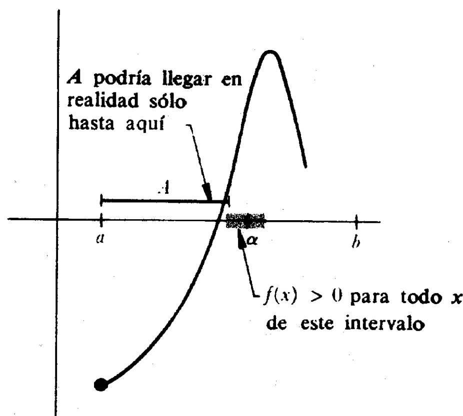


FIGURA 13

Sabemos, sin embargo, que algo debe estar equivocado, puesto que no se ha aplicado ninguna propiedad nueva de **R**, y no hace falta cavilar mucho para encontrar el punto dudoso. Está claro que podemos elegir un número α mayor que todos los miembros de A (por ejemplo, podemos elegir $\alpha = b$), pero no está tan claro que podamos elegir uno ***más pequeño que todos.*** En efecto, supongamos que A consiste en todos los números $x \geq 0$ tales que $x^2 < 2$. Si el número $\sqrt{2}$ no existiera, entonces no existiría un número mínimo mayor que todos los miembros de A; cualquiera que fuera el $y > \sqrt{2}$ que eligiéramos, siempre podríamos elegir uno más pequeño.

Una vez descubierto el sofisma, aparece casi evidente cuál es la propiedad adicional de los números reales que necesitamos. Ahora todo se reduce a explicarla debidamente y aplicarla. Éste es el objetivo del próximo capítulo.

PROBLEMAS

1. Para cada una de las siguientes funciones, decidir cuáles están acotadas superiormente o inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo o mínimo. (Obsérvese que f ***puede*** tener estas

propiedades aun no siendo continua, y aunque el intervalo no sea cerrado.)

(i) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$.
(ii) $f(x) = x^3$ en $(-1, 1)$.
(iii) $f(x) = x^2$ en $\mathbf{R}$.
(iv) $f(x) = x^2$ en $[0, \infty)$.
(v) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ a + 2, & x > a \end{cases}$ en $(-a - 1, a + 1)$. (Será necesario considerar distintos valores posibles para a.)
(vi) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < a \\ a + 2, & x \geq a \end{cases}$ en $[-a - 1, a + 1]$.
(vii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.
(viii) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.
(ix) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ -1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.
(x) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$ en $[0, a]$.
(xi) $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos x + \sqrt{1 + a^2})$ en $[0, a^3]$.
(xii) $f(x) = [x]$ en $[0, a]$.

2. Para cada una de las siguientes funciones polinómicas f, hallar un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún x entre n y $n + 1$.

(i) $f(x) = x^3 - x + 3$.
(ii) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.
(iii) $f(x) = x^5 + x + 1$.
(iv) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

3. Demostrar que existe algún número x tal que

(i) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 119.$

(ii) $\operatorname{sen} x = x - 1$.

4. Este problema es una continuación del problema 3-7.

(a) Si $n - k$ es par, y ≥ 0, hallar una función polinómica de grado n que tenga exactamente k raíces.

(b) Una raíz a de la función polinómica f se dice que tiene **multiplicidad** m si $f(x) = (x - a)^m g(x)$, donde g es una función polinómica que *no* tiene la raíz a. Sea f una función polinómica de grado n. Supóngase que f tiene k raíces, contando las multiplicidades, es decir, supóngase que k es la suma de las multiplicidades de todas las raíces. Demostrar que $n - k$ es par.

5. Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué puede decirse acerca de f?

6. Supóngase que f es una función *continua* en $[-1, 1]$ y tal que $x^2 + (f(x))^2 = 1$ para todo x. [Esto significa que $(x, f(x))$ está siempre sobre el círculo unidad.] Demostrar que o bien es $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ para todo x, o bien $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ para todo x.

7. ¿Cuántas funciones continuas f existen satisfaciendo $(f(x))^2 = x^2$ para todo x?

8. Supóngase que f y g son continuas, que $f^2 = g^2$ y que $f(x) \neq 0$ para todo x. Demostrar que o bien $f(x) = g(x)$ para todo x o bien $f(x) = -g(x)$ para todo x.

9. (a) Supóngase que f es continua, que $f(x) = 0$ solamente para $x = a$, y que $f(x) > 0$ para algún $x > a$ así como para algún $x < a$. ¿Qué puede decirse acerca de $f(x)$ para todo $x \neq a$?

(b) Supongamos ahora que $f(x) > 0$ para algún $x > a$ y que $f(x) < 0$ para algún $x < a$. ¿Qué puede decirse acerca de $f(x)$ para $x \neq a$?

*(c) Del mismo modo, discutir el signo de $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ cuando x e y no son ambos 0.

10. Supóngase que f y g son continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para algún x en $[a, b]$. (Si la demostración no es muy corta es que no está bien.)

11. Supóngase que f es una función continua en $[0, 1]$ y que $f(x)$ está en $[0, 1]$ para todo x (dibujarlo). Demostrar que $f(x) = x$ para algún número x.

12. (a) El problema 11 demuestra que f corta a la diagonal del cuadrado en la figura 14 (línea continua). Demostrar que f debe también cortar la otra diagonal (de trazos).

(b) Demostrar el siguiente hecho más general: Si g es continua en $[0, 1]$ y $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ ó $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, entonces $f(x) = g(x)$ para algún x.

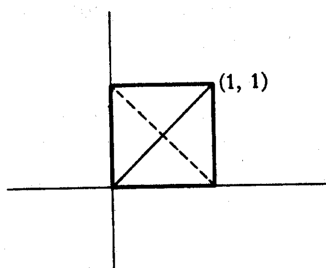


FIGURA 14

13. (a) Sea $f(x) = \text{sen } 1/x$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$. ¿Es f continua en $[-1, 1]$? Demostrar que f satisface la conclusión del teorema de los valores intermedios en $[-1, 1]$; dicho de otro modo, si f toma dos valores comprendidos en $[-1, 1]$, toma también todos los valores intermedios.

*(b) Supóngase que f satisface la conclusión del teorema de los valores intermedios, y que f toma *sólo una vez* cada uno de los valores. Demostrar que f es continua.

*(c) Generalizar al caso en que f toma cada uno de los valores solamente un número finito de veces.

14. Si f es una función continua en $[0, 1]$, sea $\|f\|$ el valor máximo de $|f|$ en $[0, 1]$.

(a) Demostrar que, cualquiera que sea el número c, se cumple $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$.

*(b) Demostrar que $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Dar un ejemplo en el que $\|f + g\| \neq \|f\| + \|g\|$.

(c) Demostrar que $\|h - f\| \leq \|h - g\| + \|g - f\|$.

***15.** Supongamos que ϕ es continua y $\lim_{x \to \infty} \phi(x)/x^n = 0 = \lim_{x \to -\infty} \phi(x)/x^n$.

(a) Demostrar que si n es impar, entonces existe un número x tal que $x^n + \phi(x) = 0$.

(b) Demostrar que si n es par, entonces existe un número y tal que $y^n + \phi(y) \leq x^n + \phi(x)$ para todo x.

Indicación: ¿Qué demostraciones se trata de comprobar que el lector ha comprendido en este problema?

***16.** Sea f una función polinómica cualquiera. Demostrar que existe algún número y tal que $|f(y)| \leq |f(x)|$ para todo x.

***17.** Supóngase que f es una función continua con $f(x) > 0$ para todo x, y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to -\infty} f(x)$. (Dibujarlo.) Demostrar que existe algún número y tal que $f(y) \geq f(x)$ para todo x.

***18.** (a) Supóngase que f es continua en $[a, b]$, y sea x un número cualquiera. Demostrar que existe un punto en la gráfica de f que es, entre todos, el más próximo a $(x, 0)$; en otras palabras, existe algún y en $[a, b]$ tal que la distancia desde $(x, 0)$ a $(y, f(y))$ es $\leq$ distancia de $(x, 0)$ a $(z, f(z))$ para todo z de $[a, b]$. (Véase la figura 15.)

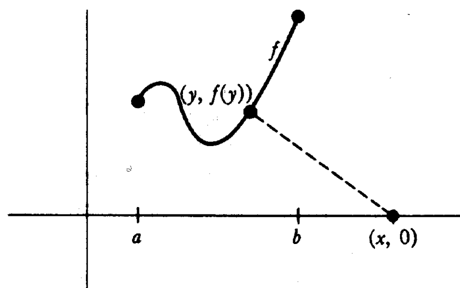


FIGURA 15

(b) Demostrar que esta misma afirmación no es necesariamente cierta si $[a, b]$ se sustituye por (a, b).

(c) Demostrar que la afirmación se cumple si $[a, b]$ se sustituye por **R**.

(d) En los casos (a) y (c), sea $g(x)$ la mínima distancia de $(x, 0)$ a un punto de la gráfica de f. Demostrar que $g(y) \leq g(x) + |x - y|$, y deducir que g es continua.

(e) Demostrar que existen números x_0 y x_1 en $[a, b]$ tales que la distancia de $(x_0, 0)$ a $(x_1, f(x_1))$ es $\leq$ la distancia de $(x_0', 0)$ a $(x_1', f(x_1'))$, cualesquiera que sean x_0', x_1' en $[a, b]$.

****19.** (a) Supóngase que f es continua en $[0, 1]$ y $f(0) = f(1)$. Sea n un número natural cualquiera. Demostrar que existe algún número x tal que $f(x) = f(x + 1/n)$, como se indica en la figura 16 para $n = 4$. Indicación: Considérese la función $g(x) = f(x) - f(x + 1/n)$; ¿qué ocurriría si $g(x) \neq 0$ para todo x?

(b) Supóngase que $0 < a < 1$ pero que a es distinto de $1/n$ cualquiera que sea el número natural n. Hallar una función f que sea continua en $[0, 1]$ y que satisfaga $f(0) = f(1)$, pero que no satisfaga $f(x) = f(x + a)$ para ningún x.

****20.** (a) Demostrar que no existe ninguna función continua f definida en **R** que tome exactamente dos veces cada uno de los valores. Indicación: Si

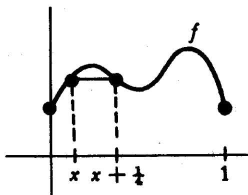


FIGURA 16

$f(a) = f(b)$ para $a < b$, entonces, o bien $f(x) > f(a)$ para todo x de (a, b), o bien $f(x) < f(a)$ para todo x de (a, b). ¿Por qué? En el primer caso todos los valores próximos a $f(a)$, pero ligeramente mayores que $f(a)$, son alcanzados en algún punto de (a, b); esto implica que $f(x) < f(a)$ para $x < a$ y $x > b$.

(b) Afinar la parte (a) demostrando que no existe ninguna función continua f ... tome cada valor ya sea 0 ó dos veces, es decir, que tome exactamente dos veces todos los valores que tome. Indicación: La observación precedente implica que f tiene, ya sea un máximo o un mínimo (el cual debe ser alcanzado dos veces). ¿Qué puede decirse acerca de los valores próximos al máximo?

(c) Hallar una función continua f que tome todos los valores exactamente tres veces. De modo más general, hallar una función que tome todos los valores exactamente n veces, si n es impar.

(d) Demostrar que si n es par, entonces no existe ninguna función continua f que tome todos los valores exactamente n veces. Indicación: Para tratar por ejemplo el caso $n = 4$, póngase $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$. Entonces o bien $f(x) > 0$ para todo x en dos de los tres intervalos (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), o bien $f(x) < 0$ para todo x en dos de estos tres intervalos.

CAPÍTULO

8

COTAS SUPERIORES MÍNIMAS

Este capítulo revela la propiedad más importante de los números reales. Sin embargo, es simplemente una continuación del capítulo 7; el camino a seguir ya ha sido indicado, e insistir sobre ello no sería más que una demora sin provecho.

DEFINICIÓN

Un conjunto A de números reales se dice que es **acotado superiormente** si existe un número x tal que

$$x \geqq a \text{ para todo } a \text{ de } A.$$

Un número x con esta propiedad se dice que es una **cota superior** de A.

Evidentemente A está acotado superiormente si y sólo si existe un número x que sea cota superior de A (y en este caso habrá muchas cotas superiores de A); se suele decir abreviadamente que «A tiene una cota superior» queriendo decir que existe un número que es cota superior de A.

Obsérvese que el término «acotado superiormente» ha sido utilizado de dos maneras: primero en el capítulo 7, con referencia a funciones, y ahora con referencia a conjuntos. Este uso dual no debe ser causa de confusión, puesto que quedará siempre claro si de lo que estamos hablando es de un conjunto de núme-

ros o de una función. Además, las dos definiciones están íntimamente relacionadas: si A es el conjunto $\{f(x): a \leq x \leq b\}$ entonces la función f está acotada superiormente en $[a, b]$ si y sólo si el conjunto A está acotado superiormente.

El conjunto total **R** de números reales, y los números naturales **N**, son ejemplos ambos de conjuntos que *no* están acotados superiormente. Un ejemplo de conjunto que *está* acotado superiormente es

$$A = \{x: 0 \leq x < 1\}.$$

Para demostrar que A está acotado superiormente, nos basta con exhibir alguna cota superior de A, lo cual es bastante fácil; por ejemplo, 138 es una cota superior de A, e igualmente lo son 2, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{4}$ y 1. Evidentemente, 1 es la cota superior mínima de A; aunque la frase que acabamos de introducir se comprende por sí misma, para evitar cualquier posible confusión (en particular para estar seguros de saber todos lo que significa el superlativo de «menor»), vamos a dar una definición explícita.

DEFINICIÓN

Se dice que un número x es una **cota superior mínima** de A si

(1) x es cota superior de A,
y (2) si y es una cota superior de A, entonces $x \leq y$.

El uso del artículo indefinido «un» en esta definición ha sido sencillamente una concesión a la ignorancia temporal. Una vez dada la definición precisa, se ve fácilmente que si x e y son ambos cotas superiores mínimas de A, entonces $x = y$. En efecto, en este caso

$x \leq y$, puesto que y es una cota superior, y x es una cota superior mínima,
e $y \leq x$, puesto que x es una cota superior, e y es una cota superior mínima;

se sigue que $x = y$. Por esta razón hablamos de *la* cota superior mínima de A. El término **supremo de** A es sinónimo y tiene una ventaja: se presta a la muy cómoda abreviación

$$\sup A$$

y nos dispensa de otras abreviaciones.*

Existe una serie de importantes definiciones, análogas a las que ya hemos dado, y que ahora podrán tratarse con más brevedad. Un conjunto A de números reales está **acotado inferiormente** si existe un número x tal que

$$x \leq a \quad \text{para todo } a \text{ en } A.$$

Un tal número x recibe el nombre de **cota inferior de A.** Un número x es la **cota inferior máxima** de A si

(1) x es una cota inferior de A,
y (2) si y es una cota inferior de A, entonces $x \geq y$.

La cota inferior máxima de A es también llamada **ínfimo** de A, y tiene la abreviación

$$\inf A. \quad **$$

Hemos omitido hasta aquí un detalle: la cuestión de cuáles son los conjuntos que tienen por lo menos una, y en consecuencia exactamente una, cota superior mínima o cota inferior máxima. Consideraremos únicamente las cotas superiores mínimas, ya que con ello, las cuestiones relativas a cotas inferiores máximas se resolverán fácilmente por analogía (problema 2).

Si A no está acotado superiormente, entonces A no tiene cota superior en absoluto, de modo que evidentemente A no puede tener cota superior mínima. Se tiene la tentación de afirmar que siempre que A tiene *alguna* cota superior, tiene cota superior mínima, pero, como ocurre con el principio de inducción matemática, este aserto puede dejar de ser cierto de una manera bastante especial. Si $A = \emptyset$, entonces A está acotado superiormente. En efecto, cualquier número x es una cota superior de $\emptyset$:

$$x \geq y \quad \text{para todo } y \text{ de } \emptyset,$$

* El autor hace constar aquí que en inglés se usa la abreviatura «lub A», por «least upper bound», que significa cota superior mínima. Hemos omitido la traducción del párrafo puesto que la abreviatura correspondiente en castellano, que sería «csm A», no es utilizada. (Nota del traductor.)

** Una abreviatura también usada a veces en inglés es «glb A» que procede de «greatest lower bound» = cota inferior máxima. Nos remitimos a la nota anterior. (Nota del traductor.)

simplemente porque no existe ningún y en $\emptyset$. Puesto que *todo* número es una cota superior de $\emptyset$, no existe evidentemente ninguna cota superior mínima para $\emptyset$. Prescindiendo, sin embargo, de esta excepción trivial, nuestro aserto es verdad, y por cierto muy importante, tan importante que vale la pena considerarlo en detalle. Estamos finalmente en condiciones de establecer la última propiedad que necesitamos de los números reales.

(P13) (Propiedad de la cota superior mínima.) Si A es un conjunto de números reales, $A \neq \emptyset$, y A está acotado superiormente, entonces A tiene una cota superior mínima.

Es posible que la propiedad P13 llame la atención del lector por su falta de originalidad, pero ésta es, precisamente, una de sus virtudes. Para completar nuestra lista de propiedades básicas de los números reales no nos hace falta ninguna proposición abstrusa, sino únicamente una propiedad tan sencilla que puede asombrarnos el que nos haya podido pasar por alto. Por supuesto, la propiedad de la cota superior mínima no es, en realidad, tan inocente como parece; después de todo, *no* se cumple para los números racionales **Q**. Por ejemplo, si A es el conjunto de todos los números racionales x que satisfacen $x^2 < 2$, entonces no existe ningún número *racional* y que sea cota superior de A y que sea menor o igual que cualquier otro número *racional* que sea cota superior de A. La importancia de la propiedad P13 aparecerá cada vez más clara, pero sólo gradualmente. Sin embargo, estamos ya en condiciones de demostrar su poder, dando las demostraciones que se omitieron en el capítulo 7.

TEOREMA 7-1

Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe algún número x en $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$.

DEMOSTRACIÓN

Nuestra demostración es simplemente una versión rigurosa del esquema desarrollado al final del capítulo 7: vamos a localizar el número x de $[a, b]$ más pequeño con $f(x) = 0$.

Definamos el conjunto A, dibujado en la figura 1, como sigue:

$$A = \{x : a \leq x \leq b, \text{ y } f \text{ es negativa en el intervalo } [a, x]\}.$$

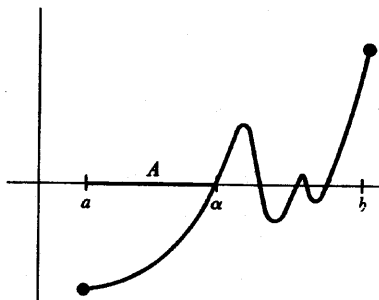


FIGURA 1

Evidentemente $A \neq \emptyset$, puesto que a está en A; en efecto, existe algún $\delta > 0$ tal que A contiene todos los puntos x que satisfacen $a \leq x < a + \delta$; esto se sigue del problema 6-15, puesto que f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0$. Análogamente, b es una cota superior de A y existe, en efecto, un $\delta > 0$ tal que todos los puntos x que satisfacen $b - \delta < x \leq b$ son cotas superiores de A; esto es también consecuencia del problema 6-15, puesto que $f(b) > 0$.

De estas observaciones se sigue que A tiene una cota superior mínima α y que $a < \alpha < b$. Queremos ahora demostrar que $f(\alpha) = 0$, eliminando las posibilidades $f(\alpha) < 0$ y $f(\alpha) > 0$.

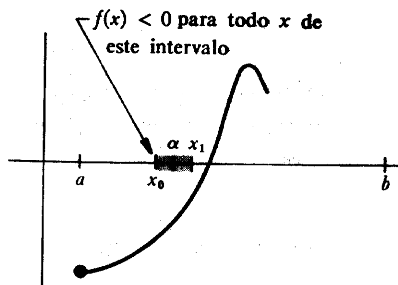


FIGURA 2

Supongamos primero que $f(\alpha) < 0$. Según el teorema 6-3, existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$ (figura 2). Ahora bien, existe algún número x_0 en A que satisface $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$ (pues de otro modo α no sería la cota superior *mínima* de A). Esto significa que f es negativa en todo el intervalo $[a, x_0]$. Pero si x_1 es un número comprendido entre α y $\alpha + \delta$, entonces f es también negativa en todo el intervalo $[x_0, x_1]$. Por lo tanto, f es negativa en el intervalo $[a, x_1]$, de modo que x_1 está en A. Pero esto contradice el hecho de que a es cota superior de A; nuestra suposición original de que $f(\alpha) < 0$ debe, pues, ser falsa.

Supongamos, por otra parte, que $f(\alpha) > 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$ (figura 3). De nuevo sabemos que existe un x_0 en A que satisface $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$; pero esto significa que f es negativa en $[a, x_0]$, lo cual es imposible, puesto que $f(x_0) > 0$. De este modo la suposición $f(\alpha) > 0$ lleva también a una contradicción, quedando $f(\alpha) = 0$ como única alternativa posible. ▮

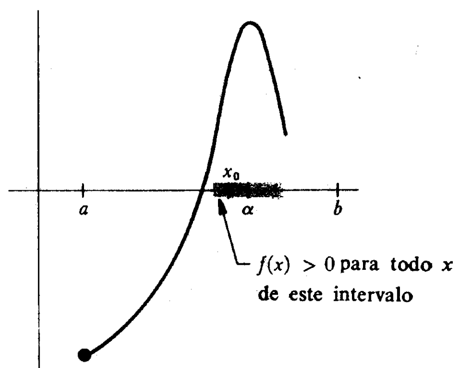


FIGURA 3

Las demostraciones de los teoremas 2 y 3 del capítulo 7 exigen un resultado preliminar sencillo, que en gran parte desempeña el mismo papel que el teorema 6-3 en la demostración anterior.

TEOREMA 1

Si f es continua en a, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que f está acotada superiormente en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ (véase la figura 4).

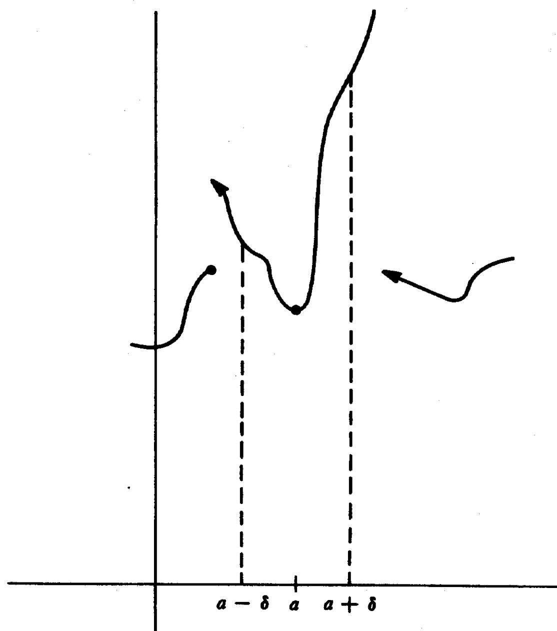


FIGURA 4

DEMOSTRACIÓN

Puesto que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, existe, para todo $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Basta sólo aplicar este aserto a algún ε particular (cualquiera de ellos vale), por ejemplo, $\varepsilon = 1$. Deducimos que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < 1.$$

Se sigue, en particular, que si $|x - a| < \delta$, entonces $f(x) - f(a) < 1$. Esto concluye la demostración: En el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ la función f está acotada superiormente por $f(a) + 1$. ∎

Apenas debería hacer falta añadir que ahora podemos demostrar también

que f está acotada inferiormente en algún intervalo $(a-\delta, a+\delta)$, y finalmente, que f está acotada en algún intervalo abierto que contiene a.

Más importante aún es la observación de que si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que f está acotada en el conjunto $\{x : a \leq x < a+\delta\}$ y una observación análoga se puede hacer si $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$. Una vez hechas estas observaciones (y suponiendo que el lector las sabrá demostrar), vamos a abordar nuestro segundo teorema importante.

TEOREMA 7-2

Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN

Sea

$$A = \{x : a \leq x \leq b \text{ y } f \text{ está acotada superiormente en } [a, x]\}.$$

Evidentemente, $A \neq \emptyset$ (puesto que a está en A), y A está acotado superiormente (por b), de modo que A tiene una cota superior mínima α. Obsérvese que estamos aplicando aquí el término «acotado superiormente» lo mismo al conjunto A, que puede visualizarse como situado sobre el eje horizontal, que a la función f, es decir, a los conjuntos $\{f(y) : a \leq y \leq x\}$ que pueden visualizarse como situados sobre el eje vertical (figura 5).

Nuestro primer paso consistirá en demostrar que en realidad se tiene $\alpha = b$. Supongamos, por el contrario, que $\alpha < b$. Según el teorema 1 existe $\delta > 0$ tal que f está acotada en $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$. Puesto que α es la cota superior mínima de A existe algún x_0 en A que satisface $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$. Esto significa que f está acotada en $[a, x_0]$. Pero si x_1 es un número cualquiera con $\alpha < x_1 < \alpha + \delta$, entonces f está también acotada en $[x_0, x_1]$. Por lo tanto f está también acotada en $[a, x_1]$, de modo que x_1 está en A, en contradicción con el hecho de que α es una cota superior de A. Esta contradicción demuestra que $\alpha = b$. Un detalle debe ser destacado: Esta demostración suponía implícitamente que $a < \alpha$ [de modo que f estaría definida en algún intervalo $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$]; la posibilidad $a = \alpha$ puede excluirse análogamente, haciendo uso de la existencia de un $\delta > 0$ tal que f está acotada en $\{x : a \leq x < a+\delta\}$.

La demostración no es completa del todo; sabemos solamente que f está aco-

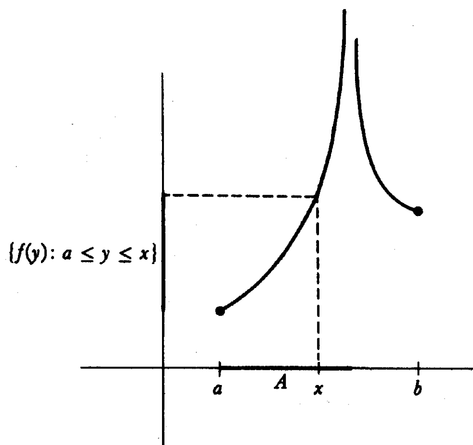


FIGURA 5

tada en $[a, x]$ para todo $x < b$, no necesariamente que f esté acotada en $[a, b]$. Sin embargo, sólo hace falta añadir un pequeño razonamiento.

Existe un $\delta > 0$ tal que f está acotada en $\{x : b - \delta < x \leq b\}$. Existe x_0 en A tal que $b - \delta < x_0 < b$. Así, pues, f está acotada en $[a, x_0]$ y también en $[x_0, b]$, de modo que f está acotada en $[a, b]$. ▌

Para la demostración del tercer teorema importante recurrimos a un artificio.

TEOREMA 7-3

Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe un número y en $[a, b]$ tal que $f(y) > f(x)$ para todo x de $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN

Sabemos ya que f está acotada en $[a, b]$, lo cual significa que el conjunto

$$\{f(x) : x \text{ en } [a, b]\}$$

está acotado. Evidentemente este conjunto no es $\emptyset$, de modo que tiene una cota superior mínima α. Puesto que $\alpha \geq f(x)$ para x en $[a, b]$, basta demostrar que $\alpha = f(y)$ para algún y en $[a, b]$.

Supongamos, por el contrario, que $\alpha \neq f(y)$ para todo y de $[a, b]$. Entonces la función g definida por

$$g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)}, \quad x \text{ en } [a, b]$$

es continua en $[a, b]$, puesto que el denominador del segundo miembro no es nunca 0. Por otra parte, α es la cota superior mínima de $\{f(x) : x \text{ en } [a, b]\}$; esto significa que

$$\text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } x \text{ en } [a, b] \text{ con } \alpha - f(x) < \varepsilon.$$

Esto significa a su vez que

$$\text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } x \text{ en } [a, b] \text{ con } g(x) > 1/\varepsilon.$$

Pero *esto* significa que g no está acotada en $[a, b]$, en contradicción con el teorema anterior. ▮

Al comienzo de este capítulo se ofreció el conjunto **N** de los números naturales como ejemplo de conjunto no acotado. Ahora vamos a *demostrar* que **N** *es* no acotado. Después de los difíciles teoremas demostrados en este capítulo, el lector puede quedar sorprendido de encontrarse con un teorema tan «evidente». Si esto es así, quizá la causa sea el que se haya dejado influir demasiado fuertemente por la imagen geométrica de **R**. Es posible que diga «he aquí, los números reales son así



de modo que todo número x está comprendido entre dos enteros n, $n + 1$ (a no ser que x mismo sea entero)». Sin embargo, un raciocinio basado sobre una imagen geométrica no constituye una demostración y la misma imagen geométrica contiene una suposición: que si se colocan en fila segmentos unitarios con los extremos tocándose se alcanzará eventualmente un segmento mayor que cualquier segmento dado. Este axioma, con frecuencia omitido en una primera introducción a la geometría, se suele atribuir (no con absoluta justicia) a Arquímedes, y la propiedad correspondiente de los números, el que **N** no está acotado, recibe el nombre de *propiedad arquimediana* de los números reales. Esta propiedad *no* es consecuencia de P1-P12 (véase la referencia [17] de la bibliografía), si bien se cumple por supuesto para **Q**. Con P13, sin embargo, ya no hay más problemas.

TEOREMA 2

$\mathbf{N}$ no está acotado superiormente.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $\mathbf{N}$ estuviese acotado superiormente. Puesto que $\mathbf{N} \neq \emptyset$, existiría una cota superior mínima α para $\mathbf{N}$. Entonces

$$\alpha \geq n \qquad \text{para todo } n \text{ de } \mathbf{N}.$$

En consecuencia,

$$\alpha \geq n + 1 \quad \text{para todo } n \text{ de } \mathbf{N},$$

puesto que $n + 1$ está en $\mathbf{N}$ si n está en $\mathbf{N}$. Pero esto significa que

$$\alpha - 1 \geq n \quad \text{para todo } n \text{ de } \mathbf{N},$$

y *esto último* significa que $\alpha - 1$ es también una cota superior de $\mathbf{N}$, en contradicción con el hecho de que α es la cota superior mínima. ▌

Existe una consecuencia del teorema 2 (en realidad una formulación equivalente) que muchas veces hemos supuesto implícitamente.

TEOREMA 3

Para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n con $1/n < \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que esto no es así; entonces $1/n \geq \varepsilon$ para todo n de $\mathbf{N}$. Así, pues, $n \leq 1/\varepsilon$ para todo n de $\mathbf{N}$. Pero esto significa que $1/\varepsilon$ es una cota superior de $\mathbf{N}$, en contradicción con el teorema 2. ▌

Una ojeada rápida al capítulo 6 hará ver que el resultado del teorema 3 fue aplicado en la discusión de muchos ejemplos. Por supuesto, no se disponía por entonces del teorema 3, pero los ejemplos eran tan importantes que para introducirlos se hizo un poco de trampa. Como justificación parcial por esta falta de honestidad, podemos decir que este resultado no se ha aplicado nunca en la de-

mostración de un *teorema*, pero si, a pesar de todo, el lector encuentra su fe debilitada, puede pasar revista a todas las demostraciones dadas hasta ahora. Afortunadamente ya no serán necesarias nuevas decepciones. Hemos establecido ahora todas las propiedades de los números reales que podamos necesitar. En adelante ya no habrá mentiras.

PROBLEMAS

1. Hallar la cota superior mínima y la cota inferior máxima (si existen) de los siguientes conjuntos. Decidir también qué conjuntos tienen elemento máximo o elemento mínimo (es decir, decidir cuándo la cota superior mínima y la cota inferior máxima pertenecen al conjunto).

(i) $\left\{\frac{1}{n}: n \text{ en } \mathbf{N}\right\}$.

(ii) $\left\{\frac{1}{n}: n \text{ en } \mathbf{Z} \text{ y } n \neq 0\right\}$.

(iii) $\{x: x = 0 \text{ ó } x = 1/n \text{ para algún } n \text{ en } \mathbf{N}\}$.

(iv) $\{x: 0 \leq x \leq \sqrt{2}$ y x es racional

(v) $\{x: x^2 + x + 1 \geq 0\}$.

(vi) $\{x: x^2 + x - 1 < 0\}$.

(vii) $\{x: x < 0 \text{ y } x^2 + x - 1 < 0\}$.

(viii) $\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n: n \text{ en } \mathbf{N}\right\}$.

2. (a) Supongamos que $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente. Designemos por $-A$ el conjunto de todos los $-x$ con x en A. Demostrar que $-A \neq \emptyset$, que $-A$ está acotado superiormente, y que $-\sup(-A)$ es la cota inferior máxima de A.

(b) Si $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente, sea B el conjunto de todas las cotas inferiores de A: Demostrar que $B \neq \emptyset$, que B está acotado superiormente, y que B es la cota inferior máxima de A.

3. Sea f una función continua en $[a, b]$ con $f(a) < 0 < f(b)$.

(a) La demostración del teorema 1 estableció que existe un x mínimo en $[a, b]$ con $f(x) = 0$. ¿Existe necesariamente un penúltimo elemento x en $[a, b]$ con $f(x) = 0$? Demostrar que existe en $[a, b]$ un x máximo

con $f(x) = 0$. (Inténtese dar una demostración fácil considerando una nueva función muy relacionada con f.)

(b) La demostración del teorema 1 dependía de la consideración de $A = \{x : a \leq x \leq b$ y f es negativa en $[a, x]\}$. Dese otra demostración del teorema 1, que dependa de la consideración de $B = \{x : a \leq x \leq b$ y $f(x) < 0\}$. ¿En qué punto x de $[a, b]$ con $f(x) = 0$ tendrá que localizar esta demostración? Dese un ejemplo en el que los conjuntos A y B no coincidan.

4. (a) Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $f(a) = f(b) = 0$. Supóngase también que $f(x_0) > 0$ para algún x_0 en $[a, b]$. Demostrar que existen números c y d con $a \leq c < x_0 < d \leq b$ y tales que $f(c) = f(d) = 0$ pero $f(x) > 0$ para todo x de (c, d). Indicación: Será útil aplicar el problema anterior.

(b) Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $f(a) < f(b)$. Demostrar que hay números c y d con $a \leq c < d \leq b$ tales que $f(c) = f(a)$ y $f(d) = f(b)$ y $f(a) < f(x) < f(d)$ para todo x de (c, d).

5. (a) Supóngase que $y - x > 1$. Demostrar que existe un entero k tal que $x < k < y$. Indicación: Sea l el entero máximo que satisface $l \leq x$ y considérese $l + 1$.

(b) Supóngase $x < y$. Demostrar que existe un número racional r tal que $x < r < y$. Indicación: Si $1/n < y - x$, entonces $ny - nx > 1$. [Pregunta: ¿Por qué las partes (a) y (b) se han pospuesto hasta este problema?]

(c) Supongamos que $r < s$ son números racionales. Demostrar que existe un número irracional entre r y s. Indicación: Para empezar, es sabido que existe un número irracional entre 0 y 1.

(d) Supongamos que $x < y$. Demostrar que existe un número irracional entre x e y. Indicación: No hace falta trabajar más; esto es consecuencia de (b) y (c).

***6.** Se dice que un conjunto A de números reales es **denso** si todo intervalo abierto contiene un punto de A. Por ejemplo, el problema 5 demuestra que el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales son ambos densos.

(a) Demostrar que si f es continua y $f(x) = 0$ para todos los números x de un conjunto denso A, entonces $f(x) = 0$ para todo x.

(b) Demostrar que si f y g son continuas y $f(x) = g(x)$ para todo x de un conjunto denso A, entonces $f(x) = g(x)$ para todo x.

(c) Si suponemos en vez que $f(x) \geq g(x)$ para todo x de A, demostrar que $f(x) \geq g(x)$ para todo x. ¿Puede ser sustituido $\geq$ por $>$ por todas partes?

7. Demostrar que si f es continua y $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y, en-

tonces existe un número c tal que $f(x) = cx$ para todo x. (Esta conclusión puede demostrarse sencillamente combinando los resultados de los dos problemas anteriores.) Punto de información: *Existen* funciones *no continuas* f que satisfacen $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y, pero este hecho no lo podemos demostrar ahora; esta cuestión tan sencilla encierra de hecho ideas que por lo general no se mencionan en los cursos para pregraduados. La bibliografía contiene referencias.

***8.** Supongamos que f es una función tal que $f(a) \leq f(b)$ siempre que $a < b$ (figura 6).

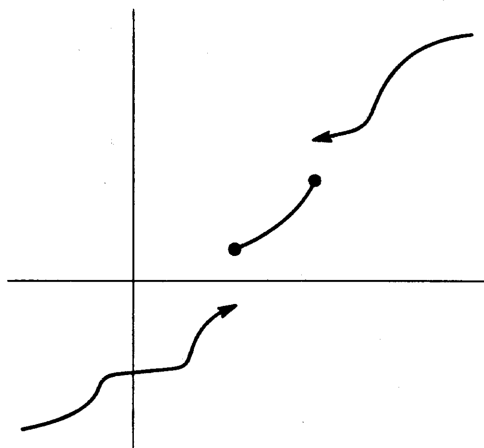


FIGURA 6

(a) Demostrar que $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existen ambos. Indicación: ¿Por qué ponemos este problema en el presente capítulo?

(b) Demostrar que f no tiene nunca una discontinuidad evitable (esta terminología proviene del problema 6-16).

(c) Demostrar que si f satisface las conclusiones del teorema de los valores intermedios, entonces f es continua.

***9.** Si f es una función acotada en $[0, 1]$, sea $|||f||| = \sup \{|f(x)| : x \text{ en } [0, 1]\}$. Demostrar propiedades análogas a las de $\| \;\; \|$ en el problema 7-14.

10. Supongamos $\alpha > 0$. Demostrar que todo número x puede escribirse de manera única en la forma $x = k\alpha + x'$, donde k es un entero, y $0 \leq x' < \alpha$.

11. (a) Supongamos que $a_1, a_2, a_3, \ldots$, es una sucesión de números positivos con $a_{n+1} \leq a_n/2$. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe algún n con $a_n < \varepsilon$.

(b) Supongamos que P es un polígono regular inscrito en un círculo. Si P' es

el polígono regular inscrito de doble número de lados, demostrar que la diferencia entre el área del círculo y el área de P' es menor que la mitad de la diferencia entre el área del círculo y el área de P (utilizar la figura 7).

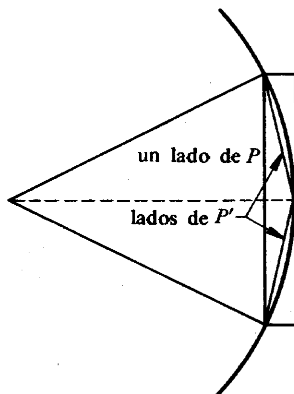


FIGURA 7

(c) Demostrar que existe un polígono regular P inscrito en un círculo y con área tan próxima como se desee al área del círculo. Para hacer la parte (c) se necesitará la parte (a). Esto lo sabían ya los griegos, quienes utilizaron la parte (a) como base para todo su estudio de la proporción y del área. Mediante el cálculo de las áreas de los polígonos, este método («el método exhaustivo») permite el cálculo de π con tanta aproximación como se desee; Arquímedes lo utilizó para demostrar que $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Pero su importancia teórica es mucho mayor que esto:

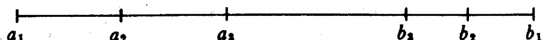
*(d) Utilizando el hecho de que las áreas de dos polígonos regulares con el mismo número de lados están entre sí en la misma relación que los cuadrados de sus lados, demostrar que las áreas de dos círculos están en la misma relación que los cuadrados de sus radios. Indicación: Dedúzcase que suponer que la relación entre las áreas es mayor o menor que la relación entre los cuadrados de los radios lleva a una contradicción. Esto se hará inscribiendo polígonos adecuados.

12. Supongamos que A y B son dos conjuntos no vacíos de números tales que $x \leq y$ para todo x de A y todo y de B.

(a) Demostrar que $\sup A \leq y$ para todo y de B.

(b) Demostrar que $\sup A \leq \inf B$.

13. Sean A y B dos conjuntos de números acotados superiormente, y sea $A + B$ el conjunto de los números $x + y$ con x en A e y en B. Demostrar que $\sup (A + B) = \sup A + \sup B$. Indicación: La desigualdad $\sup (A + B) \leq \sup A + \sup B$ es fácil. ¿Por qué? Para demostrar que $\sup A + \sup B \leq \sup (A + B)$ basta demostrar que $\sup A + \sup B \leq \sup (A + B) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$; empiécese eligiendo x en A e y en B con $\sup A - x < \varepsilon/2$ y $\sup B - y < \varepsilon/2$.

FIGURA 8 

14. (a) Considérese una sucesión de intervalos cerrados $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, ... Supóngase que $a_n \leq a_{n+1}$ y $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n (figura 9). Demostrar que existe un punto x que pertenece a todo I_n.
(b) Demostrar que esta conclusión es falsa si se consideran intervalos abiertos en vez de intervalos cerrados.

El sencillo resultado del problema 14(a) recibe el nombre de «teorema de los intervalos encajados». Puede utilizarse para dar otras demostraciones de los teoremas 1 y 2. El razonamiento adecuado, que se indica en los dos problemas próximos, nos muestra un método general llamado «argumento de bisección».

***15.** Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$. Entonces o bien $f[(a + b)/2] = 0$ ó bien f tiene signos distintos en los extremos del intervalo $[a, (a + b)/2]$, o bien f tiene signos distintos en los extremos del intervalo $[(a + b)/2, b]$. ¿Por qué? Si $f((a + b)/2) \neq 0$ sea I_1 aquel de los dos intervalos en el que f cambia el signo. Divídase I_1 en dos mitades. O bien f es 0 en el punto medio, o bien f cambia de signo en uno de los dos intervalos. Sea I_2 uno de éstos. Continúese de esta manera definiendo I_n para todo n (a no ser que f sea 0 en algún punto medio). Utilícese el teorema de los intervalos encajados para hallar un punto x en el que $f(x) = 0$.

***16.** Supongamos que f fuese continua en $[a, b]$, pero no acotada en $[a, b]$. Entonces f sería no acotada en $[a, (a + b)/2]$ o en $[(a + b)/2, b]$. ¿Por qué? Sea I_2 uno de estos intervalos en los que f es no acotada. Proceder como en el problema 15 para llegar a una contradicción.

17. (a) Sea $A = \{x : x < \alpha\}$. Demostrar lo siguiente (todo es fácil):

(i) Si x está en A e $y < x$, entonces y está en A.
(ii) $A \neq \emptyset$.
(iii) $A \neq \mathbf{R}$.

(iv) Si x está en A, entonces existe algún número x' en A tal que $x < x'$.

(b) Supongamos a la inversa que A satisface (i)-(iv). Demostrar que $A = \{x : x < \sup A\}$.

***18.** Un número x recibe el nombre de **casi cota superior** de A si en A existen sólo un número finito de números y con $y \geq x$. Del mismo modo se define una **casi cota inferior.**

(a) Hallar todas las casi cotas inferiores y las casi cotas superiores de los conjuntos del problema 1.

(b) Supongamos que A es un conjunto infinito acotado. Demostrar que el conjunto B de todas las casi cotas superiores de A es no vacío y acotado inferiormente.

(c) De la parte (b) se sigue que existe $\inf B$; este número recibe el nombre de **límite superior** de A, y se designa por $\overline{\lim}\ A$ o por $\lim \sup A$. Hallar $\overline{\lim}\ A$ para cada uno de los conjuntos A del problema 1.

(d) Definir $\underline{\lim}\ A$ y hallarlo para cada A del problema 1.

***19.** Si A es un conjunto infinito demostrar que

(a) $\underline{\lim}\ A \leq \overline{\lim}\ A$.

(b) $\overline{\lim}\ A \leq \sup A$.

(c) Si $\overline{\lim}\ A < \sup A$, entonces A contiene un elemento máximo.

(d) Hágase lo análogo a (b) y (c) para $\underline{\lim}$.

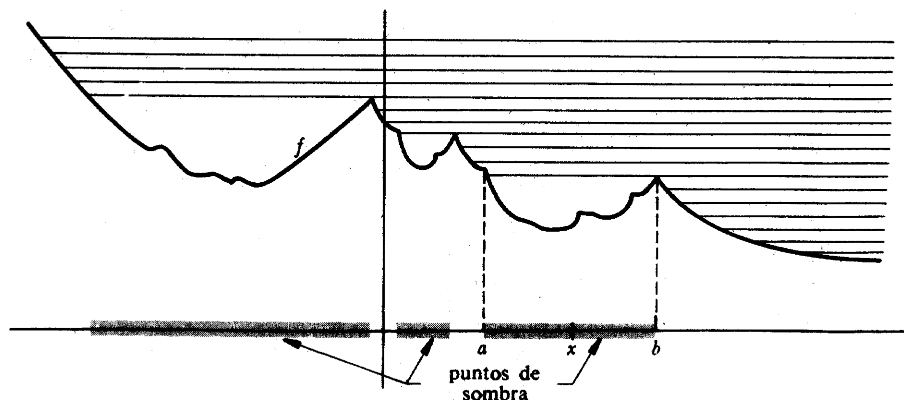


FIGURA 9

***20.** Sea f una función continua en **R**. Un punto x recibe el nombre de **punto de sombra** de f si existe un número $y > x$ con $f(y) > f(x)$. El fundamento de esta terminología se indica en la figura 9; las rectas paralelas son los rayos

de sol que salen por el este (estamos mirando hacia el norte). Supongamos que todos los puntos de (a, b) son puntos de sombra, pero que a y b no lo son.

(a) Demostrar que si x está en (a, b), entonces $f(x) \leq f(b)$. Indicación: Sea $A = \{y : x \leq y \leq b \text{ y } f(x) \leq f(y)\}$. Si sup A fuese menor que b, entonces sup A sería un punto de sombra. Utilizar este hecho para obtener una contradicción al hecho de que b no fuese punto de sombra.

(b) Demostrar ahora que $f(a) \leq f(b)$. (Esto es una consecuencia sencilla de la continuidad.)

(c) Finalmente, utilizando el hecho de que a no es un punto de sombra, demostrar que $f(a) = f(b)$. Este resultado es conocido con el nombre de lema del Sol naciente. Aparte de servir de buena ilustración del uso de las cotas superiores mínimas, se utiliza en la demostración de algunos hermosos teoremas que no aparecen en este libro; véase la página 621.

APÉNDICE. CONTINUIDAD UNIFORME

Una vez llegados al final de los «fundamentos», resulta conveniente derivar nuestra atención a otro concepto fundamental. No es que este concepto vaya a ser crucial para el resto del libro, pero sí ayudará a dejar claros muchos puntos en lo que sigue.

Sabemos que la función $f(x) = x^2$ es continua en a para todo a. En otros términos,

si a es un número cualquiera, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $|x - a| < \delta$, entonces $|x^2 - a^2| < \varepsilon$.

El número δ depende por supuesto de ε. Pero δ *depende también* de a —el δ que hace su papel en a puede no hacerlo en b (figura 1). De hecho está claro que dado $\varepsilon > 0$ no existe ningún $\delta > 0$ que haga su papel para todo a, ni siquiera para todos los a positivos. En efecto, el número $a + \delta/2$ satisface ciertamente $|x - a| < \delta$, pero si es $a > 0$, entonces

$$\left|\left(a + \frac{\delta}{2}\right)^2 - a^2\right| = \left|a\delta + \frac{\delta^2}{4}\right| \geq a\delta,$$

y esto no será $< \varepsilon$ cuando sea $a > \varepsilon/\delta$. (Tenemos aquí una manera, hay que admitir que confusa, de decir en términos de cálculo numérico, que la función f crece cada vez más rápidamente a medida que aumenta a.)

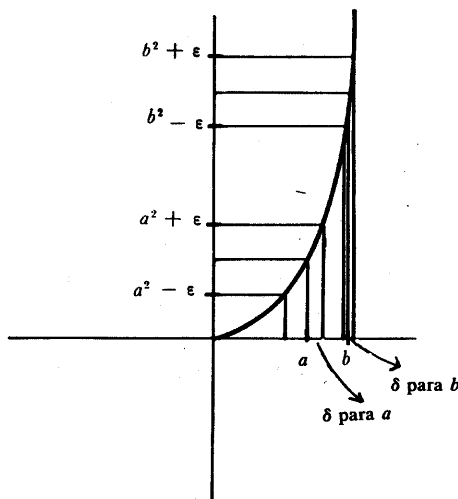


FIGURA 1

Por otra parte, para cualquier $\varepsilon > 0$ *habrá* un $\delta > 0$ que sí haga su papel; para todo a perteneciente a cualquier intervalo $[-N,N]$. De hecho, el δ que sea adecuado para N o $-N$ lo será también para cualquier otro punto del intervalo.

Como ejemplo final, consideremos la función $f(x) = \text{sen } 1/x$, o la función cuya gráfica aparece en la figura 18 de la página 83. Resulta fácil ver que, siempre que sea $\varepsilon < 1$, no existirá ningún $\delta > 0$ que sea bueno para estas funciones en todos los puntos a del intervalo abierto $(0, 1)$.

Estos ejemplos ponen de manifiesto el comportamiento distinto de varias funciones en ciertos intervalos y para señalar esta distinción se precisa de una terminología especial.

DEFINICIÓN

La función f es uniformemente continua en un intervalo A si para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para cualquier x e y de A se cumple

$$\text{si } |x - y| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Hemos visto que una función puede ser continua en toda la recta o en un intervalo abierto y no ser allí uniformemente continua. Por otra parte la función $f(x) = x^2$ sí que resultó ser uniformemente continua en cualquier intervalo cerrado. Esto no tendría que sorprendernos demasiado —la situación es análoga a la que se presenta cuando nos preguntamos si una función es acotada en un intervalo— y nos lleva a la sospecha de que cualquier función que sea continua en un intervalo cerrado es también uniformemente continua en el mismo. Para demostrar esto tendremos que examinar primero un punto delicado.

Supóngase que tenemos dos intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$ con el extremo común b, y una función f continua en $[a, c]$. Sea $\varepsilon > 0$ y supóngase que se cumplen los dos enunciados siguientes:

(i) si x e y están en $[a, b]$ y $|x - y| < \delta_1$, entonces $\delta f(x) - f(y)| < \varepsilon$
(ii) si x e y están en $[b, c]$ y $|x - y| < \delta_2$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Nos gustaría saber si es que existe algún $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ siempre que x e y sean puntos de $[a, c]$ con $|x - y| < \delta$. Nuestra primera inclinación podría ser tomar como δ el mínimo de δ_1 y δ_2. Pero no es difícil ver (figura 2) dónde está el fallo: Podría quedar x en $[a, b]$ e y en $[b, c]$ con lo que ni (i) ni (ii)

nos dirían nada acerca de $|f(x) - f(y)|$. Tendremos que tener pues un poco más de cautela, haciendo uso también de la continuidad de f en b.

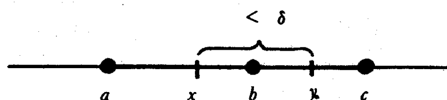


FIGURA 2

LEMA

Sea $a < b < c$ y sea f continua en el intervalo $[a, c]$. Sea $\varepsilon > 0$ y supóngase que los enunciados (i) e (ii) se cumplen. Existe entonces un $\delta > 0$ tal que
si x e y están en $[a, c]$ y $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN

Al ser f continua en b, existe un $\delta_3 > 0$ tal que

$$\text{si } |x - b| < \delta_3, \text{ entonces } |f(x) - f(b)| < \varepsilon/2$$

De ello se sigue que

(iii) si $|x - b| < \delta_3$ y $|y - b| < \delta_3$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Tómese como δ el mínimo de δ_1, δ_2 y δ_3. Decimos que este δ satisface la condición pedida. Supóngase en efecto que x e y son dos puntos cualesquiera de $[a, c]$ con $|x - y| < \delta$. Si x e y están los dos en $[a, b]$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ por (i); si x e y están los dos en $[b, c]$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ por (ii). La única posibilidad que queda es que

$$x < b < y \quad \text{o} \quad y < b < x$$

En cualquiera de estos casos, al ser $|x - y| < \delta$, tenemos también $|x - b| < \delta$. Así pues $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ por (iii). ∎

TEOREMA 1

Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN

Es el truco de siempre, pero tenemos que fijarnos un poco en el mecanismo de la demostración. Para $\varepsilon > 0$ diremos que f es *ε-buena* en $[a, b]$ si existe algún $\delta > 0$ tal que, para todos los y, z de $[a, b]$,

$$\text{si } |y - z| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(z)| < \varepsilon$$

Tratamos pues de demostrar que f es ε-buena en $[a,b]$ para todo $\varepsilon > 0$.

Consideremos un $\varepsilon > 0$ particular cualquiera. Sea

$$A = \{x{:}a \leq x \leq b \text{ y } f \text{ es } \varepsilon\text{-buena en } [a, x]\}$$

Entonces $A \neq \emptyset$ (puesto que a está en A), y A está acotada superiormente (por b), con lo que A tiene un extremo superior α. En realidad tendríamos que escribir α_ε, ya que A y α podrían depender de ε. Pero no lo haremos porque precisamente lo que tratamos de demostrar es que $\alpha = b$ cualquiera que sea ε.

Supongamos que fuera $\alpha < b$. Al ser f continua en α, existe un $\delta_0 > 0$ tal que si $|y - \alpha| < \delta_0$, entonces $|f(y) - f(\alpha)| < \varepsilon/2$. En consecuencia, si $|y - \alpha| < \delta_0$ y $|z - \alpha| < \delta_0$, entonces $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. Así pues f es con seguridad ε-buena en el intervalo $[\alpha - \delta_0, \alpha + \delta_0]$. Por otra parte, al ser α el extremo superior de A, resulta también claro que f es ε-buena en $[a, \alpha + \delta_0]$, con lo que $a + \delta_0$ está en A, en contradicción con el hecho de que α es una cota superior.

Para completar la demostración sólo nos queda hacer ver que $\alpha = b$ está realmente en A. Para esto el razonamiento a seguir es prácticamente el mismo: Al ser f continua en b, existe un $\delta_0 > 0$ tal que, si $|b - y| < \delta_0$, entonces $|f(y) - f(b)| <$ $< \varepsilon/2$. Así pues, f es ε-buena en $|b - \delta_0, b|$. Pero f es también ε-buena en $[a, b - \delta_0]$, con lo que el lema implica que f es ε-buena en $[a, b]$. ▮

PROBLEMAS

1. (a) ¿Para cuál de los valores siguientes de α es la función $f(x) = x^\alpha$ uniformemente continua en $[0, \infty)$: $\alpha = 1/3, 1/2, 2, 3$?
   (b) Hallar una función f que sea continua y acotada en $(0, 1]$, pero no uniformemente continua en $(0, 1]$.
   (c) Hallar una función f que sea continua y acotada en $[0, \infty)$ pero no uniformemente continua en $[0, \infty)$.
2. (a) Demostrar que si f y g son uniformemente continuas en A, también lo es $f + g$.

(b) Demostrar que si f y g son uniformemente continuas y acotadas en A, entonces fg es uniformemente continua en A.

(c) Demostrar que esta conclusión no resulta válida cuando una de las funciones es no acotada.

(d) Supóngase que f es uniformemente continua en A, que g es uniformemente continua en B, y que $f(x)$ está en B para todos los x de A. Demostrar que $g \circ f$ es uniformemente continua en A.

3. Utilizar un «razonamiento de bisección» (página 186) para dar otra demostración del teorema 1.

4. Deducir el teorema 2 como consecuencia del teorema 1.



PARTE DERIVADAS E INTEGRALES

En 1604, en la cumbre de
su carrera científica, Galileo llegó a la conclusión
de que para un movimiento rectilíneo
en el que la velocidad aumenta proporcionalmente
a la distancia recorrida,
la ley del movimiento debía ser
precisamente aquella ($x = ct^2$)
que él había descubierto
en la investigación de la caída de los cuerpos.
Entre 1695 y 1700
ninguno de los números mensuales
de las Acta Eruditorum de Leipzig se publicó
sin artículos de Leibniz,
de los hermanos Bernoulli
o del Marqués de l'Hôpital que trataban,
con notación ligeramente distinta
de la hoy día en uso,
los problemas más variados de
cálculo diferencial, cálculo integral
y del cálculo de variaciones.
Así en el espacio de casi precisamente
un siglo
el cálculo infinitesimal o,
como se suele llamar ahora en inglés,
el «Calculus»,
el instrumento de calcular por excelencia,
fue forjado;
y casi tres siglos de
uso constante no han agotado
este instrumento incomparable.

NICHOLAS BOURBAKI

CAPÍTULO

9

DERIVADAS

La derivada de una función es el primero de los dos conceptos fundamentales de esta sección. Junto con la integral constituye la fuente de la cual deriva el cálculo su aroma particular. Si bien es verdad que el concepto de función es fundamental, que no se puede hacer nada sin límites o continuidad, y que las cotas superiores mínimas son esenciales, todo lo que hemos hecho hasta ahora ha sido una preparación —si ha sido adecuada, esta sección será más fácil que las anteriores— para las ideas verdaderamente luminosas que van a venir, los penetrantes conceptos que son verdaderamente característicos del cálculo infinitesimal.

Quizá (algunos dirían «ciertamente») el interés de las ideas a introducir en esta sección procede de la conexión íntima entre los conceptos matemáticos y ciertas ideas físicas. Muchas definiciones, e incluso algunos teoremas, pueden describirse en términos de problemas físicos a menudo de manera reveladora. De hecho, las necesidades de los físicos constituyeron la inspiración original para estas ideas fundamentales del cálculo, y frecuentemente mencionaremos las interpretaciones físicas. Pero siempre definiremos primero las ideas en forma matemática precisa y discutiremos su significado en términos de problemas matemáticos.

El conjunto de todas las funciones presenta una diversidad tal que es casi imposible descubrir propiedades generales interesantes que convengan a todas ellas. Puesto que las funciones continuas constituyen una clase tan restringida, cabría esperar que se hallaran algunos teoremas no triviales para ellas y la repentina abundancia de teoremas a partir del capítulo 6 muestra que esta esperanza está justificada. Pero los resultados más interesantes y más penetrantes acerca de

funciones sólo se obtendrán cuando limitemos aún más nuestra atención a funciones que tienen mayor derecho aún a recibir el nombre de «razonables», con un comportamiento aún más regular que la mayor parte de las funciones continuas.

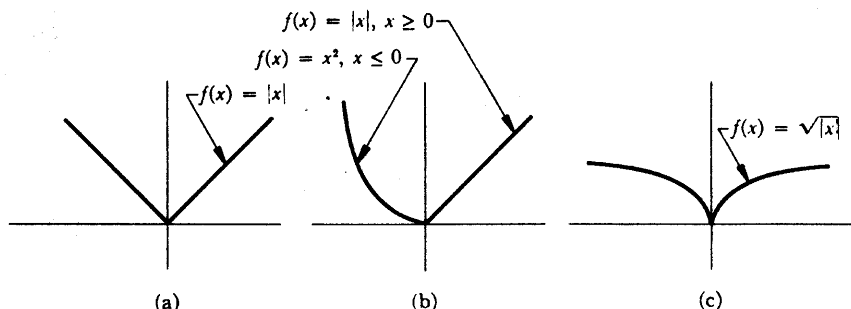


FIGURA 1

La figura 1 ilustra ciertos tipos de comportamiento irregular que pueden presentar las funciones continuas. Las gráficas de estas funciones están «quebradas» en (0, 0), a diferencia de la figura 2, donde es posible trazar una «tangente» en cada punto. Las comillas se han usado para descartar la creencia de que hemos definido «quebradas» o «tangente», aunque estamos indicando que la gráfica puede estar «quebrada» en un punto en el que no se puede trazar una «tangente».

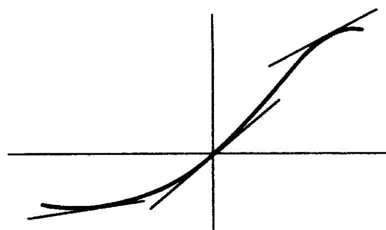


FIGURA 2

Quizá el lector haya notado ya que no se puede definir la tangente como una línea que corta la gráfica solamente una vez; una tal definición sería a la vez demasiado restrictiva y demasiado amplia. Con una tal definición, la recta de la figura 3 no sería tangente a la gráfica de la figura, mientras que la parábola tendría dos tangentes en cada uno de sus puntos (figura 4), y las tres funciones de la figura 5 tendrían más de una tangente en los puntos en que están «quebradas».

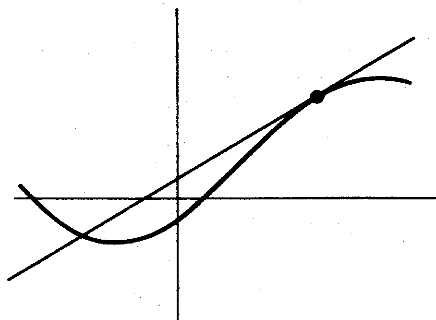


FIGURA 3

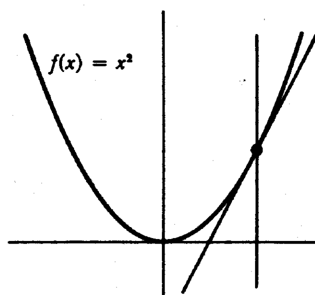
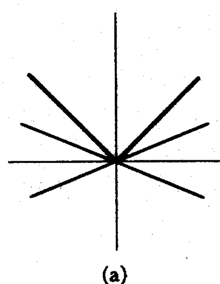
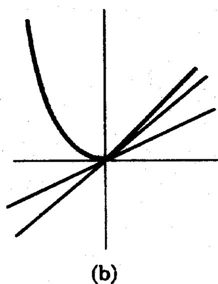


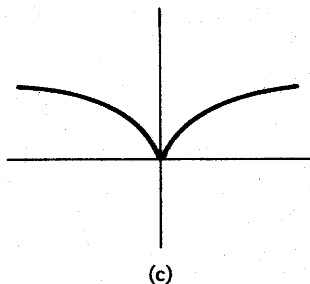
FIGURA 4



(a)



(b)



(c)

FIGURA 5

Una manera más prometedora de abordar la definición de tangente podría ser empezando con «secantes» y utilizando la notación de límites. Si $h \neq 0$, entonces los dos puntos distintos $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$ determinan, como en la figura 6, una recta cuya pendiente es

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Como indica la figura 7, la «tangente» en $(a, f(a))$ parece ser el límite, en algún sentido, de estas «secantes», cuando h se aproxima a 0. Hasta aquí no hemos hablado nunca de «límite» de rectas, pero *podemos* hablar del límite de sus pen-

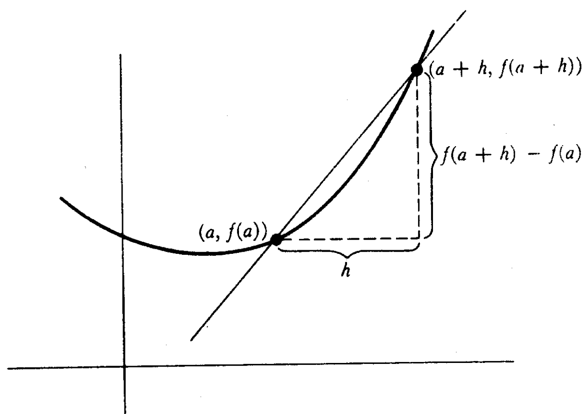


FIGURA 6

dientes: La pendiente de la tangente $(a, f(a))$ debería ser

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

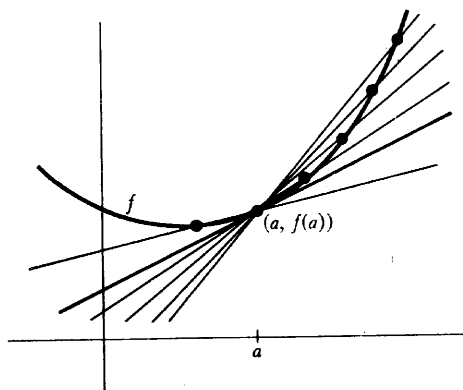


FIGURA 7

Con esto estamos preparados para una definición y algunos comentarios.

DEFINICIÓN

La función f es **derivable en** $\boldsymbol{a}$ si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \text{existe.}$$

En este caso el límite se designa por $\boldsymbol{f'(a)}$ y recibe el nombre de **derivada de** $\boldsymbol{f}$ **en** $\boldsymbol{a}$. (Decimos también que f es **derivable** si f es derivable en a para todo a del dominio de f.)

El primer comentario a nuestra definición es en realidad un añadido; definimos la **tangente** a la gráfica de f en $(a, f(a))$ como la recta que pasa por $(a, f(a))$ y tiene por pendiente $f'(a)$. Esto quiere decir que la tangente en $(a, f(a))$ sólo está definida si f es derivable en a.

El segundo comentario se refiere a la notación. El símbolo $f'(a)$ recuerda ciertamente la notación funcional. En efecto, para cualquier función f designamos por f' a la función cuyo dominio es el conjunto de todos los números a tales que f es derivable en a, y cuyo valor para tal número a es

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

(Para ser muy precisos: f' es el conjunto de todos los pares

$$\left(a, \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}\right)$$

para los que existe $\lim\limits_{h \to 0} [f(a + h) - f(a)]/h$.) La función f' recibe el nombre de **derivada** de f.

Nuestro tercer comentario, algo más largo que los dos anteriores, se refiere a la interpretación física de la derivada. Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de una recta [figura 8(a)] sobre la cual hemos elegido un «origen» O, y una dirección en la cual las distancias a partir de O se escribirán como números positivos, mientras que la distancia a partir de O de los puntos de la otra dirección se escribirán como números negativos. Sea $s(t)$ la distancia de la partícula a O en el tiempo t. La sugestiva notación $s(t)$ ha sido elegida intencionadamente:

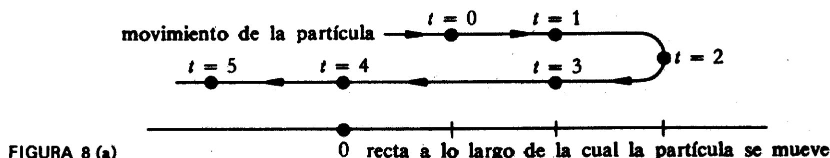


FIGURA 8 (a)

puesto que una distancia $s(t)$ está determinada para cada número t, la situación física nos suministra automáticamente cierta función s. La gráfica de s indica la distancia de la partícula a O sobre el eje vertical, en términos del tiempo, indicado sobre el eje horizontal [figura 8(b)].

El cociente

$$\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$

tiene una interpretación física natural. Es la «velocidad media» de la partícula durante el intervalo de tiempo entre a y $a+h$. Para cualquier partícula a, esta velocidad media depende por supuesto de h. Por otra parte, el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$

depende solamente de a (así como de la función particular s) y existen importantes razones físicas para considerar este límite. Nos gustaría hablar de la «velocidad

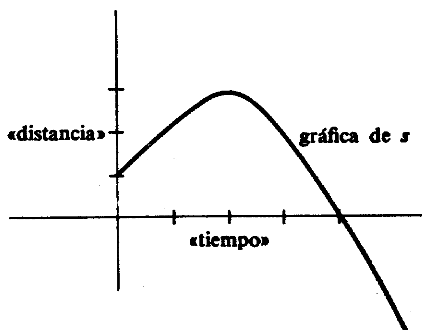


FIGURA 8 (b)

de la partícula en el tiempo a», pero la definición corriente de velocidad es en realidad una definición de velocidad media; la única definición razonable de «velocidad en el tiempo a» (la llamada «velocidad instantánea») es el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}.$$

Definimos así la **velocidad (instantánea)** de la partícula en a como $s'(a)$. Obsérvese que $s'(a)$ puede muy bien ser negativa; el valor absoluto recibe a veces el nombre de **rapidez instantánea**).*

Es importante darse cuenta de que la velocidad instantánea es un concepto teórico, y una abstracción, que no corresponde exactamente a ninguna cantidad observable. Aunque no sería justo decir que la velocidad instantánea no tiene nada que ver con la velocidad media, recuérdese que $s'(t)$ no es

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

para ningún h particular, sino únicamente el límite de estas velocidades medias, cuando h tiende hacia 0. Así, pues, cuando las velocidades se miden en física, lo que un físico mide realmente es una velocidad media a lo largo de algún intervalo de tiempo (muy pequeño); no puede esperarse que un tal procedimiento dé una respuesta exacta, pero esto no constituye, en realidad, ningún defecto, ya que las mediciones físicas de todos modos no pueden ser nunca exactas.

La velocidad de una partícula recibe a veces el nombre de «tasa de variación de su posición». Esta noción de la derivada, como una tasa de variación, se aplica a otras situaciones físicas en las cuales alguna cantidad varía con el tiempo. Por ejemplo, la «tasa de variación de masa» de un objeto en crecimiento significa la derivada de la función m donde $m(t)$ es la masa en el tiempo t.

Para familiarizarnos con las definiciones básicas de este capítulo, dedicaremos algún tiempo a examinar las derivadas de funciones particulares. Antes de demostrar los importantes resultados teóricos del capítulo 11, nos conviene tener una buena idea de cómo es la derivada de una función. El próximo capítulo se dedica exclusivamente a un aspecto de este problema: el cálculo de la derivada de fun-

* Los términos usados en inglés son *velocity* para velocidad y *speed* para rapidez. (Nota del traductor.)

ciones complicadas. En este capítulo destacaremos más bien los conceptos, en vez de los cálculos, considerando algunos ejemplos sencillos. El más sencillo de todos es el de la función constante $f(x) = c$. En este caso

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Así, pues, f es derivable en a para cualquier número a, y $f'(a) = 0$. Esto significa que la tangente a la gráfica de f tiene siempre por pendiente 0, de modo que la tangente coincide siempre con la gráfica.

Las funciones constantes no son las únicas cuyas gráficas coinciden con sus tangentes; esto ocurre para cualquier función lineal $f(x) = cx + d$. En efecto,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c(a+h) + d - [ca + d]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ch}{h} = c; \end{aligned}$$

la pendiente de la tangente es c, la misma que la pendiente de la gráfica de f.

Una diferencia renovadora presenta $f(x) = x^2$. Aquí

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2a + h \\ &= 2a. \end{aligned}$$

En la figura 9 se indican las tangentes a la gráfica de f. En esta figura cada tangente parece cortar la gráfica solamente una vez, y este hecho puede comprobarse con bastante facilidad: Puesto que la tangente por (a, a^2) tiene pendiente $2a$, es la gráfica de la función

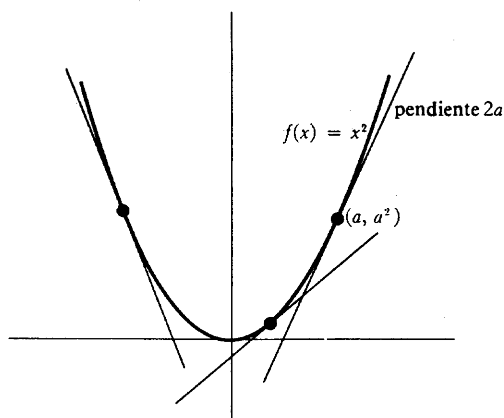


FIGURA 9

$$\begin{aligned} g(x) &= 2a(x-a) + a^2 \\ &= 2ax - a^2. \end{aligned}$$

Ahora bien, si g y la gráfica de f se cortan en el punto $(x, f(x)) = (x, g(x))$, entonces

$$x^2 = 2ax - a^2$$

o

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0;$$

así, pues,

$$(x-a)^2 = 0$$

o

$$x = a.$$

En otras palabras, (a, a^2) es el único punto de intersección.

Se da el caso de que la función $f(x) = x^2$ es muy especial en este aspecto; por lo general, una tangente corta la gráfica más de una vez. Consideremos, por ejemplo, la función $f(x) = x^3$. En este caso

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \to 0} 3a^2 + 3ah + h^2 \\ &= 3a^2. \end{aligned}$$

Así, pues, la tangente a la gráfica de f en (a, a^3) tiene pendiente $3a^2$. Esto significa que la tangente es la gráfica de

$$\begin{aligned} g(x) &= 3a^2(x - a) + a^3 \\ &= 3a^2x - 2a^3. \end{aligned}$$

Las gráficas de f y g se cortan en el punto $(x, f(x)) = (x, g(x))$ donde

$$x^3 = 3a^2x - 2a^3$$

o

$$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0.$$

Esta ecuación se resuelve fácilmente si recordamos que una solución tiene que ser forzosamente $x = a$, de modo que $(x - a)$ es un factor del primer miembro; el otro factor puede encontrarse haciendo la división. Se obtiene

$$(x - a)(x^2 + ax - 2a^2) = 0.$$

Ocurre así que $x^2 + ax - 2a^2$ tiene también por factor $x - a$; obtenemos finalmente

$$(x - a)(x - a)(x + 2a) = 0.$$

Así, pues, como puede verse en la figura 10, la tangente por (a, a^3) corta también a la gráfica en el punto $(-2a, -8a^3)$. Estos dos puntos son siempre distintos excepto cuando $a = 0$.

Los ejemplos que hemos dado de obtención de la derivada de una función son suficientes para ilustrar la notación clásica, y todavía muy popular para las derivadas. Para una función dada f, la derivada f' se designa a menudo por

$$\frac{df(x)}{dx}.$$

Por ejemplo, el símbolo

tendencia, que las funciones se indican muchas veces mediante una frase tal como la siguiente: «Consideremos la función $y = x^2$». Algunas veces seguiremos la costumbre clásica hasta el punto de utilizar y como nombre de una función, pero distinguiremos, sin embargo, cuidadosamente entre la función y sus valores; así, pues, diremos siempre algo como «consideremos la función (definida por) $y(x) = x^2$».

A pesar de las muchas ambigüedades de la notación de Leibniz, ésta es usada casi con exclusividad en la literatura matemática antigua, y aún hoy día se usa con mucha frecuencia. Los oponentes más obstinados de la notación de Leibniz admiten que todavía subsistirá por algún tiempo, mientras que sus más fervientes admiradores afirman que se mantendrá para siempre y que así sea. En cualquier caso, no se puede prescindir del todo de la notación de Leibniz.

La actitud adoptada en este libro es de excluir la notación de Leibniz en el texto, pero incluirla en los problemas; algunos capítulos contienen unos pocos problemas (reconocibles inmediatamente) expresamente preparados para ilustrar las ambigüedades de la notación de Leibniz. En la confianza de que estos problemas suministrarán una práctica suficiente en esta notación, volvemos a nuestra tarea básica de examinar algunos ejemplos sencillos de derivadas.

Las pocas funciones examinadas hasta ahora han sido todas derivables. Para apreciar completamente el significado de la derivada es igualmente importante conocer algunos ejemplos de funciones que *no* son derivables. Lo que inmediatamente se ofrece son las tres funciones examinadas en primer lugar en este capítulo e ilustradas en la figura 1; si resultan ser derivables en 0, evidentemente algo habrá que no estará bien.

Consideremos en primer lugar la función $f(x) = |x|$. En este caso

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Ahora bien, $|h|/h = 1$ para $h > 0$, y $|h|/h = -1$ para $h < 0$. Esto demuestra que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \text{ no existe.}$$

En efecto,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1$$

pués de todo, el símbolo es en realidad más conciso que la frase «derivada de la función $f(x) = x^2$».

Las siguientes fórmulas expresan en la notación clásica de Leibniz toda la información que hemos hallado hasta ahora:

$$\frac{dc}{dx} = 0,$$
$$\frac{d(ax + b)}{dx} = a,$$
$$\frac{dx^2}{dx} = 2x,$$
$$\frac{dx^3}{dx} = 3x^2.$$

Aunque el significado de estas fórmulas es suficientemente claro, cualquier intento de interpretación literal se ve obstaculizado por la comprensible rigidez de que una ecuación no debe contener de un lado una función y de otro un número. Por ejemplo, si se ha de cumplir la tercera ecuación, entonces o bien $df(x)/dx$ debe designar $f'(x)$ y no f', o bien $2x$ debe designar, no un número, sino la función cuyo valor en x es $2x$. Es realmente imposible afirmar que se acepta una u otra de estas alternativas; en la práctica $df(x)/dx$ algunas veces significa f' y otras veces significa $f'(x)$, mientras que $2x$ puede designar ya sea un número o una función. A causa de esta ambigüedad, la mayor parte de los autores son contrarios a designar $f'(a)$ por

$$\frac{df(x)}{dx}(a);$$

en vez de esto, $f'(a)$ se designa por lo general con un símbolo extraño, pero sin ambigüedad,

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$$

Además de estas dificultades, la notación de Leibniz está asociada con una ambigüedad más. Aunque la notación dx^2/dx es absolutamente clásica, la notación $df(x)/dx$ es sustituida a menudo por df/dx. Esto, por supuesto, está de conformidad con la práctica de confundir una función con su valor en x. Es tan fuerte esta

tendencia, que las funciones se indican muchas veces mediante una frase tal como la siguiente: «Consideremos la función $y = x^2$». Algunas veces seguiremos la costumbre clásica hasta el punto de utilizar y como nombre de una función, pero distinguiremos, sin embargo, cuidadosamente entre la función y sus valores; así, pues, diremos siempre algo como «consideremos la función (definida por) $y(x) = x^2$».

A pesar de las muchas ambigüedades de la notación de Leibniz, ésta es usada casi con exclusividad en la literatura matemática antigua, y aún hoy día se usa con mucha frecuencia. Los oponentes más obstinados de la notación de Leibniz admiten que todavía subsistirá por algún tiempo, mientras que sus más fervientes admiradores afirman que se mantendrá para siempre y que así sea. En cualquier caso, no se puede prescindir del todo de la notación de Leibniz.

La actitud adoptada en este libro es de excluir la notación de Leibniz en el texto, pero incluirla en los problemas; algunos capítulos contienen unos pocos problemas (reconocibles inmediatamente) expresamente preparados para ilustrar las ambigüedades de la notación de Leibniz. En la confianza de que estos problemas suministrarán una práctica suficiente en esta notación, volvemos a nuestra tarea básica de examinar algunos ejemplos sencillos de derivadas.

Las pocas funciones examinadas hasta ahora han sido todas derivables. Para apreciar completamente el significado de la derivada es igualmente importante conocer algunos ejemplos de funciones que *no* son derivables. Lo que inmediatamente se ofrece son las tres funciones examinadas en primer lugar en este capítulo e ilustradas en la figura 1; si resultan ser derivables en 0, evidentemente algo habrá que no estará bien.

Consideremos en primer lugar la función $f(x) = |x|$. En este caso

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Ahora bien, $|h|/h = 1$ para $h > 0$, y $|h|/h = -1$ para $h < 0$. Esto demuestra que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \text{ no existe.}$$

En efecto,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1$$

$$\text{y} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1.$$

(Estos dos límites son llamados a veces **derivada por la derecha** y **derivada por la izquierda** respectivamente de f en 0.)

Si $a \neq 0$, entonces existe $f'(a)$. En efecto,

$$f'(x) = 1 \quad \text{si} \quad x > 0,$$
$$f'(x) = -1 \quad \text{si} \quad x < 0.$$

La demostración de este hecho se deja para el lector (es fácil si se recuerda la derivada de una función lineal). Las gráficas de f y de f' se muestran en la figura 11.

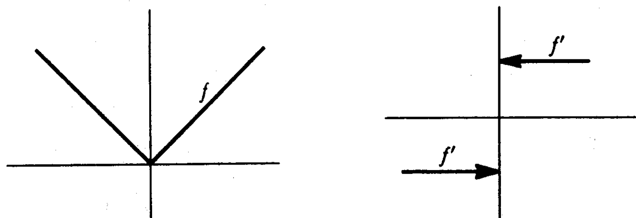


FIGURA 11

Para la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$$

surge una dificultad parecida en conexión con $f'(0)$. Tenemos

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{h^2}{h} = h, & h < 0 \\ \dfrac{h}{h} = 1, & h > 0. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0,$$

pero

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{h} = 1.$$

Así, pues, $f'(0)$ no existe; f no es derivable en 0. Una vez más, sin embargo, $f'(x)$ existe para $x \neq 0$; es fácil ver que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Las gráficas de f y f' pueden verse en la figura 12.

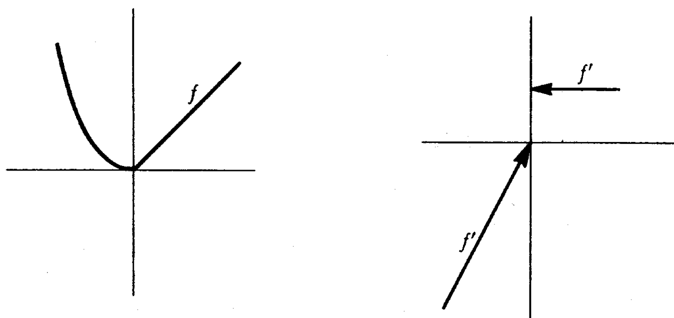


FIGURA 12

Peores cosas ocurren todavía para $f(x) = \sqrt{|x|}$. Para esta función

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}, & h > 0 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{-h}}{h} = -\dfrac{1}{\sqrt{-h}}, & h < 0. \end{cases}$$

En este caso el límite por la derecha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}}$$

no existe; por el contrario, $1/\sqrt{h}$ se hace tan grande como se quiera cuando h tiende hacia 0. Y, más aún, $-1/\sqrt{-h}$ se hace arbitrariamente grande en valor absoluto, pero *negativo* (figura 13).

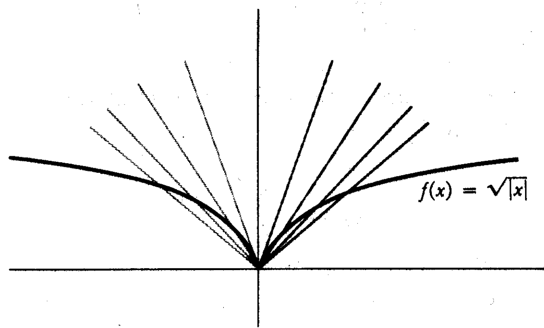


FIGURA 13

La función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, aunque no es derivable en 0, tiene por lo menos un comportamiento algo mejor que esto. El cociente

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{h^{1/3}}{h} = \frac{1}{h^{2/3}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{h})^2}$$

simplemente se hace arbitrariamente grande cuando h tiende hacia 0. Algunas veces se dice que h tiene una derivada «infinita» en 0. Geométricamente esto sig-

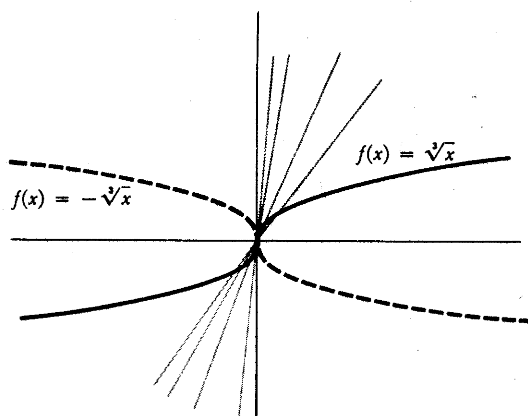


FIGURA 14

nifica que la gráfica de f tiene una «tangente» que es paralela al eje vertical (figura 14). Por supuesto, $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ tiene la misma propiedad geométrica, pero se suele decir que f tiene una derivada de «infinidad negativa» en 0.

Recuérdese que la derivabilidad supone un progreso en relación con la simple continuidad. Esta idea está respaldada por los muchos ejemplos de funciones que son continuas, pero no derivables; sin embargo, queda por destacar un punto importante:

TEOREMA 1

Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\ &= f'(a) \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como hemos indicado en el capítulo 5, la ecuación $\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) = 0$ es equivalente a $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$; así, pues, f es continua en a. ▮

Es muy importante recordar el teorema 1, e igualmente importante recordar que el recíproco no se cumple. Una función derivable es continua, pero una función continua no es necesariamente derivable (recuérdese la función $f(x) = |x|$ y con ello nunca se olvidará cuál de las afirmaciones es la verdadera y cuál la falsa).

Las funciones continuas examinadas hasta ahora han sido derivables en todos los puntos con una excepción a lo sumo, pero es fácil dar ejemplos de funciones

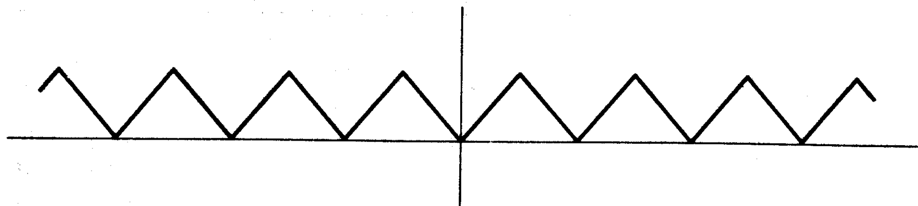


FIGURA 15

continuas que dejan de ser derivables en varios puntos e incluso en un número infinito de ellos (figura 15). En realidad, el caso puede ser mucho peor. Existe una función que es *continua por todas partes* y *derivable en ningún punto.* Por desgracia la definición de esta función no nos será asequible hasta el capítulo 23 y yo no he podido convencer al artista a que la dibujara (considere el lector detenidamente cómo debería ser la gráfica y seguramente comprenderá su punto de vista). Es posible trazar algunas groseras aproximaciones a la gráfica; algunas aproximaciones sucesivamente mejores se indican en la figura 16.

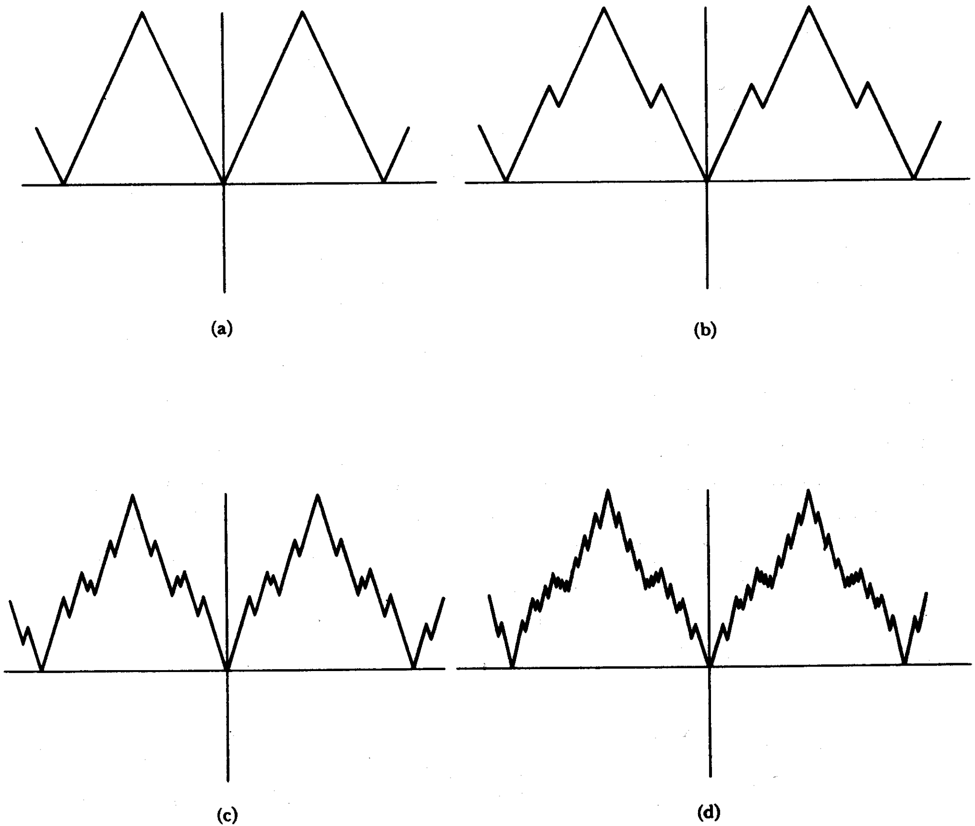


FIGURA 16

Aunque los ejemplos tan espectaculares de no derivabilidad deben ser demorados, podemos, con un poco de ingenio, encontrar una función continua que deja de ser derivable en una infinidad de puntos, *todos los cuales están en* [0, 1]. Una tal función se ilustra en la figura 17. Se deja para el lector el problema de definirla con precisión; se trata de una versión rectilínea de la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

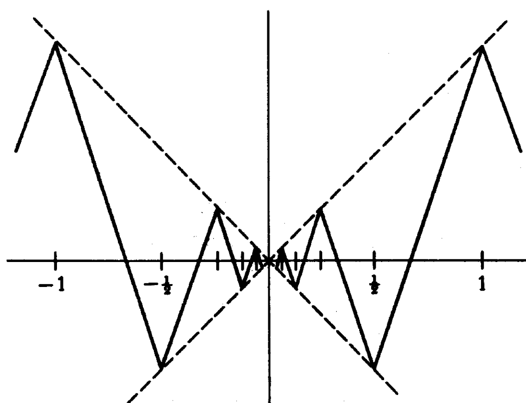


FIGURA 17

Esta función particular f es ella misma muy sensible a la cuestión de la derivabilidad. Efectivamente, para $h \neq 0$ tenemos

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h \operatorname{sen} \dfrac{1}{h} - 0}{h} = \operatorname{sen} \frac{1}{h}.$$

Hace mucho demostramos que $\lim_{h \to 0} \operatorname{sen} 1/h$ no existe, de modo que f no es derivable en 0. Geométricamente se puede ver que no puede existir una tangente, observando que la secante que pasa por (0, 0) y $(h, f(h))$ en la figura 18 puede tener cualquier pendiente comprendida entre —1 y 1, por pequeño que hagamos a h.

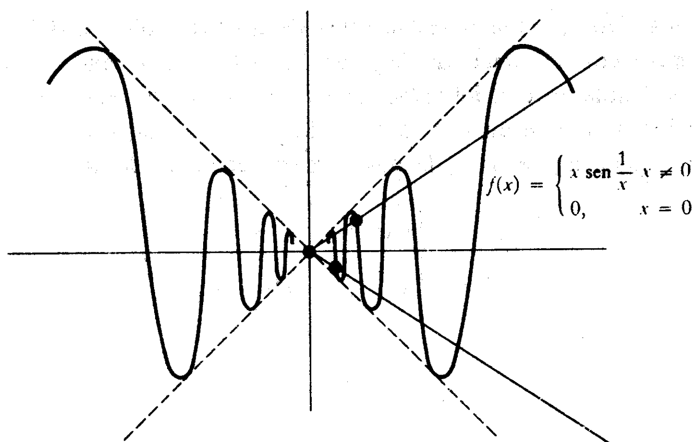


FIGURA 18

Este descubrimiento representa en cierto modo un triunfo; aunque continua, la función f parece de alguna manera del todo antinatural, y ahora podemos enunciar un carácter matemáticamente indeseable de esta función; no es derivable en 0. Sin embargo, no nos debemos dejar llevar de un entusiasmo excesivo por el criterio de la derivabilidad. Por ejemplo, la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es derivable en 0; en efecto, $g'(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{h}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La tangente a la gráfica de g en (0, 0) es, por lo tanto, el eje horizontal (figura 19).

Este ejemplo hace ver que debemos buscar condiciones todavía más restrictivas para una función que la simple derivabilidad. En realidad podemos utilizar

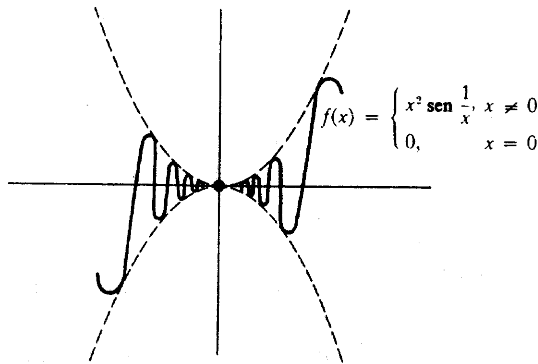


FIGURA 19

la derivada para formular tales condiciones si introducimos otro conjunto de definiciones, las últimas de este capítulo.

Para una función cualquiera f, al tomar la derivada, obtenemos una nueva función f' (cuyo dominio puede ser considerablemente más pequeño que el de f). La noción de derivabilidad puede aplicarse a la función f', por supuesto, dando lugar a otra función $(f')'$, cuyo dominio consiste en todos los puntos a tales que f' es derivable en a. La función $(f')'$ se suele escribir por lo general simplemente f'' y recibe el nombre de **derivada segunda** de f. Si $f''(a)$ existe, entonces se dice que f es dos veces derivable en a, y el número $f''(a)$ recibe el nombre de **derivada segunda de f en a.**

La derivada segunda es particularmente importante en física. Si $s(t)$ es la posición en el tiempo t de una partícula que se mueve a lo largo de una recta, entonces $s''(t)$ recibe el nombre de **aceleración** en el tiempo t. La aceleración desempeña un papel especial en física porque, según se expresa en las leyes del movimiento de Newton, la fuerza de una partícula es el producto de su masa por su aceleración. En consecuencia, el lector puede experimentar la derivada segunda al sentarse en un automóvil que acelera.

No existe razón alguna para detenerse en la derivada segunda; podemos definir $f''' = (f'')'$, $f'''' = (f''')'$, etc. Esta notación se hace pronto difícil de manejar, por lo que se suele adoptar la siguiente abreviación (se trata en realidad de una definición recursiva):

$$f^{(1)} = f',$$
$$f^{(k+1)} = (f^{(k)})'.$$

Así, pues,

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= f', \\ f^{(2)} &= f'' = (f')', \\ f^{(3)} &= f''' = (f'')', \\ f^{(4)} &= f'''' = (f''')', \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Las distintas funciones $f^{(k)}$, para $k \geq 2$, son a veces llamadas **derivadas de orden superior** de f.

Por lo general recurrimos a la notación $f^{(k)}$ solamente para $k \geq 4$, pero conviene que $f^{(k)}$ quede también definido para k más pequeño. De hecho, se puede dar una definición para $f^{(0)}$, a saber,

$$f^{(0)} = f.$$

Debemos mencionar también la notación de Leibniz para las derivadas de órdenes superiores. El símbolo natural de Leibniz para $f''(x)$, a saber,

$$\frac{d\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)}{dx},$$

se abrevia poniendo

$$\frac{d^2f(x)}{(dx)^2}, \quad \text{o más frecuentemente} \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

Una notación parecida se usa para $f^{(n)}(x)$.

El siguiente ejemplo ilustra la notación $f^{(k)}$, y hace ver también, con un caso muy sencillo, de qué modo las derivadas de órdenes superiores están relacionadas con la función original. Sea $f(x) = x^2$. Entonces, como ya hemos comprobado,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x, \\ f''(x) &= 2, \\ f'''(x) &= 0, \\ f^{(k)}(x) &= 0, \quad \text{si } k \geq 3. \end{aligned}$$

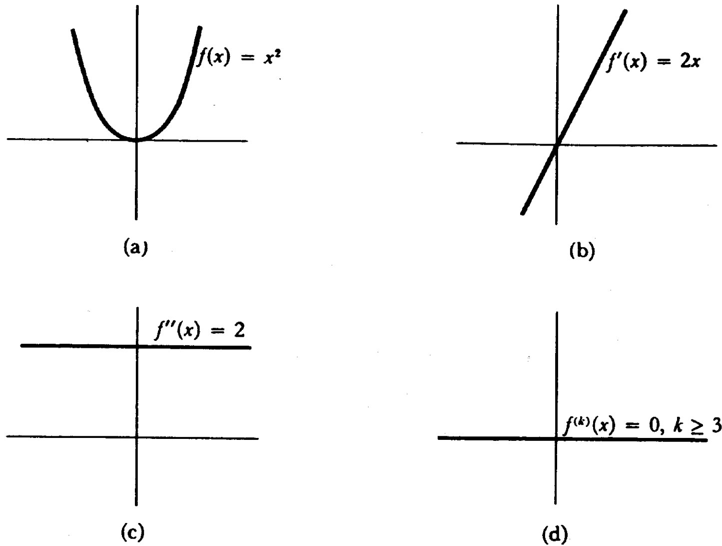


FIGURA 20

La figura 20 muestra la función f, junto con sus distintas derivadas.

Un ejemplo más instructivo lo presenta la siguiente función, cuya gráfica se muestra en la figura 21(a):

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que

$$\begin{aligned} f'(a) &= 2a \quad \text{si } a > 0, \\ f'(a) &= -2a \quad \text{si } a < 0. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}. \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0$$

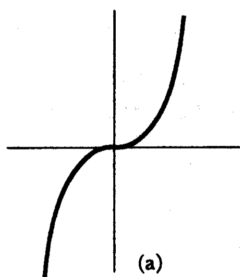
$$\text{y} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2}{h} = 0,$$

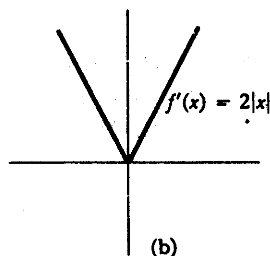
de modo que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Toda esta información puede resumirse poniendo:

$$f'(x) = 2|x|.$$





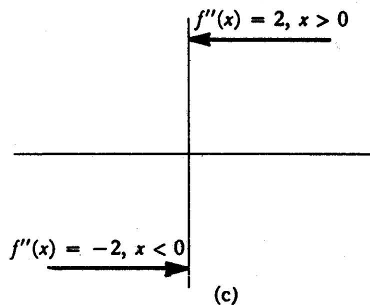


FIGURA 21

Se sigue que $f''(0)$ ¡no existe! La existencia de la segunda derivada es, por lo tanto, una restricción bastante fuerte que se impone a una función. Incluso una función tan «suave» como f revela alguna irregularidad cuando se examina a través de la segunda derivada. Esto sugiere que el comportamiento irregular de la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

podría ser también revelado por la segunda derivada. Sabemos por el momento que $g'(0) = 0$, pero no conocemos $g'(a)$ para ningún $a \neq 0$, de modo que no podemos empezar calculando $g''(0)$. Volveremos sobre esta cuestión al final del próximo capítulo, una vez que hayamos elaborado la técnica para hallar derivadas.

PROBLEMAS

1. (a) Partiendo directamente de la definición, demostrar que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(a) = -1/a^2$, para $a \neq 0$.
(b) Demostrar que la tangente a la gráfica de f en $(a, 1/a)$ no corta la gráfica de f más que en el punto $(a, 1/a)$.

2. (a) Demostrar que si $f(x) = 1/x^2$, entonces $f'(a) = -2/a^3$ para $a \neq 0$.
(b) Demostrar que la tangente a la gráfica de f en $(a, 1/a^2)$ corta f en otro punto, que está en el lado opuesto del eje vertical.

3. Demostrar que si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(a) = 1/2\sqrt{a}$, para $a > 0$. (La expresión que se obtenga para $[f(a + h) - f(a)]/h$ requerirá algún trabajo algebraico, pero la respuesta debería sugerir el artificio conveniente.)

4. Para todo número natural n sea $S_n(x) = x^n$. Recordando que $S_1'(x) = 1$, $S_2'(x) = 2x$ y $S_3'(x) = 3x^2$, conjeturar una fórmula para $S_n'(x)$. Demostrar la conjetura. (La expresión $(x + h)^n$ puede desarrollarse por el teorema de binomio.)

5. Hallar f' para $f(x) = [x]$.

6. Demostrar lo siguiente, partiendo de la definición (y trazando un dibujo explicativo):
(a) Si $g(x) = f(x) + c$, entonces $g'(x) = f'(x)$;
(b) Si $g(x) = cf(x)$, entonces $g'(x) = cf'(x)$.

7. Supongamos que $f(x) = x^3$.
(a) ¿Cuál es el valor de $f'(9)$, $f'(25)$, $f'(36)$?

(b) ¿Cuál es el valor de $f'(3^2)$, $f'(5^2)$, $f'(6^2)$?
(c) ¿Cuál es el valor de $f'(a^2)$, $f'(x^2)$?
Si el lector no encuentra trivial este problema, es que está olvidando un punto muy importante: $f'(x^2)$ significa la derivada de f en el número que estamos designando por x^2; *no* es la derivada en x de la función $g(x) = f(x^2)$. Para aclararlo del todo:
(d) Para $f(x) = x^3$, comparar $f'(x^2)$ y $g'(x)$ donde $g(x) = f(x^2)$.

8. (a) Supongamos $g(x) = f(x + c)$. Demostrar (partiendo de la definición) que $g'(x) = f'(x + c)$. Trazar un dibujo para ilustrar esto. Para hacer este problema deben escribirse correctamente las definiciones de $g'(x)$ y $f'(x + c)$. El objeto del problema 7 era convencer al lector de que aunque este problema es fácil, no es una absoluta trivialidad y hay algo que demostrar en él: No se pueden añadir simplemente signos prima a la ecuación $g(x) = f(x + a)$. Tratemos de destacar este punto:
(b) Demostrar que si $g(x) = f(cx)$, entonces $g'(x) = c \cdot f'(cx)$. Trátese también de obtener una representación gráfica de por qué esto debe ser así.
(c) Supongamos que f es derivable y periódica con período a (es decir, $f(x + a) = f(x)$ para todo x). Demostrar que f' es también periódica.

9. Hallar $f'(x)$ y también $f'(x + 3)$ en los siguientes casos. Si no se es muy metódico se está expuesto a resbalar en algún punto. Consúltense las soluciones (naturalmente después de hacer el problema).

(i) $f(x) = (x + 3)^5$.
(ii) $f(x + 3) = x^5$.
(iii) $f(x + 3) = (x + 5)^7$.

10. Hallar $f'(x)$ si $f(x) = g(t + x)$ y si $f(t) = g(t + x)$. Las soluciones *no* serán las mismas.

11. (a) Demostrar que Galileo se equivocó: Si un cuerpo cae una distancia $s(t)$ en t segundos, y s' es proporcional a s, entonces s no puede ser una función de la forma $s(t) = ct^2$.
(b) Demostrar que los siguientes hechos acerca de s son verdad si $s(t) = (a/2)t^2$ (el primer hecho hará ver por qué nos hemos pasado de c a $a/2$):
(i) $s''(t) = a$ (la aceleración es constante).
(ii) $[s'(t)]^2 = 2as(t)$.
(c) Si s se mide en pies, el valor de a es 32. ¿De cuántos segundos disponemos para apartarnos de una araña que cae de un techo de 400 pies? ¿Cuál será la velocidad de la araña en el momento de alcanzar a uno que no

se haya apartado? ¿Cuál era la posición de la araña en el momento en que su velocidad era la mitad de ésta?

12. Imagine el lector una carretera en la cual estuviese especificado el límite de velocidad en cada uno de sus puntos. Dicho de otro modo, existe cierta función L tal que el límite de velocidad a x millas del origen de la carretera es $L(x)$. Dos automóviles, A y B, van rodando a lo largo de esta carretera; la posición del automóvil A en el tiempo t es $a(t)$ y la del automóvil B es $b(t)$.

(a) ¿Cuál es la ecuación que expresa el hecho de que el automóvil A rueda siempre a la velocidad límite? [La solución *no* es $a'(t) = L(t)$].

(b) Supóngase que A va siempre a la velocidad límite y que la posición de B en el tiempo t es la posición de A en el tiempo $t - 1$. Demostrar que B va siempre también a la velocidad límite.

(c) Supóngase que B va siempre detrás de A a una distancia constante. ¿Bajo qué condiciones irá todavía B siempre a la velocidad límite?

13. Supongamos que $f(a) = g(a)$ y que la derivada por la izquierda de f en a es igual a la derivada por la derecha de g en a. Definir $h(x) = f(x)$ para $x \leq a$ y $h(x) = g(x)$ para $x \geq a$. Demostrar que h es derivable en a.

14. Sea $f(x) = x^2$ si x es racional, y $f(x) = 0$ si x es irracional. Demostrar que f es derivable en 0. [Esta función no debe asustar al lector. Escríbase la definición de $f'(0)$].

***15.** (a) Sea f una función tal que $|f(x)| \leq x^2$ para todo x. Demostrar que f es derivable en 0. (Quien haya hecho el problema 14 sabrá hacer éste.)

(b) Se puede generalizar este hecho si x^2 se sustituye por $|g(x)|$, donde g tiene ¿qué propiedad?

16. Sea $\alpha > 1$. Si f satisface $|f(x)| \leq |x|^\alpha$, demostrar que f es derivable en 0.

17. Sea $0 < \beta < 1$. Demostrar que si f satisface $|f(x)| \geq |x|^\beta$ y $f(0) = 0$, entonces f no es derivable en 0.

***18.** Sea $f(x) = 0$ para x irracional, y $1/q$ para $x = p/q$, fracción irreducible. Demostrar que f no es derivable en a para ningún a. Indicación: basta demostrar esto para a irracional. ¿Por qué? Si $a = n,a_1a_2a_3 \ldots$ es el desarrollo decimal de a, considérese $[f(a + h) - f(h)]/h$ para h racional y también para

$$h = -0{,}00 \ldots 0a_{n+1}a_{n+2} \ldots$$

19. (a) Supóngase que $f(a) = g(a) = h(a)$, que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x, y que $f'(a) = h'(a)$. Demostrar que g es derivable en a y que $f'(a) = g'(a) = h'(a)$. [Empezar con la definición de $g'(a)$.]

(b) Demostrar que la conclusión no se sigue si omitimos la hipótesis $f(a) = g(a) = h(a)$.

20. Sea f una función polinómica cualquiera; veremos en el capítulo próximo que f es derivable. La tangente a f en $(a, f(a))$ es la gráfica de $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$. Así, pues, $f(x) - g(x)$ es la función polinómica $d(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$. Hemos visto ya que si $f(x) = x^2$, entonces $d(x) = (x - a)^2$, y si $f(x) = x^3$, entonces $dx = (x - a)^2(x + 2a)$.

(a) Hallar $d(x)$ cuando $f(x) = x^4$, y demostrar que es divisible por $(x - a)^2$.

(b) Parece haber ciertamente alguna evidencia de que $d(x)$ es siempre divisible por $(x - a)^2$. La figura 22 ofrece un argumento intuitivo: Por lo

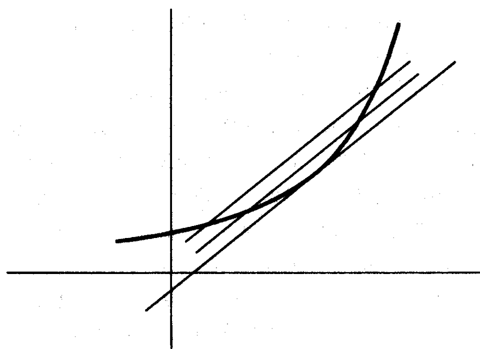


FIGURA 22

general las rectas paralelas a la tangente cortan a la gráfica en dos puntos; la tangente corta la gráfica sólo una vez cerca del punto, de modo que la intersección debería ser una «intersección doble». Para dar una demostración rigurosa, obsérvese primero que

$$\frac{d(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

Contestar ahora las siguientes cuestiones. ¿Por qué es $f(x) - f(a)$ divisible por $(x - a)$? ¿Por qué existe una función polinómica h tal que $h(x) = d(x)/(x - a)$ para $x \neq a$? ¿Por qué es $\lim_{x \to a} h(x) = 0$? ¿Por qué es $h(a) = 0$? ¿Por qué esto resuelve el problema?

21. (a) Demostrar que $f'(a) = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)]/(x - a)$. (No hay aquí nada de profundo.)

(b) Demostrar que las derivadas constituyen una «propiedad local»: Si $f(x) = g(x)$ para todo x de algún intervalo abierto que contiene a, entonces

$f'(a) = g'(a)$. [Esto significa que al calcular $f'(a)$, se puede prescindir de $f(x)$ para cualquier $x \neq a$ particular. Por supuesto, no se puede prescindir de $f(x)$ para todos los x a la vez.]

***22.** (a) Supongamos que f es derivable en x. Demostrar que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Indicación: Recordar un viejo truco algebraico: un número no se altera cuando se le suma y resta a la vez una misma cantidad.

**(b) De un modo más general demostrar que

$$f'(x) = \lim_{h,k\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k}.$$

***23.** Demostrar que si f es par, entonces $f'(x) = -f'(-x)$. [Para evitar confusión, sea $g(x) = f(-x)$; hallar $g'(x)$ y *entonces* recordar qué otra cosa es g.] Trácese un dibujo.

***24.** Demostrar que si f es impar, entonces $f'(x) = f'(-x)$. Una vez más, trácese un dibujo.

25. Los problemas 23 y 24 dicen que f' es par si f es impar, e impar si f es par. ¿Qué puede decirse, por lo tanto, acerca de $f^{(k)}$?

26. Hallar $f''(x)$ si

(i) $f(x) = x^3$.
(ii) $f(x) = x^5$.
(iii) $f'(x) = x^4$.
(iv) $f(x+3) = x^5$.

27. Si $S_n(x) = x^n$, y $0 \leq k \leq n$, demostrar que

$$S_n{}^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k}$$
$$= k! \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

***28.** (a) Hallar $f'(x)$ si $f(x) = |x|^3$. Hallar $f''(x)$. ¿Existe $f'''(x)$ para todo x?

(b) Analícese del mismo modo f si $f(x) = x^4$ para $x \geq 0$ y $f(x) = -x^4$ para $x \leq 0$.

***29.** Sea $f(x) = x^n$ para $x \geq 0$ y sea $f(x) = 0$ para $x \leq 0$. Demostrar que existe $f^{(n-1)}$ (y hallar la fórmula correspondiente), pero que $f^{(n)}(0)$ no existe.

30. Interpretar los siguientes casos de notación de Leibnitz; cada uno de ellos expresa algún hecho presentado en algún problema anterior.

(i) $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$.

(ii) $\dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{1}{y^2}$ si $z = \dfrac{1}{y}$.

(iii) $\dfrac{d[f(x) + c]}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx}$.

(iv) $\dfrac{d[cf(x)]}{dx} = c\dfrac{df(x)}{dx}$.

(v) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$ si $z = y + c$.

(vi) $\left.\dfrac{dx^3}{dx}\right|_{x=a^2} = 3a^4$.

(vii) $\left.\dfrac{df(x+a)}{dx}\right|_{x=b} = \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=b+a}$

(viii) $\left.\dfrac{df(cx)}{dx}\right|_{x=b} = c \cdot \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=cb}$.

(ix) $\dfrac{df(cx)}{dx} = c \cdot \left.\dfrac{df(y)}{dy}\right|_{y=cx}$.

(x) $\dfrac{d^kx^n}{dx^k} = k!\dbinom{n}{k}x^{n-k}$.

CAPÍTULO

10

DERIVACIÓN

El proceso de hallar la derivada de una función recibe el nombre de *derivación.* El lector puede haber recibido la impresión, a través del capítulo anterior, de que este proceso es por lo general laborioso, que exige recurrir a la definición de la derivada, y que depende de saber hallar algún límite. Bien es verdad que muchas veces un tal procedimiento es el único posible; si se olvida la definición de derivada se está muy expuesto a perderse. Sin embargo, en este capítulo aprenderemos a derivar un gran número de funciones, sin necesidad de recordar siquiera la definición. Unos pocos teoremas nos ofrecerán un proceso mecánico para derivar una clase muy amplia de funciones, formadas a partir de unas pocas funciones simples mediante el proceso de suma, multiplicación, división y composición. Esta descripción debería sugerir cuáles son los teoremas que se habrán de demostrar. Hallaremos primero la derivada de unas cuantas funciones simples, y después demostraremos teoremas acerca de la suma, producto, cociente y composición de funciones derivables. El primer teorema constituye simplemente un reconocimiento formal de un cálculo llevado a cabo en el capítulo anterior.

TEOREMA 1

Si f es una función constante, $f(x) = c$, entonces

$$f'(a) = 0 \quad \text{para todos los números } a.$$

DEMOSTRACIÓN

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0. \blacksquare$$

El segundo teorema es también el caso especial de un cálculo del último capítulo.

TEOREMA 2

Si f es la función identidad, $f(x) = x$, entonces

$$f'(a) = 1 \quad \text{para todos los números } a.$$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a+h-a}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \blacksquare \end{aligned}$$

La derivada de la suma de dos funciones es, tal como era de esperar, la suma de las derivadas.

TEOREMA 3

Si f y g son derivables en a, entonces $f+g$ es también derivable en a, y

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} (f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - [f(a) + g(a)]}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$
$$= f'(a)+g'(a). \blacksquare$$

La fórmula para la derivada de un producto no es tan simple como sería de desear, pero es agradablemente simétrica y la demostración requiere solamente un truco algebraico sencillo que ya hemos utilizado antes: un número no se altera cuando se le suma y resta una misma cantidad.

TEOREMA 4

Si f y g son derivables en a, entonces $f\cdot g$ es también derivable en a, y

$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a).$$

DEMOSTRACIÓN

$$(f\cdot g)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)[g(a+h)-g(a)]}{h}+\frac{[f(a+h)-f(a)]g(a)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}f(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(a)$$
$$= f(a)\cdot g'(a)+f'(a)\cdot g(a).$$

[Obsérvese que hemos aplicado el teorema 9-1 para demostrar que $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$.] $\blacksquare$

En un caso especial el teorema 4 se simplifica considerablemente:

TEOREMA 5

Si $g(x) = cf(x)$ y f es derivable en a, entonces g es derivable en a, y

$$g'(a) = c \cdot f'(a).$$

DEMOSTRACIÓN

Si $h(x) = c$, de modo que $g = h \cdot f$, entonces por el teorema 4,

$$\begin{aligned} g'(a) &= (h \cdot f)'(a) \\ &= h(a) \cdot f'(a) + h'(a) \cdot f(a) \\ &= c \cdot f'(a) + 0 \cdot f(a) \\ &= c \cdot f'(a). \blacksquare \end{aligned}$$

Obsérvese, en particular, que $(-f)'(a) = -f'(a)$, y en consecuencia $(f - g)'(a) = (f + [-g])'(a) = f'(a) - g'(a)$.

Para que se vea lo que ya hemos logrado, vamos a calcular la derivada de algunas funciones particulares.

TEOREMA 6

Si $f(x) = x^n$ para algún número natural n, entonces

$$f'(a) = na^{n-1} \quad \text{para todo } a.$$

DEMOSTRACIÓN

La demostración será por inducción sobre n. Para $n = 1$ esto es simplemente el teorema 2. Supongamos ahora que el teorema se cumple para n, de modo que si $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(a) = na^{n-1} \quad \text{para todo } a.$$

Sea $g(x) = x^{n+1}$. Si $I(x) = x$, la ecuación $x^{n+1} = x^n \cdot x$ puede escribirse

$$g(x) = f(x) \cdot I(x) \quad \text{para todo } x;$$

de modo que $g = f \cdot I$. Se sigue del teorema 4 que

$$\begin{aligned} g'(a) = (f \cdot I)'(a) &= f'(a) \cdot I(a) + f(a) \cdot I'(a) \\ &= na^{n-1} \cdot a + a^n \cdot 1 \end{aligned}$$

$$= na^n + a^n$$
$$= (n + 1)a^n, \text{ para todo } a.$$

Éste es precisamente el caso $n + 1$ que queríamos demostrar. ▮

Juntando los teoremas demostrados hasta ahora estamos en condiciones de hallar f' para un f de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Obtenemos

$$f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1.$$

Podemos también hallar f'':

$$f''(x) = n(n-1)a_nx^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 2a_2.$$

Este proceso puede proseguirse fácilmente. Cada derivación reduce la potencia más alta de x en una unidad y elimina un a_i más. Sería bueno para el lector hallar las derivadas f''', $f^{(4)}$, y quizá $f^{(5)}$, hasta que la regla general quede perfectamente clara. La última derivada interesante es

$$f^{(n)}(x) = n!a_n;$$

para $k > n$ tenemos

$$f^{(k)}(x) = 0.$$

Evidentemente el próximo paso de nuestro programa será hallar la derivada de un cociente f/g. Es mucho más sencillo y, como es obvio, gracias al teorema 4 suficiente, hallar la derivada de $1/g$.

TEOREMA 7

Si g es derivable en a, y $g(a) \neq 0$, entonces $1/g$ es derivable en a, y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

DEMOSTRACIÓN

Antes de escribir siquiera

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h}$$

debemos estar seguros de que esta expresión tiene sentido; es necesario comprobar que $(1/g)(a+h)$ está definido para h suficientemente pequeño. Esto exige solamente dos observaciones. Puesto que g es, por hipótesis, derivable en a, se sigue del teorema 9-1 que g es continua en a. Puesto que $g(a) \neq 0$, se sigue del teorema 6-3 que existe algún $\delta > 0$ tal que $g(a+h) \neq 0$ para $|h| < \delta$. Por lo tanto, $(1/g)(a+h)$ *tiene* sentido para h pequeños, y podemos escribir

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(a) - g(a+h)}{h[g(a)\cdot g(a+h)]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-[g(a+h) - g(a)]}{h} \cdot \frac{1}{g(a)g(a+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-[g(a+h) - g(a)]}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a)\cdot g(a+h)} \\
&= -g'(a) \cdot \frac{1}{[g(a)]^2}.
\end{aligned}$$

(Obsérvese que hemos aplicado una vez más la continuidad de g en a.) ▮

La fórmula general para la derivada de un cociente es ahora fácil de obtener. Aunque no es particularmente llamativa, es importante aprenderla de memoria («denominador por derivada del numerador, menos numerador por derivada del denominador partido por cuadrado del denominador»).

TEOREMA 8

Si f y g son derivables en a y $g(a) \neq 0$, entonces f/g es derivable en a y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)\cdot f'(a) - f(a)\cdot g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

DEMOSTRACIÓN

Puesto que $f/g = f\cdot(1/g)$, tenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(a)\\ &= f'(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(a)\\ &= \frac{f'(a)}{g(a)} + \frac{f(a)(-g'(a))}{[g(a)]^2}\\ &= \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{[g(a)]^2}. \blacksquare\end{aligned}$$

Podemos ahora derivar unas cuantas funciones más. Por ejemplo,

si $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, entonces $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)(2x) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$;

si $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, entonces $f'(x) = \dfrac{(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$;

si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} = (-1)x^{-2}$.

Obsérvese que el último ejemplo puede generalizarse: si

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad \text{para algún número natural } n,$$

entonces

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{-n-1};$$

así pues el teorema 6 es válido tanto para enteros positivos como para enteros negativos. Si interpretamos $f(x) = x^0$ como $f(x) = 1$, y $f'(x) = 0\cdot x^{-1}$ como $f'(x) = 0$, entonces el teorema 6 se cumple también para $n = 0$. (La palabra «in-

terpretamos» es necesaria puesto que no está claro cómo debe definirse 0^0, y, en cualquier caso, $0 \cdot 0^{-1}$ carece de sentido.)

Para progresar más en la derivación nos hace falta conocer las derivadas de ciertas funciones particulares que estudiaremos más tarde. Una de éstas es la función seno. Por el momento adelantamos la siguiente información, y hacemos uso de ella sin demostraciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}'(a) &= \cos a \quad \text{para todo } a, \\ \cos'(a) &= -\operatorname{sen} a \quad \text{para todo } a. \end{aligned}$$

Esta información nos permite derivar muchas otras funciones. Por ejemplo, si

$$f(x) = x \operatorname{sen} x,$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cos x + \operatorname{sen} x, \\ f''(x) &= -x \operatorname{sen} x + \cos x + \cos x \\ &= -x \operatorname{sen} x + 2 \cos x; \end{aligned}$$

si

$$g(x) = \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x,$$

entonces

$$\begin{aligned} g'(x) &= \operatorname{sen} x \cos x + \cos x \operatorname{sen} x \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cos x, \\ g''(x) &= 2[(\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) + \cos x \cos x] \\ &= 2[\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x]; \end{aligned}$$

si

$$h(x) = \cos^2 x = \cos x \cdot \cos x,$$

entonces

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\cos x)(-\operatorname{sen} x) + (-\operatorname{sen} x) \cos x \\ &= -2 \operatorname{sen} x \cos x, \\ h''(x) &= -2[\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x]. \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$g'(x) + h'(x) = 0,$$

lo cual apenas sorprende, puesto que $(g + h)(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Como era de esperar, tenemos también $g''(x) + h''(x) = 0$.

Los anteriores ejemplos comprenden solamente productos de dos funciones.

Una función que comprenda productos triples puede ser tratada también por el teorema 4; en realidad puede ser tratada de dos maneras. Recuérdese que $f \cdot g \cdot h$ es una abreviación de

$$(f \cdot g) \cdot h \quad \text{o} \quad f \cdot (g \cdot h).$$

Eligiendo, por ejemplo, la primera de éstas, tenemos

$$\begin{aligned}(f \cdot g \cdot h)'(x) &= (f \cdot g)'(x) \cdot h(x) + (f \cdot g)(x)h'(x) \\ &= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).\end{aligned}$$

La elección de $f \cdot (g \cdot h)$ habría dado, por supuesto, el mismo resultado, con un paso intermedio diferente. La solución final es completamente simétrica y fácil de recordar:

> $(f \cdot g \cdot h)'$ es la suma de los tres términos obtenidos al derivar cada una de las f, g y h y multiplicar por las otras dos.

Por ejemplo, si

$$f(x) = x^3 \text{ sen } x \cos x,$$

entonces

$$f'(x) = 3x^2 \text{ sen } x \cos x + x^3 \cos x \cos x + x^3 (\text{sen } x)(-\text{sen } x).$$

Los productos de más de tres funciones, pueden tratarse análogamente. Por ejemplo, no debe presentar dificultad para el lector la derivación de la fórmula

$$\begin{aligned}(f \cdot g \cdot h \cdot k)'(x) &= f'(x)g(x)h(x)k(x) + f(x)g'(x)h(x)k(x) \\ &\quad + f(x)g(x)h'(x)k(x) + f(x)g(x)h(x)k'(x).\end{aligned}$$

Se puede incluso tratar de demostrar (por inducción) la fórmula general:

$$(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)'(x) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_{i-1}(x) f_i'(x) f_{i+1}(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x).$$

La derivación de las funciones más interesantes exige, evidentemente, una fórmula para $(f \circ g)'(x)$ en términos de f' y g'. Para asegurar que $f \circ g$ es derivable en a, la hipótesis razonable parece que tendría que ser que g fuese derivable en a. Puesto que el comportamiento de $f \circ g$ cerca de a depende del comportamiento de f cerca de $g(a)$ (no cerca de a), parece también razonable suponer que f sea

derivable en $g(a)$. Demostraremos, en efecto, que si g es derivable en a y f es derivable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es derivable en a y

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Esta fórmula, de extrema importancia, recibe el nombre de *regla de la cadena*, posiblemente porque una composición de funciones podría llamarse «cadena» de funciones. Obsérvese que $(f \circ g)'$ es prácticamente un producto de f' y g', pero no del todo: f' debe calcularse en $g(a)$ y g' en a. Antes de intentar la demostración de este teorema ensayaremos unas cuantas aplicaciones. Supongamos

$$f(x) = \text{sen } x^2.$$

Designemos momentáneamente por S la función («elevar al cuadrado») $S(x) = x^2$. Entonces

$$f = \text{sen} \circ S.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{sen}'(S(x)) \cdot S'(x) \\ &= \cos x^2 \cdot 2x. \end{aligned}$$

Un resultado totalmente distinto se obtiene si

$$f(x) = \text{sen}^2 x.$$

En este caso

$$f = S \circ \text{sen},$$

de modo que

$$\begin{aligned} f'(x) &= S'(\text{sen } x) \cdot \text{sen}'(x) \\ &= 2 \text{ sen } x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Obsérvese que esto está de acuerdo (como debía) con el resultado obtenido al escribir $f = \text{sen} \cdot \text{sen}$ y aplicar la fórmula del producto.

Aunque hemos inventado un símbolo especial, S, para designar la función «de elevar al cuadrado», no hace falta demasiada práctica para resolver problemas como éste sin preocuparse de escribir símbolos especiales para funciones, y sin preocuparse siquiera de escribir la composición particular en que consiste f; se acostumbra uno pronto a separar mentalmente f en sus componentes. Las siguientes derivaciones deben hacerse como práctica de esta gimnasia mental; si

el lector encuentra necesario hacer unas cuantas con detalle en un papel, hágalo, por favor, pero no deje de desarrollar la habilidad de escribir f' inmediatamente a la vista de la definición de f; los problemas de esta clase son tan sencillos que, con recordar la regla de la cadena, ya no hace falta pensar más.

si $f(x) = \operatorname{sen} x^3$ entonces $f'(x) = \cos x^3 \cdot 3x^2$

$f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ $\qquad f'(x) = 3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x$

$f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ $\qquad f'(x) = \cos \dfrac{1}{x} \cdot \left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$

$f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ $\qquad f'(x) = \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x$

$f(x) = \operatorname{sen}(x^3 + 3x^2)$ $\qquad f'(x) = \cos(x^3 + 3x^2) \cdot (3x^2 + 6x)$

$f(x) = (x^3 + 3x^2)^{53}$ $\qquad f'(x) = 53(x^3 + 3x^2)^{52} \cdot (3x^2 + 6x).$

Una función tal como

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x^2 = [\operatorname{sen} x^2]^2,$$

que es la composición de tres funciones,

$$f = S \circ \operatorname{sen} \circ S,$$

puede también derivarse mediante la regla de la cadena. Basta solamente recordar que una composición triple $f \circ g \circ h$ significa $(f \circ g) \circ h$ o $f \circ (g \circ h)$. Así, si

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x^2$$

podemos escribir

$$f = (S \circ \operatorname{sen}) \circ S,$$
$$f = S \circ (\operatorname{sen} \circ S).$$

La derivada de cualquiera de estas expresiones puede hallarse aplicando dos veces la regla de la cadena; el único punto dudoso es el de si las dos expresiones conducen a cálculos igual de sencillos. De hecho, como sabe cualquier experto en derivación, es mucho mejor usar la segunda:

$$\boxed{f = S \circ (\operatorname{sen} \circ S).}$$

Podemos ahora escribir $f'(x)$ de un solo golpe. Para empezar, obsérvese que la primera función a derivar es S, de modo que la fórmula para $f'(x)$ empieza

$$f'(x) = 2(\quad\quad) \cdot \square$$

Dentro del paréntesis debemos poner sen x^2, valor en x de la segunda función, sen $\circ\, S$. Así empezamos escribiendo

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x^2 \cdot \square$$

(los paréntesis, en realidad, no harían falta). Debemos ahora multiplicar esta parte de la solución por la derivada de sen $\circ\, S$ en x; esta parte es fácil: comprende la composición de dos funciones, lo cual ya sabemos cómo se maneja. Obtenemos, como función final,

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x.$$

El siguiente ejemplo se trata de manera análoga. Supongamos

$$\boxed{f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x^2).}$$

Sin preocuparnos siquiera de escribir f como composición $g \circ h \circ k$ de tres funciones, podemos ver que la de más a la izquierda será sen, de modo que nuestra expresión para $f'(x)$ empieza

$$f'(x) = \cos(\quad\quad) \cdot \square$$

Dentro del paréntesis debemos poner el valor de $h \circ k(x)$; éste es sencillamente sen x^2 (lo cual se obtiene de sen(sen x^2) quitando el primer sen). Así nuestra expresión para $f'(x)$ empieza

$$f'(x) = \cos(\operatorname{sen} x^2) \cdot \square\,.$$

Podemos ahora prescindir del primer sen en sen(sen x^2); debemos multiplicar lo que hemos obtenido hasta ahora por la derivada de la función cuyo valor en x es sen x^2, lo cual otra vez es un problema que ya sabemos resolver:

$$f'(x) = \cos(\operatorname{sen} x^2) \cdot \cos x^2 \cdot 2x.$$

Finalmente, he aquí las derivadas de algunas otras funciones que son la composición de sen y S, así como algunas otras composiciones triples. El lector puede sencillamente «ver» que las soluciones son correctas y si no lo ve debe tratar de escribir f como una composición:

$$\begin{aligned}
&\text{si } f(x) = \operatorname{sen}((\operatorname{sen} x)^2) \text{ entonces } & f'(x) &= \cos((\operatorname{sen} x)^2) \cdot 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x \\
&f(x) = [\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)]^2 & f'(x) &= 2 \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x \\
&f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) & f'(x) &= \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x \\
&f(x) = \operatorname{sen}^2(x \operatorname{sen} x) & f'(x) &= 2 \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} x) \cdot \cos(x \operatorname{sen} x) \\
&&&\qquad \cdot [\operatorname{sen} x + x \cos x] \\
&f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x^2 \operatorname{sen} x)) & f'(x) &= \cos(\operatorname{sen}(x^2 \operatorname{sen} x)) \\
&&&\qquad \cdot \cos(x^2 \operatorname{sen} x) \cdot [2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x].
\end{aligned}$$

La regla para tratar composiciones de cuatro (e incluso más) funciones, es fácil: colóquense siempre (mentalmente) paréntesis empezando por la derecha,

$$f \circ (g \circ (h \circ k)),$$

y empiécese reduciendo el cálculo a la derivada de una composición de un número menor de funciones:

$$f'(g(h(k(x)))) \cdot$$ [illegible]

Por ejemplo, si

$$f(x) = \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^2(x)) \qquad \begin{aligned}[t] [f &= S \circ \operatorname{sen} \circ S \circ \operatorname{sen} \\ &= S \circ (\operatorname{sen} \circ (S \circ \operatorname{sen}))] \end{aligned}$$

entonces

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x) \cdot \cos(\operatorname{sen}^2 x) \cdot 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x;$$

si

$$f(x) = \operatorname{sen}((\operatorname{sen} x^2)^2) \qquad \begin{aligned}[t] [f &= \operatorname{sen} \circ S \circ \operatorname{sen} \circ S \\ &= \operatorname{sen} \circ (S \circ (\operatorname{sen} \circ S))] \end{aligned}$$

entonces

$$f'(x) = \cos((\operatorname{sen} x^2)^2) \cdot 2 \operatorname{sen} x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x;$$

si

$$f(x) = \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \qquad \text{[rellene el lector mismo si hace falta]}$$

entonces

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x.$$

Con estos ejemplos como referencia, solamente una cosa hace falta para que el lector se convierta en un experto derivador: la práctica. Se puede ir soltando, con los ejercicios del final del capítulo, y ahora ya es tiempo de que demostremos la regla de la cadena.

El siguiente razonamiento, aunque no es una demostración, indica algunos de los trucos que se podrían ensayar, así como algunas de las dificultades que se encuentran. Empezamos, por supuesto, con la definición

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h}.\end{aligned}$$

Sería deseable encontrar aquí en algún lugar la expresión de $g'(a)$. Un intento puede consistir en ponerla por las buenas:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Esto no tiene mal aspecto, y lo tiene aún mejor si ponemos

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} \\ &\quad = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a) + [g(a+h) - g(a)]) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.\end{aligned}$$

El segundo límite es el factor $g'(a)$ que necesitamos. Si hacemos $g(a+h) - g(a) = k$ [en rigor deberíamos poner $k(h)$], entonces el primer límite es

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(a) + k) - f(g(a))}{k}.$$

Parece que este límite tenga que ser $f'(g(a))$, puesto que la continuidad de g en a implica que k tiende hacia 0 con h. De hecho se puede, y pronto lo haremos, hacer con rigor este tipo de razonamiento. Existe, sin embargo, un problema que el lector habrá notado ya si es de aquellas personas que no dividen a ciegas. Incluso para $h \neq 0$ podríamos tener $g(a+h) - g(a) = 0$, lo cual haría que no tuviese sentido la división y multiplicación por $g(a+h) - g(a)$. Es verdad que solamente nos interesamos por h pequeños, pero $g(a+h) - g(a)$ podría ser 0 para valores arbitrariamente pequeños de h. La manera más fácil en que esto puede ocurrir es siendo g una función constante, $g(x) = c$; entonces $g(a+h) - g(a) = 0$ para todo h. En este caso $f \circ g$ es también una función constante, $(f \circ g)(x) = f(c)$, de modo que la regla de la cadena de hecho se cumple:

$$(f \circ g)'(a) = 0 = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Sin embargo, existen también funciones no constantes g para las cuales $g(a+h) - g(a) = 0$ para h tan pequeños como se quiera. Por ejemplo, si $a = 0$, la función g podría ser

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

En este caso, $g'(0) = 0$ como se demostró en el capítulo 9. Si la regla de la cadena se cumple, debemos tener $(f \circ g)'(0) = 0$ para cualquier f derivable, y esto no es del todo evidente. Se puede obtener una demostración de la regla de la cadena considerando separadamente estas funciones tan recalcitrantes, pero es más fácil prescindir de este método y hacer uso de un artificio.

TEOREMA 9
(REGLA DE LA CADENA)

Si g es derivable en a, y f es derivable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es derivable en a, y

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

DEMOSTRACIÓN

Definamos una función ϕ como sigue.

$$\phi(h) = \begin{cases} \dfrac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)}, & \text{si } g(a+h) - g(a) \neq 0 \\ f'(g(a)), & \text{si } g(a+h) - g(a) = 0. \end{cases}$$

Debe estar claro intuitivamente que ϕ es continua en 0: cuando h es pequeño, $g(a+h) - g(a)$ es también pequeño, de modo que si $g(a+h) - g(a)$ no es 0, entonces $\phi(h)$ estará próximo a $f'(g(a))$; y si es 0, entonces $\phi(h)$ es en realidad igual a $f'(g(a))$, lo cual todavía es mejor. Puesto que la continuidad de ϕ es el punto crucial de toda la demostración, vamos a ofrecer una traducción minuciosa de este argumento intuitivo.

Sabemos que f es derivable en $g(a)$. Esto significa que

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(g(a) + k) - f(g(a))}{k} = f'(g(a)).$$

Así, pues, si $\varepsilon > 0$ existe algún número $\delta' > 0$ tal que, para todo k,

$$(1) \quad \text{si } 0 < |k| < \delta', \text{ entonces} \left| \frac{f(g(a) + k) - f(g(a))}{k} - f'(g(a)) \right| < \varepsilon.$$

Ahora bien, g es derivable en a y por lo tanto continua en a, de modo que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo h,

$$(2) \quad \text{si } |h| < \delta, \text{ entonces } |g(a+h) - g(a)| < \delta'.$$

Consideremos ahora un h cualquiera con $|h| < \delta$. Si $k = g(a+h) - g(a) \neq 0$, entonces

$$\phi(h) = \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f(g(a) + k) - f(g(a))}{k};$$

se sigue de (2) que $|k| < \delta'$ y por lo tanto de (1) que

$$|\phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon.$$

Por otra parte, si $g(a + h) - g(a) = 0$, entonces $\phi(h) = f'(g(a))$, de modo que ciertamente se cumple que

$$|\phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon.$$

Hemos demostrado por lo tanto que

$$\lim_{h \to 0} \phi(h) = f'(g(a)),$$

de modo que ϕ es continua en 0. El resto de la demostración es fácil. Si $h \neq 0$, entonces tenemos

$$\frac{f(g(a + h) - f(g(a))}{h} = \phi(h) \cdot \frac{g(a + h) - g(a)}{h}$$

aun cuando pueda ser $g(a + h) - g(a) = 0$ (porque en tal caso ambos miembros son 0). Por lo tanto,

$$(f \circ g)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(a + h)) - f(g(a))}{h} = \lim_{h \to 0} \phi(h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h}$$
$$= f'(g(a)) \cdot g'(a) \cdot \blacksquare$$

Ahora que ya sabemos derivar fácilmente tantas funciones, podemos volver a considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

En el capítulo 9 demostramos que $f'(0) = 0$, partiendo directamente de la definición (la única manera posible). Para $x \neq 0$ podemos usar los métodos de este capítulo. Tenemos

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right);$$

Así, pues,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Según se desprende de esta fórmula, la primera derivada f' se comporta en verdad muy mal en 0; no es ni siquiera continua en este punto. Si consideramos en vez

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

entonces

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - x \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

En este caso f' es continua en 0, pero $f''(0)$ no existe (porque la expresión $3x^2$ sen $1/x$ define una función que es derivable en 0, pero la expresión $-x$ cos $1/x$ no lo es).

Como se puede suponer, aumentando otra vez la potencia de x se consigue otra mejora. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

entonces

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - x^2 \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Es fácil obtener, partiendo directamente de la definición, que $(f')(0) = 0$, y $f''(x)$ es fácil de hallar para $x \neq 0$:

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - 4x \cos \dfrac{1}{x} - 2x \cos \dfrac{1}{x} - \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

En este caso, la *segunda* derivada f'' no es continua en 0. Pero ahora el lector puede haber colegido la regla general que proponemos establezca en dos de los problemas: Si

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

entonces existen $f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$, pero $f^{(n)}$ no es continua en 0; si

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n+1} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

entonces existen $f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$, y $f^{(n)}$ es continua en 0, pero $f^{(n)}$ no es derivable en 0. Estos ejemplos pueden sugerir que las funciones «razonables» pueden caracterizarse por la posesión de derivadas de órdenes superiores; por mucho que tratemos de ocultar la infinita oscilación de $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$, una derivada de orden suficientemente alto podrá revelar la irregularidad subyacente. Veremos más tarde que, desgraciadamente, pueden ocurrir cosas mucho peores.

Después de estos complicados cálculos vamos a concluir este capítulo con una pequeña observación. Existe la tentación, y parece más elegante, de escribir algunos de los teoremas de este capítulo como ecuaciones acerca de funciones, en vez de acerca de sus valores. Así, pues, el teorema 3 podría escribirse en la forma

$$(f + g)' = f' + g',$$

El teorema 4 podría escribirse

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g,$$

y el teorema 9 aparece a menudo en la forma

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

En rigor estas ecuaciones pueden ser falsas, porque las funciones de la izquierda pueden tener un dominio más amplio que las de la derecha. Sin embargo, casi no vale la pena preocuparse por ello. Si f y g son derivables por doquier en sus dominios, entonces estas ecuaciones y otras como ellas *se cumplen,* y éste es el único caso que interesa.

PROBLEMAS

1. Como ejercicio de entrenamiento, hallar $f'(x)$ para cada una de las f siguientes. [No preocuparse por el dominio de f o f'; obténgase sólo la fórmula para $f'(x)$ que da la solución correcta cuando tiene sentido.]

(i) $f(x) = \operatorname{sen}(x + x^2)$.
(ii) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x^2$.
(iii) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$.
(iv) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$.
(v) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)$.
(vi) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\cos x)}{x}$.
(vii) $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$.
(viii) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{sen} x))$.

2. Hallar $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones f. (Al autor le costó veinte minutos calcular las derivadas para la sección de soluciones, y al lector no le debería costar mucho más. Aunque el calcular rápidamente no constituye el objetivo de las matemáticas, si se quiere tratar con aplomo las aplicaciones teóricas de la regla de la cadena, estas aplicaciones concretas deberían ser un juego de niños; a muchos matemáticos les gusta decir que no saben sumar, pero casi todos ellos saben cuando tienen que hacerlo.)

(i) $f(x) = \operatorname{sen}((x + 1)^2(x + 2))$.
(ii) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2 + \operatorname{sen} x)$.
(iii) $f(x) = \operatorname{sen}^2((x + \operatorname{sen} x)^2)$.
(iv) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right)$.
(v) $f(x) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} x) + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x^2)$.
(vi) $f(x) = (\cos x)^{31^2}$.
(vii) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2 x^2$.
(viii) $f(x) = \operatorname{sen}^3(\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x))$.
(ix) $f(x) = (x + \operatorname{sen}^5 x)^6$.
(x) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))))$.
(xi) $f(x) = \operatorname{sen}((\operatorname{sen}^7 x^7 + 1)^7)$.

(xii) $f(x) = (((x^2 + x)^3 + x)^4 + x)^5$.
(xiii) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen} x^2))$.
(xiv) $f(x) = \operatorname{sen}(6 \cos(6 \operatorname{sen}(6 \cos 6x)))$.
(xv) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}$.
(xvi) $f(x) = \dfrac{1}{x - \dfrac{2}{x + \operatorname{sen} x}}$.
(xvii) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right)$.
(xviii) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen} x}\right)}\right)$.

3. Hallar las derivadas de las funciones tg, ctg, sec y cosec. (No hace falta aprenderse de memoria estas fórmulas, aunque se necesitarán de vez en cuando; si se expresan debidamente las soluciones, resultarán sencillas y algo simétricas.)
4. Para cada una de las siguientes funciones f, hallar $f'(f(x))$ [*no* $(f \circ f)(x)$].

(i) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$.
(ii) $f(x) = \operatorname{sen} x$.
(iii) $f(x) = x^2$.
(iv) $f(x) = 17$.

5. Para cada una de las siguientes funciones f, hallar $f(f'(x))$.

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
(ii) $f(x) = x^2$.
(iii) $f(x) = 17$.
(iv) $f(x) = 17x$.

6. Hallar f' en función de g' si

(i) $f(x) = g(x + g(a))$.
(ii) $f(x) = g(x \cdot g(a))$.
(iii) $f(x) = g(x + g(x))$.
(iv) $f(x) = g(x)(x - a)$.
(v) $f(x) = g(a)(x - a)$.
(vi) $f(x + 3) = g(x^2)$.

7. (a) Un objeto circular va aumentando de tamaño de manera no especificada, pero se sabe que cuando el radio es 6, la tasa de variación del mismo es 4. Hallar la tasa de variación del área cuando el radio es 6. [Si $r(t)$ y $A(t)$ representan el radio y el área en el tiempo t, entonces las funciones r y A satisfacen $A = \pi r^2$; lo indicado es una aplicación directa de la regla de la cadena.]

(b) Supongamos que se nos dice que el objeto circular que hemos estado observando es en realidad la sección transversal de un objeto esférico. Hallar la tasa de variación del ***volumen*** cuando el radio es 6. (Ciertamente hará falta disponer de una fórmula para el volumen de la esfera; en caso de que el lector la haya olvidado, el volumen es $\frac{4}{3}\pi$ veces el cubo del radio.)

(c) Supongamos ahora que la tasa de variación del área de la sección transversal circular es 5 cuando el radio es 3. Hallar la tasa de variación del volumen cuando el radio es 3. Este problema se debe poder resolver de dos maneras: primero usando las fórmulas para el área y el volumen en función del radio; y después expresando el volumen en función del área (para utilizar este método hará falta el problema 9-3).

8. El área de una corona circular de radios interior y exterior variables se mantiene constante e igual a 9π cm^2. El área del círculo exterior varía a razón de 10π cm^2/s. ¿A qué velocidad varía la circunferencia del círculo interior cuando el área de éste es 16π cm^2?

9. Una partícula A se desplaza a lo largo del eje horizontal positivo, mientras otra partícula B lo hace a lo largo de la gráfica de $f(x) = -\sqrt{3}\,x$, $x \leq 0$. En un cierto instante, A se halla en el punto (5, 0) desplazándose a una velocidad de 3 unidades/s; y en este mismo instante, B se halla a una distancia de 3 unidades del origen con una velocidad de desplazamiento de 4 unidades/s. ¿A qué velocidad varía la distancia de A a B?

10. Sea $f(x) = x^2$ sen $1/x$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$. Supongamos también que h y k son dos funciones tales que

$$h'(x) = \text{sen}^2(\text{sen}(x+1)) \qquad k'(x) = f(x+1)$$
$$h(0) = 3 \qquad k(0) = 0.$$

Hallar

(i) $(f \circ h)'(0)$.
(ii) $(k \circ f)'(0)$.
(iii) $\alpha'(x^2)$, donde $\alpha(x) = h(x^2)$. Póngase mucho cuidado.

11. Hallar $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

y

$$g(0) = g'(0) = 0.$$

12. Por medio de la derivada de $f(x) = 1/x$, tal como se ha hallado en el problema 9-1, hallar $(1/g)'(x)$ por medio de la regla de la cadena.

13. (a) Aplicando el problema 9-3 hallar $f'(x)$ para $-1 < x < 1$, si $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

(b) Demostrar que la tangente a la gráfica de f en $(a, \sqrt{1 - a^2})$ corta a la gráfica solamente en este punto (y hacer ver así que la definición geométrica elemental de tangente coincide con la nuestra).

14. Demostrar análogamente que las tangentes a la elipse y a la hipérbola cortan estos conjuntos solamente una vez.

15. Si $f + g$ es derivable en a, ¿son f y g necesariamente derivables en a? Si $f \cdot g$ y f son derivables en a, ¿qué condiciones para f implican que g sea derivable en a?

16. (a) Demostrar que si f es derivable en a, entonces $|f|$ es también derivable en a, siempre que $f(a) \neq 0$.

(b) Dar un contraejemplo si $f(a) = 0$.

(c) Demostrar que si f y g son derivables en a, entonces las funciones $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$ son derivables en a, siempre que $f(a) \neq g(a)$.

(d) Dar un contraejemplo si $f(a) = g(a)$.

17. Si f es tres veces derivable y $f'(x) \neq 0$, la *derivada de Schwarz* de f en x se define como

$$\mathfrak{D}f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

(a) Demostrar que

$$\mathfrak{D}(f \circ g) = [\mathfrak{D}f \circ g] \cdot g'^2 + \mathfrak{D}g.$$

(b) Demostrar que si $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, con $ad - bc \neq 0$, entonces $\mathfrak{D}f = 0$.

En consecuencia, $\mathfrak{D}(f \circ g) = \mathfrak{D}g$.

18. Supongamos que $f^{(n)}(a)$ y $g^{(n)}$ existen. Demostrar la ***fórmula de Leibniz:***

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a).$$

***19.** Demostrar que si $f^{(n)}(g(a))$ y $g^{(n)}(a)$ existen ambas, entonces existe $(f \circ g)^{(n)}(a)$. Un poco de experimentación debería convencer al lector que no es adecuado buscar una fórmula para $(f \circ g)^{(n)}(a)$. Para demostrar que existe $(f \circ g)^{(n)}(a)$ hará falta encontrar una proposición razonable acerca de $(f \circ g)^{(n)}(a)$ que pueda ser demostrada por inducción. Inténtese con algo tal como: «$(f \circ g)^{(n)}(a)$ existe y es suma de términos cada uno de los cuales es un producto de términos de la forma...»

20. (a) Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, hallar una función g tal que $g' = f$. Hállese otra.

(b) Si

$$f(x) = \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \cdots + \frac{b_m}{x^m},$$

hallar una función g con $g' = f$.

(c) ¿Existe una función

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}$$

tal que $f'(x) = 1/x$?

21. Demostrar que existe una función polinómica f de grado n tal que

(a) $f'(x) = 0$ para precisamente $n - 1$ números x.

(b) $f'(x) = 0$ para ningún x, si n es impar.
(c) $f'(x) = 0$ para exactamente un x, si n es par.
(d) $f'(x) = 0$ para exactamente k números x, si $n - k$ es impar.

22. (a) El número a recibe el nombre de **raíz doble** de la función polinómica f si $f(x) = (x - a)^2 g(x)$ para alguna función polinómica g. Demostrar que a es raíz doble de f si y sólo si a es raíz de f y de f' a la vez.
(b) ¿Cuándo tiene $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ una raíz doble? ¿Cuál es la interpretación geométrica de esta condición?

23. Si f es derivable en a, sea $d(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$. Hallar $d'(a)$. En conexión con el problema 22, esto nos da otra solución para el problema 9-20.

*24. Este problema es parecido al problema 3-6. Sean $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ números dados.
(a) Si $x_1, \ldots, x_n$ son números distintos, demostrar que existe una función polinómica f de grado $2n - 1$, tal que $f(x_j) = f'(x_j) = 0$ para $j \neq i$, y $f(x_i) = a_i$, $f'(x_i) = b_i$. Indicación: Recordar el problema 22.
(b) Demostrar que existe una función polinómica f de grado $2n - 1$ con $f(x_i) = a_i$ y $f'(x_i) = b_i$ para todo i.

*25. Supongamos que a y b son dos raíces consecutivas de una función polinómica f, pero que a y b no son raíces dobles, de modo que podemos escribir $f(x) = (x - a)(x - b)g(x)$ donde $g(a) \neq 0$ y $g(b) \neq 0$.
(a) Demostrar que $g(a)$ y $g(b)$ tienen el mismo signo. (Recordar que a y b son raíces consecutivas.)
(b) Demostrar que existe algún número x con $a < x < b$ y $f'(x) = 0$. (Trácese también un dibujo para ilustrar este hecho.) Indicación: Compárese el signo de $f'(a)$ y $f'(b)$.
(c) Demostrar ahora el mismo hecho, aun cuando a y b sean raíces múltiples. Indicación: Si $f(a) = (x - a)^m (x - b)^n g(x)$ donde $g(a) \neq 0$ y $g(b) \neq 0$, considerar la función polinómica $h(x) = f'(x)/(x - a)^{m-1}(x - b)^{n-1}$.

Este teorema fue demostrado por el matemático francés Rolle, en conexión con el problema de aproximar raíces de polinomios, pero el resultado no fue formulado originariamente en términos de derivadas. De hecho, Rolle fue uno de los matemáticos que nunca aceptaron las nuevas ideas del cálculo infinitesimal. No debe juzgarse demasiado terca su actitud, considerando que por un espacio de 100 años nadie fue capaz de definir los límites a no ser en términos que lindaban con la **mística**, pero en general la historia ha sido particularmente benévola con Rolle; su nombre ha sido vinculado a un resultado mucho más general que aparecerá en el próximo capítulo y que constituye la base de los resultados teóricos más importantes del cálculo infini-

tesimal.

26. Supongamos que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g que es continua en 0. Demostrar que f es derivable en 0, y hallar $f'(0)$ en términos de g.

***27.** Supongamos que f es derivable en 0, y que $f(0) = 0$. Demostrar que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g continua en 0. Indicación: ¿Qué ocurrirá si intentamos poner $g(x) = f(x)/x$?

28. Si $f(x) = x^{-n}$ para n en **N**, demostrar que

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} x^{-n-k} \\ &= (-1)^k n! \binom{n+k-1}{k-1} x^{-n-k}, \quad \text{para } x \neq 0. \end{aligned}$$

***29.** Demostrar que es imposible poner $x = f(x)g(x)$ donde f y g son derivables y $f(0) = g(0) = 0$. Indicación: Derívese.

30. ¿Qué es $f^{(k)}(x)$ si

(a) $f(x) = 1/(x-a)^n$?
*(b) $f(x) = 1/(x^2-1)$?

***31.** Sea $f(x) = x^{2n} \operatorname{sen} 1/x$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Demostrar que existen $f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$, y que $f^{(n)}$ no es continua en 0. (Se encontrará la misma dificultad básica que en el problema 19.)

***32.** Sea $f(x) = x^{2n+1} \operatorname{sen} 1/x$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Demostrar que existen $f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$, que $f^{(n)}$ es continua en 0, y que $f^{(n)}$ no es derivable en 0.

33. Con la notación de Leibniz la regla de la cadena debería escribirse:

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}.$$

En vez de esto, se suele encontrar generalmente la siguiente proposición: «Sea $y = g(x)$ y $z = f(y)$. Entonces

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.»$$

Obsérvese que z en dz/dx denota la función compuesta $f \circ g$, mientras que la z de dz/dy denota la función f; se sobreentiende también que dz/dy será «una expresión que encierra y» y que en la solución final y debe sustituirse

por $g(x)$. En cada uno de los siguientes casos hallar dz/dx aplicando esta fórmula; después comparar con el problema 1.

(i) $z = \operatorname{sen} y, \quad y = x + x^2.$
(ii) $z = \operatorname{sen} y, \quad y = \cos x.$
(iii) $z = \cos u, \quad u = \operatorname{sen} x.$
(iv) $z = \operatorname{sen} v, \quad v = \cos u, \quad u = \operatorname{sen} x.$

CAPÍTULO

11

SIGNIFICADO DE LA DERIVADA

Uno de los objetivos de este capítulo será justificar el tiempo que hemos invertido aprendiendo a hallar la derivada de una función. Como veremos, el saber algo acerca de f' nos informa mucho acerca de f. Sin embargo, para obtener información sobre f a partir de información sobre f' hace falta algún trabajo dificultoso. Empezaremos con un teorema que en realidad es fácil.

Este teorema hace referencia al valor máximo de una función en un intervalo. Aunque hemos utilizado este término de una manera informal en el capítulo 7, vale la pena precisar y también generalizar.

DEFINICIÓN

Sea f una función y A un conjunto de números contenido en el dominio de f. Un punto x de A se dice que es un **punto máximo** de f sobre A si

$$f(x) \geq f(y) \text{ para todo } y \text{ de } A.$$

El número $f(x)$ mismo recibe el nombre de **valor máximo** de f sobre A (y decimos también que f «alcanza en x» su valor máximo sobre A).

Obsérvese que el valor máximo de f sobre A puede ser $f(x)$ para varios x distintos (figura 1); en otras palabras, una función f puede tener distintos puntos

máximos sobre A, aunque puede tener a lo sumo un valor máximo. Nos interesará por lo general el caso en que A es un intervalo cerrado $[a, b]$; si f es continua, entonces el teorema 7-3 nos garantiza que f tiene efectivamente un valor máximo sobre $[a, b]$.

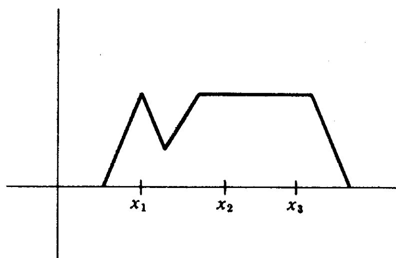


FIGURA 1

La definición de mínimo de f sobre A se deja para el lector. (Una definición posible es la siguiente: f tiene un mínimo sobre A en x, si $-f$ tiene un máximo en x sobre A.)

Estamos ahora en condiciones para dar un teorema que no depende siquiera de la existencia de cotas superiores mínimas.

TEOREMA 1

Sea f una función definida sobre (a, b). Si x es un máximo (o un mínimo) para f sobre (a, b), y f es derivable en x, entonces $f'(x) = 0$. (Obsérvese que no suponemos la derivabilidad, ni siquiera la continuidad, de f en otros puntos.)

DEMOSTRACIÓN

Consideremos el caso en que f tiene un máximo en x. [(La figura 2 ilustra la idea sencilla del razonamiento; las secantes trazadas por puntos a la izquierda de $(x, f(x))$ tienen pendientes ≥ 0, y las secantes trazadas por puntos a la derecha de $(x, f(x))$ tienen pendientes ≤ 0.] Analíticamente, el razonamiento es como sigue.

Si h es un número cualquiera tal que $x + h$ está en (a, b), entonces

$$f(x) \geq f(x + h),$$

puesto que f tiene un máximo sobre (a, b) en x. Esto significa que

$$f(x+h) - f(x) \leq 0.$$

Así, pues, si $h > 0$ tenemos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0,$$

y en consecuencia

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0.$$

Por otra parte, si $h < 0$ tenemos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

de modo que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

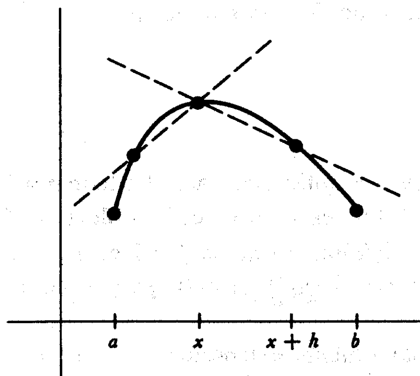


FIGURA 2

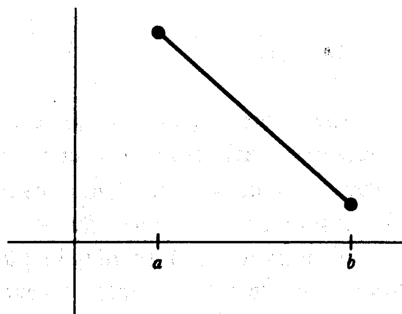


FIGURA 3

Por hipótesis, f es derivable en x, de modo que estos dos límites deben ser iguales entre sí e iguales a $f'(x)$. Esto significa que

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{y} \quad f'(x) \geq 0,$$

de lo cual se sigue que $f'(x) = 0$.

El caso en que f tiene un mínimo en x se deja para el lector (dar una demostración de una línea). ▌

Obsérvese (figura 3) que no podemos sustituir (a, b) por $[a, b]$ en la proposición del teorema [a no ser que añadamos a la hipótesis la condición de que x está en (a, b)].

Puesto que $f'(x)$ depende solamente de los valores de f cerca de x, resulta casi evidente cómo obtener una versión más fuerte del teorema 1. Empezamos con una definición que se ilustra en la figura 4.

DEFINICIÓN

Sea f una función, y A un conjunto de números contenido en el dominio de f. Un punto x de A es un **punto máximo (mínimo) local** de f sobre A si existe algún $\delta > 0$ tal que x es un punto máximo [mínimo] de f sobre $A \cap (x-\delta, x+\delta)$.

TEOREMA 2

Si f está definida sobre (a, b) y tiene un máximo (o mínimo) local en x, y f es derivable en x, entonces $f'(x) = 0$.

DEMOSTRACIÓN

El lector debe darse cuenta de que se trata de una aplicación fácil del teorema 1. ▌

El recíproco del teorema 2 decididamente no es cierto; es posible que $f'(x)$ sea 0 aunque x no sea un punto máximo o mínimo local de f. El ejemplo más sencillo nos lo da la función $f(x) = x^3$; en este caso $f'(0) = 0$, pero f no tiene máximo ni mínimo local en ningún punto.

Probablemente los conceptos erróneos mayormente extendidos en relación con el cálculo infinitesimal se refieren al comportamiento de una función f cerca de x cuando $f'(x) = 0$. La observación hecha en el párrafo anterior es olvidada tan

fácilmente por aquellos que quieren que el mundo sea más sencillo de lo que es, que la vamos a repetir: La recíproca del teorema 2 *no* es cierta; la condición $f'(x) = 0$ *no* implica que x sea un punto máximo o mínimo local de f. Precisamente por esta razón, se ha adoptado una terminología especial para describir números x que satisfacen la condición $f'(x) = 0$.

DEFINICIÓN

> Se llama **punto singular** de una función f a todo número x tal que
>
> $$f'(x) = 0.$$
>
> El número $f(x)$ mismo recibe el nombre de **valor singular** de f.

Los valores singulares de f, junto con algunos otros números, resultan ser los que deben tomarse en consideración para hallar el máximo y el mínimo de una función dada f. Para los no iniciados, el hallar el valor máximo y mínimo de una función representa uno de los aspectos más intrigantes del cálculo infinitesimal y no se puede negar que los problemas de este tipo son divertidos (hasta que se han hecho los 100 primeros).

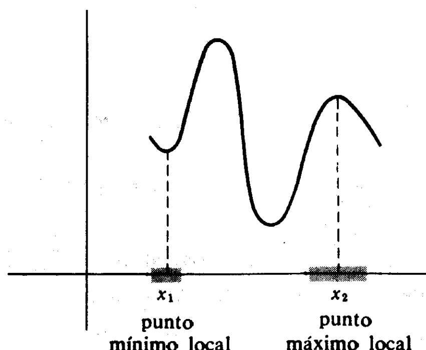


FIGURA 4

Consideremos en primer lugar el problema de hallar el máximo o mínimo de f en un intervalo cerrado $[a, b]$. (Entonces, si f es continua, podemos por lo menos

estar seguros de que existe un máximo y un mínimo.) Para localizar el máximo y el mínimo de f deben considerarse tres clases de puntos:

(1) Los puntos singulares de f en $[a, b]$.
(2) Los extremos a y b.
(3) Los puntos x de $[a, b]$ tales que f no es derivable en x.

Si x es un punto máximo o un punto mínimo de f sobre $[a, b]$, entonces f debe estar en una de las tres clases arriba enumeradas: pues si x no está en el segundo o en el tercer grupo, entonces x está en (a, b) y f es derivable en x; en consecuencia $f'(x) = 0$, por el teorema 1, y esto significa que x pertenece al primer grupo.

Si hay muchos puntos en estas tres categorías, puede todavía no ser fácil hallar el máximo y el mínimo de f, pero cuando existen solamente unos pocos puntos singulares, y solamente unos pocos puntos en los cuales f no es derivable, el procedimiento es bastante directo: Se halla simplemente $f(x)$ para cada x que satisface $f'(x) = 0$, y $f(x)$ para cada x tal que f no es derivable en x y, finalmente, $f(a)$ y $f(b)$. El mayor de todos éstos será el valor máximo de f y el menor será el mínimo. Damos a continuación un ejemplo sencillo.

Supongamos que se desea hallar el máximo y el mínimo de la función

$$f(x) = x^3 - x$$

sobre el intervalo $[-1, 2]$. Para empezar, tenemos

$$f'(x) = 3x^2 - 1,$$

de modo que $f'(x) = 0$ cuando $3x^2 - 1 = 0$, es decir, cuando

$$x = \sqrt{1/3} \quad \text{o} \quad -\sqrt{1/3}.$$

Los números $\sqrt{1/3}$ y $-\sqrt{1/3}$ están ambos en $[-1, 2]$, de modo que el primer grupo de candidatos para el máximo y el mínimo es

$$(1) \quad \sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3}.$$

El segundo grupo contiene los extremos del intervalo

$$(2) \quad -1, 2.$$

El tercer grupo es vacío, puesto que f es derivable en todas partes. La fase final consiste en calcular

$$\begin{aligned} f(\sqrt{1/3}) &= (\sqrt{1/3})^3 - \sqrt{1/3} = \tfrac{1}{3}\sqrt{1/3} - \sqrt{1/3} = -\tfrac{2}{3}\sqrt{1/3}, \\ f(-\sqrt{1/3}) &= (-\sqrt{1/3})^3 - (-\sqrt{1/3}) = -\tfrac{1}{3}\sqrt{1/3} + \sqrt{1/3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{1/3}, \\ f(-1) &= 0, \\ f(2) &= 6. \end{aligned}$$

Evidentemente el valor mínimo es $-\frac{2}{3}\sqrt{1/3}$, que se presenta en $\sqrt{1/3}$ y el valor máximo es 6, que se presenta en 2.

Con este modo de proceder, si es factible, se localizarán siempre los valores máximo y mínimo de una función continua en un intervalo cerrado. Si la función que estamos tratando no es continua, o si estamos buscando el máximo o mínimo sobre un intervalo abierto o sobre toda la recta, entonces no podemos ni siquiera estar seguros de antemano de que existan los valores máximo o mínimo, de modo que toda la información obtenida por este procedimiento puede no decirnos nada. Sin embargo, un poco de ingenio podrá revelar muchas veces la naturaleza de las cosas. En el capítulo 7 resolvimos precisamente un problema de este tipo al demostrar que si n es par, entonces la función

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

tiene un valor mínimo sobre toda la recta. Esto demuestra que el valor mínimo debe presentarse para algún número x que satisfaga

$$0 = f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Si podemos resolver esta ecuación, y comparar los valores de $f(x)$ para tales x, podemos en realidad hallar el mínimo de f. Un ejemplo más puede ser útil. Supongamos que se desea hallar el máximo y el mínimo, si existen, de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

sobre el intervalo abierto $(-1, 1)$. Se tiene

$$f'(x) = \frac{2x}{(1 - x^2)^2},$$

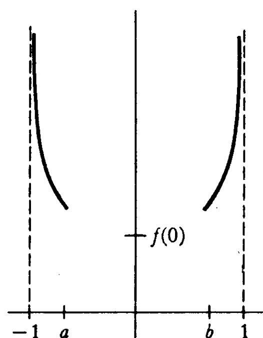


FIGURA 5

de modo que $f'(x) = 0$ solamente para $x = 0$. Podemos ver inmediatamente que para x próximos a 1 ó —1 los valores de $f(x)$ se hacen arbitrariamente grandes, de modo que ciertamente f carece de máximo. Esta observación hace fácil también demostrar que f tiene un mínimo en 0. Basta observar (figura 5) que habrá números a y b con

$$-1 < a < 0 \quad \text{y} \quad 0 < b < 1,$$

tales que $f(x) > f(0)$ para

$$-1 < x \leq a \quad \text{y} \quad b \leq x < 1.$$

Esto significa que el mínimo de f sobre $[a, b]$ es el mínimo de f sobre todo $(-1, 1)$. Ahora bien, sobre $[a, b]$ el mínimo se presenta, o bien en 0 (el único lugar en que es $f' = 0$), o en a o b, y a y b ya han sido excluidos, de modo que el valor mínimo es $f(0) = 1$.

Al resolver estos problemas, intencionadamente no hemos dibujado las gráficas de $f(x) = x^3 - x$ y $f(x) = 1/(1 - x^2)$, pero no irá mal dibujar la gráfica (fig. 6) siempre que no se confíe exclusivamente en el dibujo para demostrar algo. Efectivamente, vamos a presentar ahora un método de esbozar la gráfica de una función que verdaderamente da información suficiente para ser utilizada en la discusión de máximos y mínimos; de hecho podremos encontrar incluso los máximos y mínimos *locales*. Este teorema supone la consideración del signo de $f'(x)$ y se basa en algunos teoremas profundos.

Los teoremas acerca de derivadas demostrados hasta ahora proporcionan siem-

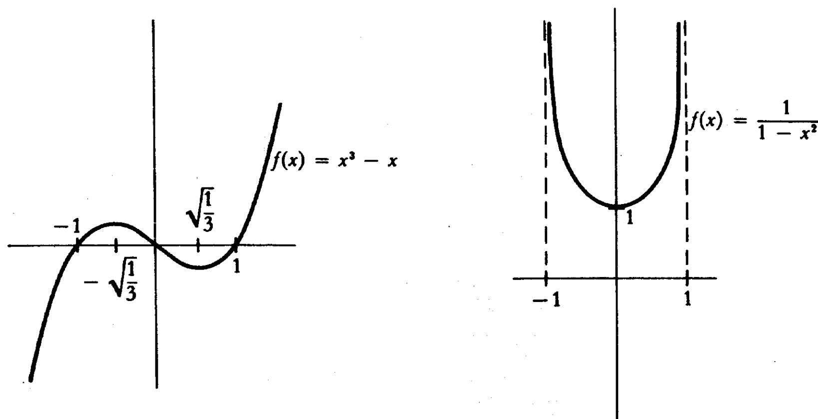


FIGURA 6

pre información acerca de f' en términos de información sobre f. Esto es verdad incluso en el teorema 1, aunque este teorema puede algunas veces aplicarse para determinar cierta información acerca de f, a saber, la localización de máximos y mínimos. Al introducir por primera vez la derivada, destacamos el hecho de que $f'(x)$ no es $[f(x+h)-f(x)]/h$ para ningún h particular, sino solamente el límite de estos números cuando h tiende hacia 0; se tropieza con este hecho al tratar de extraer información acerca de f a partir de información acerca de f'. La ilustración más sencilla de las dificultades que se encuentran nos las suministra la siguiente cuestión: Si $f'(x) = 0$ para todo x, ¿debe ser f una función constante? Es imposible imaginar en qué modo f podría ser otra cosa, y esta convicción es reforzada al considerar la interpretación física; si la velocidad de una partícula es constantemente 0, evidentemente la partícula debe estar en reposo. Sin embargo, es difícil iniciar siquiera una demostración de que solamente las funciones constantes satisfacen $f'(x) = 0$ para todo x. La hipótesis $f'(x) = 0$ significa solamente que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0,$$

y no está claro en absoluto en qué modo se puede utilizar la información acerca del límite para obtener información acerca de la función.

El hecho de que f es una función constante si $f'(x) = 0$ para todo x, y muchos otros hechos de este mismo tipo, pueden obtenerse todos a partir de un teorema fundamental, llamado teorema del valor medio, que establece resultados mucho

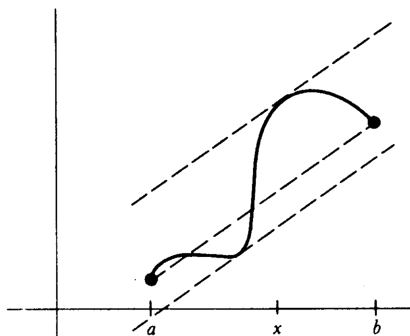


FIGURA 7

más fuertes. La figura 7 hace ver que si f es derivable sobre $[a, b]$, entonces existe algún x en (a, b) tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geométricamente esto significa que alguna tangente es paralela a la recta que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$. El teorema del valor medio afirma que esto es así; existe algún x en (a, b) tal que $f'(x)$, la tasa instantánea de variación de f sobre x, es exactamente igual a la variación media de f sobre $[a, b]$ siendo esta variación media $[f(b) - f(a)]/[b - a]$. (Por ejemplo, si recorremos 60 millas en una hora, entonces en algún momento habremos estado viajando exactamente a 60 millas por hora.) Este teorema es uno de los instrumentos teóricos más importantes del cálculo infinitesimal; probablemente el resultado más profundo acerca de derivadas. De esta afirmación podría quizá deducir el lector que la demostración es difícil, pero en esto se equivocaría; los teoremas difíciles de este libro los hemos pasado ya en el capítulo 7. Bien es verdad que si el lector intenta demostrar por sí mismo el teorema del valor medio probablemente fracasará, pero esto no quiere decir que el teorema sea difícil, ni tampoco es algo por lo que deba avergonzarse. La demostración del teorema por primera vez constituyó una hazaña, pero hoy día podemos presentar una demostración muy sencilla. Será útil empezar con un caso especial.

TEOREMA 3
(TEOREMA DE ROLLE)

Si f es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b), y $f(a) = f(b)$, entonces existe un número x en (a, b) tal que $f'(x) = 0$.

DEMOSTRACIÓN

De la continuidad de f sobre $[a, b]$ se deduce que f tiene un valor máximo y uno mínimo sobre $[a, b]$. Supongamos en primer lugar que el valor máximo se presenta en un punto x de (a, b). Entonces, según el teorema 1, $f'(x) = 0$, y la demostración está hecha (figura 8).

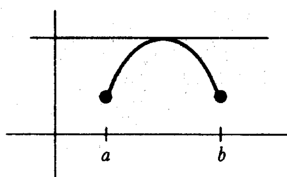


FIGURA 8

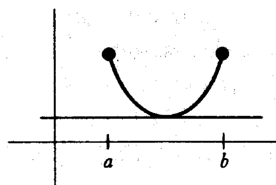


FIGURA 9

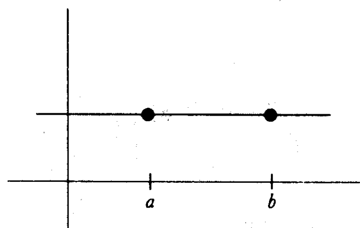


FIGURA 10

Supongamos ahora que el valor mínimo de f se presenta en algún punto x de (a, b). Entonces, otra vez $f'(x) = 0$ según el teorema 1 (figura 9).

Supongamos, finalmente, que los valores máximo y mínimo se presentan ambos en los extremos. Puesto que $f(a) = f(b)$, los valores máximo y mínimo de f son iguales, de modo que f es una función constante (figura 10), y para una función constante se puede elegir cualquier x de (a, b). ▮

Observemos que para aplicar el teorema 1 fue verdaderamente necesaria la

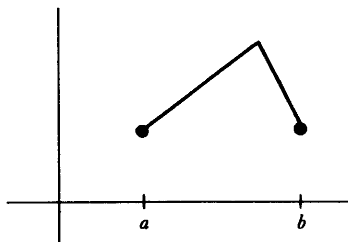


FIGURA 11

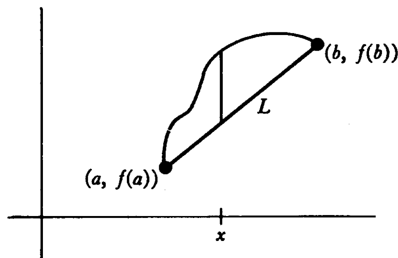


FIGURA 12

hipótesis de que f fuese derivable en todo punto de (a, b). Sin esta suposición, el teorema es falso (figura 11).

Puede resultar sorprendente que se dé un nombre especial a un teorema tan fácil como el teorema de Rolle. La razón está en que, aunque el teorema de Rolle es un caso particular del teorema del valor medio, suministra también una demostración sencilla de este último teorema. Para demostrar el teorema del valor medio aplicaremos el teorema de Rolle a la función que da la longitud del segmento vertical indicado en la figura 12; ésta es la diferencia entre $f(x)$, y la altura en x de la recta L entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Puesto que L es la gráfica de

$$g(x) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) + f(a),$$

nos conviene considerar

$$f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) - f(a).$$

La constante $f(a)$ resulta ser irrelevante.

TEOREMA 4
(TEOREMA DEL VALOR MEDIO)

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un número x en (a, b) tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

DEMOSTRACIÓN

Sea

$$h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a).$$

Evidentemente, h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a), \\ h(b) &= f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](b - a) \\ &= f(a). \end{aligned}$$

En consecuencia, podemos aplicar el teorema de Rolle a h y deducir que existe algún x en (a, b) tal que

$$0 = h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

De modo que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \blacksquare$$

Observemos que el teorema del valor medio es todavía de aquellos teoremas en los que se obtiene información acerca de f' a partir de información acerca de f. Esta información es, sin embargo, tan fuerte que podemos ir ahora en la dirección opuesta.

COROLARIO 1

Si se define f sobre un intervalo y $f'(x) = 0$ para todo x del intervalo, entonces f es constante en el intervalo.

DEMOSTRACIÓN

Sean a y b dos puntos cualesquiera del intervalo con $a \neq b$. Entonces existe algún x en (a, b) tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(x) = 0$ para todo x del intervalo, de modo que

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

y en consecuencia $f(a) = f(b)$. Así, pues, el valor de f en dos puntos cualesquiera del intervalo es el mismo, es decir, f es constante en el intervalo. ▌

Naturalmente, el corolario 1 no se cumple para funciones definidas en dos o más intervalos (figura 13).

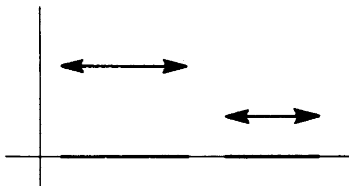
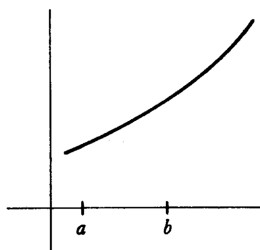


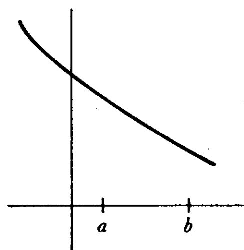
FIGURA 13

COROLARIO 2

Si f y g están definidas en el mismo intervalo y $f'(x) = g'(x)$ para todo x del intervalo, entonces existe algún número c tal que $f + g = c$. ▌



(a) función creciente



(b) función decreciente

FIGURA 14

DEMOSTRACIÓN

Para todo x del intervalo se tiene $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, de modo que, según el corolario 1, existe un número c tal que $f - g = c$. ▮

La proposición del corolario siguiente exige alguna terminología que se ilustra en la figura 14.

DEFINICIÓN

Se dice que una función f es **creciente** sobre un intervalo si $f(a) < f(b)$ siempre que a y b sean dos puntos del intervalo con $a < b$. La función f es **decreciente** sobre un intervalo si $f(a) > f(b)$ para todos los a y b del intervalo con $a < b$. (Muchas veces decimos simplemente que f es creciente o decreciente, en cuyo caso se sobreentiende que el intervalo es el dominio de f.)

COROLARIO 3

Si $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es creciente en el intervalo; si $f'(x) < 0$ para todo x del intervalo, entonces f es decreciente en el intervalo.

DEMOSTRACIÓN

Consideremos el caso $f'(x) > 0$. Sean a y b dos puntos del intervalo con $a < b$. Entonces existe algún x en (a, b) con

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(x) > 0$ para todo x de (a, b), de modo que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

Puesto que $b - a > 0$ se sigue que $f(b) > f(a)$.

La demostración en el caso de ser $f'(x) < 0$ para todo x se deja para el lector. ▮

Obsérvese que si bien son ciertos los recíprocos de los corolarios 1 y 2 (y ade-

más evidentes), el recíproco del corolario 3 es falso. Si f es creciente, es fácil ver que $f'(x) \geq 0$ para todo x, pero puede valer el signo de igualdad para algún x [considérese $f(x) = x^3$].

El corolario 3 aporta información suficiente para adquirir una buena idea de la gráfica de una función trazando el menor número posible de puntos. Consideremos una vez más la función $f(x) = x^3 - x$. Tenemos

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Hemos observado ya que $f'(x) = 0$ para $x = \sqrt{1/3}$ y $x = -\sqrt{1/3}$, y es también posible determinar el signo de $f'(x)$ para todos los demás x. Observemos que $3x^2 - 1 > 0$ precisamente cuando

$$\begin{gathered} 3x^2 > 1, \\ x^2 > \tfrac{1}{3}, \\ x > \sqrt{1/3} \quad \text{o} \quad x < -\sqrt{1/3}; \end{gathered}$$

Así, pues, $3x^2 - 1 < 0$ precisamente cuando

$$-\sqrt{1/3} < x < \sqrt{1/3}.$$

Así f es creciente para $x < -\sqrt{1/3}$, decreciente entre $-\sqrt{1/3}$ y $\sqrt{1/3}$, y otra vez creciente para $x > \sqrt{1/3}$. Combinando esta información con los siguientes hechos

(1) $f(-\sqrt{1/3}) = \frac{2}{3}\sqrt{1/3}$,
$f(\sqrt{1/3}) = -\frac{2}{3}\sqrt{1/3}$,
(2) $f(x) = 0$ para $x = -1, 0, 1$,
(3) $f(x)$ se hace grande con x, y grande negativo cuando x es grande negativo.

es posible trazar una aproximación bastante respetable de la gráfica (figura 15).

Observemos de paso que los intervalos en que f crece y decrece los podríamos haber hallado sin molestarnos en examinar el signo de f'. Por ejemplo, puesto que f' es continua, y se anula solamente en $-\sqrt{1/3}$ y $\sqrt{1/3}$, sabemos que f' conserva siempre el mismo signo en el intervalo $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$. Puesto que $f(-\sqrt{1/3}) > f(\sqrt{1/3})$, se sigue que f decrece en este intervalo. Análogamente, f' conserva siempre el mismo signo en $(\sqrt{1/3}, \infty)$ y $f(x)$ es grande para x grandes, de modo que f debe ser creciente en $(\sqrt{1/3}, \infty)$. Otro punto que merece destacar:

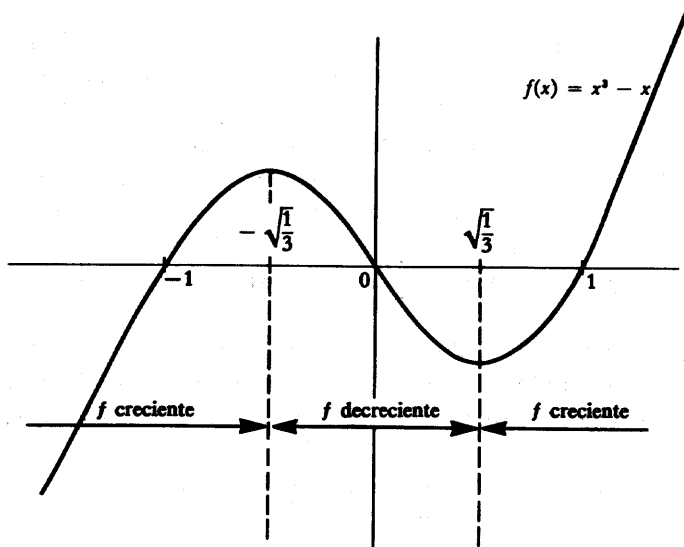


FIGURA 15

Si f' es continua, entonces el signo de f' en el intervalo entre dos puntos singulares adyacentes puede determinarse sencillamente hallando el signo de $f'(x)$ para *cualquier* x de este intervalo.

Nuestro trazado de la gráfica de $f(x) = x^3 - x$ contiene información suficiente para permitirnos afirmar confiadamente que $-\sqrt{1/3}$ es un punto máximo local y $\sqrt{1/3}$ un punto mínimo local. Podemos dar, en efecto, un esquema general para decidir si un punto singular es un punto máximo local, un punto mínimo local, o ninguna de las dos cosas (figura 16):

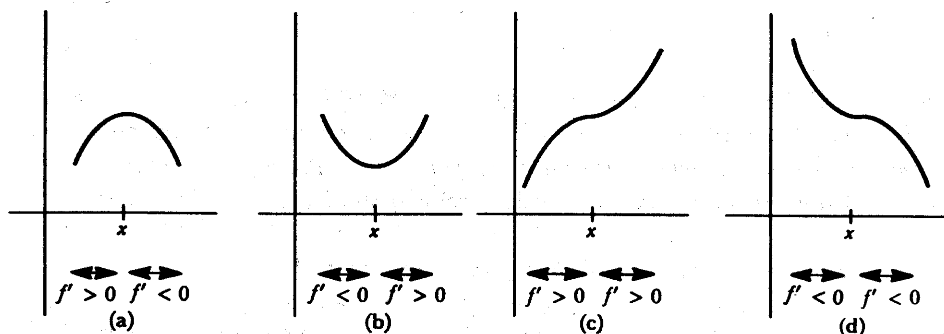


FIGURA 16

(1) Si $f' > 0$ en algún intervalo a la izquierda de x y $f' < 0$ en algún intervalo a la derecha de x, entonces x es un punto máximo local.
(2) Si $f' < 0$ en algún intervalo a la izquierda de x y $f' > 0$ en algún intervalo a la derecha de x, entonces x es un punto mínimo local.
(3) Si f' tiene el mismo signo en algún intervalo a la izquierda de x que en algún intervalo a la derecha, entonces x no es punto máximo ni punto mínimo local.

(No hace falta aprenderse de memoria estas reglas; siempre puede uno mismo hacerse el dibujo.)

Las funciones polinómicas pueden analizarse todas de esta manera, y es incluso posible describir la forma general de la gráfica de tales funciones. Para empezar, nos hace falta un resultado ya mencionado en el problema 3-7: Si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

entonces f tiene a lo sumo n «raíces», es decir, existen a lo sumo n números x tales que $f(x) = 0$. Aunque esto es en realidad un teorema algebraico, puede aplicarse el cálculo infinitesimal para obtener una demostración fácil. Obsérvese que si x_1 y x_2 son raíces de f (figura 17), de modo que, $f(x) = 0$ entonces según el

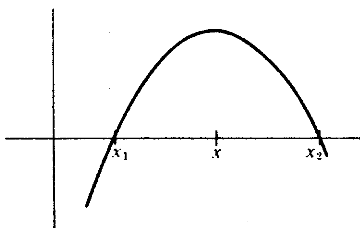


FIGURA 17

teorema de Rolle, existe un número x entre x_1 y x_2 tal que $f'(x) = 0$. Esto significa que si f tiene k raíces distintas $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$, entonces f' tiene por lo menos $k - 1$ raíces distintas: Una entre x_1 y x_2, una entre x_2 y x_3, etc. Es ahora fácil demostrar por inducción que una función polinómica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

tiene a lo sumo n raíces: La afirmación se cumple ciertamente para $n = 1$, y si suponemos que se cumple para n, entonces el polinomio

$$g(x) = b_{n+1}x^{n+1} + b_n x^n + \cdots + b_0$$

no puede tener más de $n + 1$ raíces, pues si así fuera, g' tendría más de n raíces.

Con esta información no es difícil describir la gráfica de

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

La derivada, al ser una función polinómica de grado $n - 1$, tiene a lo sumo $n - 1$ raíces. Por lo tanto, f tiene a lo sumo $n - 1$ puntos singulares. Por supuesto, un punto singular no es necesariamente un punto máximo o mínimo local, pero de todos modos, si a y b son puntos singulares adyacentes de f, entonces f' se conservará o bien positiva o bien negativa sobre (a, b), ya que f' es continua; en consecuencia, f será o bien creciente o bien decreciente sobre (a, b). Así, pues, f tiene a lo sumo n regiones de decrecimiento o crecimiento.

Como ejemplo específico, consideremos la función

$$f(x) = x^4 - 2x^2.$$

Puesto que

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x - 1)(x + 1),$$

los puntos singulares de f son -1, 0, y 1, y

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1, \\ f(0) &= 0, \\ f(1) &= -1. \end{aligned}$$

El comportamiento de f en los intervalos entre los puntos singulares puede determinarse por uno de los métodos antes mencionados. En particular, podríamos determinar el signo de f' en estos intervalos examinando simplemente la fórmula para $f'(x)$. Por otra parte, podemos ver sólo a partir de los tres valores singulares (figura 18) que f crece sobre $(-1, 0)$ y decrece sobre $(0, 1)$. Para determinar el signo de f' en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$ podemos calcular

$$\begin{aligned} f'(-2) &= 4 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) = -24, \\ f'(2) &= 4 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 = 24, \end{aligned}$$

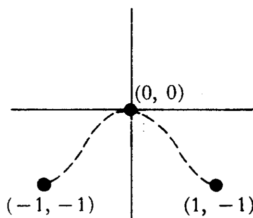


FIGURA 18

y concluir que f decrece sobre $(-\infty, -1)$ y crece sobre $(1, \infty)$. Estas conclusiones se siguen también del hecho de ser $f(x)$ grande para x grande y para x grande negativo.

Podemos dar ya un buen trazado de la gráfica; los toques finales nos los dan otros dos datos (figura 19). En primer lugar, es fácil determinar que $f(x) = 0$ para $x = 0, \pm\sqrt{2}$; en segundo lugar está claro que f es par, $f(x) = f(-x)$, de modo que la gráfica es simétrica respecto al eje vertical. La función $f(x) = x^3 - x$, trazada ya en la figura 15, es impar, $f(x) = -f(-x)$, y en consecuencia es simétrica respecto al origen. Puede ahorrarse la mitad del trabajo de trazar la gráfica teniendo en cuenta estas cosas al principio.

En varios problemas de este capítulo y de capítulos sucesivos se pide trazar la gráfica de funciones. En cada caso se debe determinar

(1) Los puntos singulares de f,
(2) El valor de f en los puntos singulares,
(3) El signo de f' en las regiones entre puntos singulares (si esto no está claro ya),
(4) Los números x tales que $f(x) = 0$ (si esto es posible),
(5) El comportamiento de $f(x)$ cuando x se hace grande o grande negativo (si es posible).

Recuérdese finalmente que una comprobación rápida, para ver si la función es par o impar, puede ahorrar mucho trabajo.

Este tipo de análisis, si se hace con cuidado, revelará por lo general los rasgos principales de la gráfica, pero a veces existen algunas características especiales que hacen necesario discurrir más. Es imposible anticiparlas todas, pero hay una información que es con frecuencia muy importante. Si f no está definida en ciertos puntos (por ejemplo, si f es una función racional cuyo denominador se anula en algunos puntos), entonces el comportamiento de f cerca de estos puntos debe determinarse.

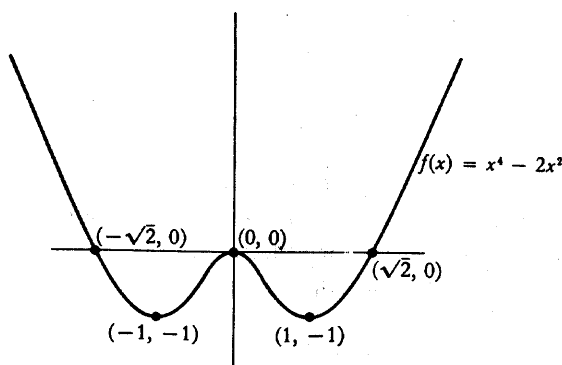


FIGURA 19

Por ejemplo, consideremos la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1},$$

la cual no está definida en 1. Tenemos

$$f'(x) = \frac{(x-1)(2x-2) - (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Así, pues,

(1) los puntos singulares de f son 0, 2.

Además,

(2) $f(0) = -2,$
$f(2) = 2.$

Puesto que f no está definida en todo el intervalo $(0, 2)$, el signo de f' debe determinarse por separado en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 2)$, así como en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$. Podemos hacer esto eligiendo puntos particulares en cada uno de estos intervalos, o simplemente observando con atención la fórmula para f'. De cualquiera de estas maneras encontramos que

$$
\begin{aligned}
(3)\quad f'(x) &> 0 \quad \text{si} \quad x < 0,\\
f'(x) &< 0 \quad \text{si} \quad 0 < x < 1,\\
f'(x) &< 0 \quad \text{si} \quad 1 < x < 2,\\
f'(x) &> 0 \quad \text{si} \quad 2 < x.
\end{aligned}
$$

Finalmente, debemos determinar el comportamiento de $f(x)$ cuando x se hace grande o grande negativo, así como cuando x se aproxima a 1 (esta información nos suministrará otra manera de determinar las regiones en las cuales f crece y decrece). Para examinar el comportamiento cuando x se hace grande escribimos

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1};$$

evidentemente $f(x)$ está próximo a $x - 1$ (y es ligeramente mayor) cuando x es grande, y $f(x)$ está próximo a $x - 1$ (pero ligeramente menor) cuando x es grande negativo. El comportamiento de f cerca de 1 es también fácil de determinar; puesto que

$$\lim_{x \to 1} (x^2 - 2x + 2) = 1 \neq 0,$$

la fracción

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

se hace grande cuando x se aproxima a 1 desde arriba y grande negativo cuando x se aproxima a 1 desde abajo.

Toda esta información puede parecer algo abrumadora, pero existe solamente una manera de coordinarla (figura 20); asegúrese al lector de que sabe explicar cada uno de los rasgos de la gráfica.

Una vez concluido el trazado, podemos observar que tiene el aspecto de la gráfica de una función impar desplazada en una unidad, y la expresión

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2 + 1}{x - 1}$$

hace ver que éste es el caso. Sin embargo, ésta es una de aquellas características

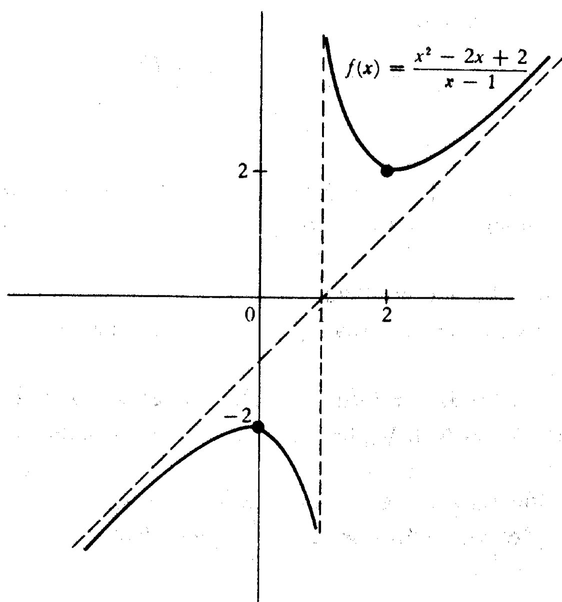


FIGURA 20

especiales que deben investigarse solamente después de haber utilizado la otra información para obtener una idea general del aspecto de la gráfica.

Aunque la localización de los máximos y mínimos locales de una función queda revelada siempre mediante un dibujo detallado de su gráfica, por lo general no hace falta trabajar tanto. Existe un criterio popular para los máximos y mínimos locales que depende del comportamiento de la función solamente en sus puntos singulares.

TEOREMA 5

Supongamos $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en a; si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en a.

DEMOSTRACIÓN

Por definición,

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}.$$

Puesto que $f'(a) = 0$, esto puede escribirse

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h)}{h}.$$

Supongamos ahora que $f''(a) > 0$. Entonces $f'(a+h)/h$ debe ser positivo para h suficientemente pequeño. Por lo tanto:

$f'(a+h)$ debe ser positivo para $h > 0$ suficientemente pequeño
y $f'(a+h)$ debe ser negativo para $h < 0$ suficientemente pequeño.

Esto significa (corolario 3) que f crece en algún intervalo a la derecha de a y f decrece en algún intervalo a la izquierda de a. En consecuencia, f tiene un mínimo local en a.

La demostración para el caso $f''(a) < 0$ es parecida. ▮

El teorema 5 puede aplicarse a la función $f(x) = x^3 - x$, ya considerada. Tenemos

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$
$$f''(x) = 6x.$$

En los puntos singulares $-\sqrt{1/3}$ y $\sqrt{1/3}$, tenemos

$$f''(-\sqrt{1/3}) = -6\sqrt{1/3} < 0,$$
$$f''(\sqrt{1/3}) = 6\sqrt{1/3} > 0.$$

En consecuencia, $-\sqrt{1/3}$ es un punto máximo local y $\sqrt{1/3}$ un punto mínimo local.

Aunque el teorema 5 resultará muy útil para funciones polinómicas, la derivada segunda de muchas funciones es tan complicada que resulta más fácil considerar el signo de la primera derivada. Además, si a es un punto singular de f puede ocurrir que $f''(a) = 0$. En este caso, el teorema 5 no suministra ninguna información: es posible que a sea un punto máximo local, un punto mínimo local, o ninguna de las dos cosas, según se ve (figura 21) en las funciones

$$f(x) = -x^4, \quad f(x) = x^4, \quad f(x) = x^5;$$

en los tres casos $f'(0) = f''(0) = 0$, pero 0 es un punto máximo local para la primera, un punto mínimo local para la segunda, y no es ni máximo ni mínimo local para la tercera. El estudio de este punto se proseguirá en la parte IV.

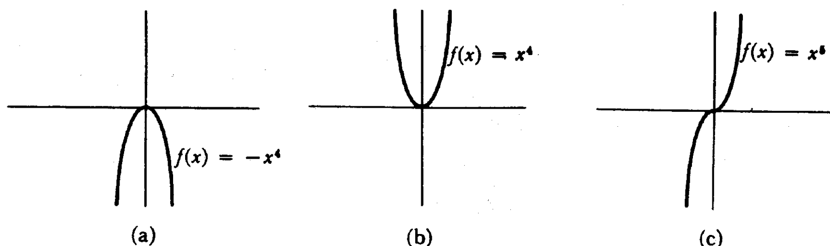


FIGURA 21

Es interesante observar que el teorema 5 demuestra automáticamente un recíproco parcial de sí mismo.

TEOREMA 6

Supongamos que existe $f''(a)$. Si f tiene un mínimo local en a, entonces $f''(a) \geq 0$; si f tiene un máximo local en a, entonces $f''(a) \leq 0$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que f tiene un mínimo local en a. Si $f''(a) < 0$, entonces f tendría también un máximo local en a, según el teorema 5. Así, pues, f sería constante conteniendo a, de modo que $f''(a) = 0$, lo cual es una contradicción. Se debe tener, por lo tanto, $f''(a) \geq 0$.

El caso de un máximo local se trata de manera análoga.

[Este recíproco parcial del teorema 5 es lo más que se puede conseguir: los signos $\geq$ y $\leq$ no pueden ser sustituidos por $>$ y $<$, según se ve en las funciones $f(x) = x^4$ y $f(x) = -x^4$.]

En lo que queda de este capítulo no trataremos ya del trazado de gráficas, ni de máximos y mínimos, sino de tres consecuencias del teorema del valor medio. La primera de ellas es un teorema sencillo, pero muy elegante, que desempeña un papel importante en el capítulo 15, y que también arroja luz en muchos ejemplos que se han presentado en los capítulos anteriores.

TEOREMA 7

Supongamos que f es continua en a, y que existe $f'(x)$ para todos los x de algún intervalo que contiene a, excepto posiblemente para $x = a$. Supongamos, además, que existen $\lim_{x\to a} f'(x)$. Entonces existe también $f'(a)$, y

$$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

DEMOSTRACIÓN

Por definición,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Para $h > 0$ suficientemente pequeño, la función f será continua en $[a, a+h]$ y derivable en $(a, a+h)$ (un enunciado parecido se cumple para $h < 0$ suficientemente pequeño). Según el teorema del valor medio, existe un número α_h en $(a, a+h)$ tal que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(\alpha_h).$$

Ahora bien, α_h se aproxima a a cuando h se aproxima a 0, puesto que α_h está en $(a, a+h)$; de la existencia de $\lim_{x\to a} f'(x)$, se sigue que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(\alpha_h) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

(Para este paso final, tratado aquí de manera algo informal, conviene que el lector aporte un razonamiento riguroso del tipo ε-δ.) ▮

Aunque f sea una función derivable por todas partes, es todavía posible que f' sea discontinua. Esto ocurre, por ejemplo, si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Según el teorema 7, sin embargo, la gráfica de f' no puede nunca presentar una discontinuidad del tipo indicado en la figura 22. El problema 55 suministra las

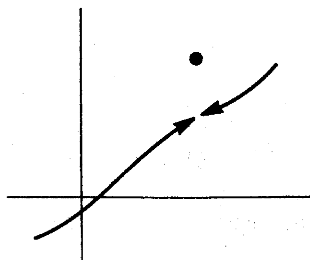


FIGURA 22

líneas generales de la demostración de otro elegante teorema que proporciona mayor información acerca de la función f', y el problema 56 utiliza este resultado para confirmar el teorema 7.

El próximo teorema, que es una generalización del teorema de valor medio, tiene interés principalmente por sus aplicaciones.

TEOREMA 8
(TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY)

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces existe un número x en (a, b) tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x).$$

[Si $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0$, esta ecuación puede escribirse en la forma

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Obsérvese que si $g(x) = x$ para todo x, entonces $g'(x) = 1$ y obtenemos el teorema del valor medio. Por otra parte, al aplicar el teorema del valor medio a f y a g por separado, se encuentra que existen x e y en (a, b) con

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(y)};$$

pero no existe ninguna garantía de que los x e y hallados de esta manera sean iguales. Estas observaciones pueden hacer creer que el teorema del valor medio de Cauchy ha de ser muy difícil de demostrar, pero en realidad será suficiente el más sencillo de los artificios.]

DEMOSTRACIÓN

Sea

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)].$$

Entonces h es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), y

$$h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b).$$

Del teorema de Rolle se sigue que $h'(x) = 0$ para algún x de (a, b), lo cual significa que

$$0 = f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - (a)]. \blacksquare$$

El teorema del valor medio de Cauchy es el instrumento básico que se necesita para demostrar un teorema que facilita el cálculo de límites de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

cuando

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

En este caso, no es aplicable el teorema 5-3. Toda derivada es un límite de esta forma y el cálculo de derivadas requiere con frecuencia bastante trabajo. Sin embargo, si ya se conocen algunas derivadas, se podrán calcular con facilidad muchos límites de esta forma.

TEOREMA 9
(REGLA DE L'HÔPITAL)

Supongamos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

y supongamos también que existe $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$. Entonces existe $\lim_{x \to a} f(x)/g(x)$, y

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Obsérvese que el teorema 7 es un caso particular.)

DEMOSTRACIÓN

La hipótesis de que existe $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ contiene implícitamente dos suposiciones:

(1) existe un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ tal que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen para todo x de $(a - \delta, a + \delta)$ excepto, posiblemente, para $x = a$,
(2) en este intervalo $g'(x) \neq 0$ con, una vez más, la posible excepción de $x = a$.

Por otra parte, no se supone siquiera que f y g estén definidas en a. Si definimos $f(a) = g(a) = 0$ [cambiando si es preciso los valores anteriores de $f(a)$ y $g(a)$], entonces f y g son continuas en a. Si $a < x < a + \delta$, entonces el teorema del valor medio y el teorema del valor medio de Cauchy son aplicables a f y g sobre el intervalo $[a, x]$ (y una proposición análoga es válida para $a - \delta < x < a$). Aplicando primero el teorema de valor medio a g, vemos que $g(x) \neq 0$, pues si fuera $g(x) = 0$ entonces existiría algún x_1 en (a, x) con $g'(x_1) = 0$, en contradicción con (2). Aplicando ahora el teorema del valor medio de Cauchy a f y g, vemos que existe un número α_x en (a, x) tal que

$$[f(x) - 0]g'(\alpha_x) = [g(x) - 0]f'(\alpha_x)$$

o

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}.$$

Ahora bien, α_x se aproxima a a cuando x se aproxima a a, puesto que α_x está en (a, x); de la existencia de $\lim_{y \to a} f'(y)/g'(y)$, se sigue que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \lim_{y \to a} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

(Una vez más, se invita al lector a que aporte los detalles de esta parte del razonamiento.) ▌

PROBLEMAS

1. Para cada una de las siguientes funciones, hallar el máximo y el mínimo en los intervalos indicados, hallando los puntos del intervalo en que la derivada es 0 y comparando los valores en estos puntos con los valores en los extremos.

(i) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ sobre $[-2, 2]$.
(ii) $f(x) = x^5 + x + 1$ sobre $[-1, 1]$.
(iii) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ sobre $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ sobre $[-\frac{1}{2}, 1]$.
(v) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ sobre $[-1, \frac{1}{2}]$.
(vi) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ sobre $[0, 5]$.

2. Trácese ahora la gráfica de cada una de las funciones del problema y hállense los puntos máximo y mínimo locales.

3. Esbozar las gráficas de las funciones siguientes

(i) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
(ii) $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2}$.
(iii) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.
(iv) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4. (a) Si $a_1 < \dots a_n$, hallar el valor mínimo de $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$.

*(b) Hallar ahora el valor mínimo de $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$. Éste es un problema para el que el cálculo infinitesimal no sirve: En los intervalos entre los a_i la función f es lineal, de manera que el mínimo se presenta evidentemente en uno de los a_i, y éstos son precisamente los puntos en

que f no es derivable. Sin embargo, la solución es fácil si se considera cómo varía $f(x)$ al pasar de uno a otro de estos intervalos.

*(c) Sea $a > 0$. Demostrar que el valor máximo de

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-a|}$$

es $(2+a)/(1+a)$. [Puede hallarse por separado la derivada en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, a)$ y (a, ∞)].

5. Para cada una de las siguientes funciones hallar los puntos máximo y mínimo locales.

(i) $$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 3, 5, 7, 9 \\ 5, & x = 3 \\ -3, & x = 5 \\ 9, & x = 7 \\ 7, & x = 9. \end{cases}$$

(ii) $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

(iii) $$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional.} \end{cases}$$

(iv) $$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1/n \text{ para algún } n \text{ de } \mathbf{N} \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

(v) $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si el desarrollo decimal de } x \text{ contiene un } 5 \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

6. (a) Sea (x_0, y_0) un punto del plano, y sea L la gráfica de la función $f(x) = mx + b$. Hallar el punto $\bar{x}$ tal que la distancia de (x_0, y_0) a $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ sea mínima. Tener en cuenta que hacer mínima esta distancia es lo mismo que hacer mínimo su cuadrado. Esto puede simplificar algo los cálculos.

(b) Hallar también $\bar{x}$ sabiendo que la recta que une (x_0, y_0) con $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ es perpendicular a L.

(c) Hallar la distancia de (x_0, y_0) a L, o sea la distancia de (x_0, y_0) a $(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Los cálculos resultarán más sencillos suponiendo primero que es

$b = 0$; el resultado se aplica después a la gráfica de $f(x) - mx$ y al punto $(x_0, y_0 - b)$. Comparar con el Problema 4-22.

(d) Considerar una recta descrita por la ecuación $Ax + By + C = 0$ (Problema 4-7). Demostrar que la distancia de (x_0, y_0) a esta recta es $(Ax_0 + By_0 + C)/\sqrt{A^2 + B^2}$.

7. El problema anterior sugiere la siguiente pregunta: ¿Cuál es la relación entre los puntos críticos de f y los de f^2?

8. Se traza una recta desde el punto $(0, a)$ hasta el eje horizontal y desde ahí otra a $(1, b)$, como en la figura 23. Demostrar que la longitud total es mínima cuando los ángulos α y β son iguales. [Como es natural, deberá entrar en juego una función: expresar la longitud en función de x, donde $(x, 0)$ es el punto del eje horizontal. La línea de puntos de la figura 23 sugiere una demostración geométrica; tanto en un caso como en otro puede resolverse el problema sin necesidad de hallar el punto $(x, 0)$.]

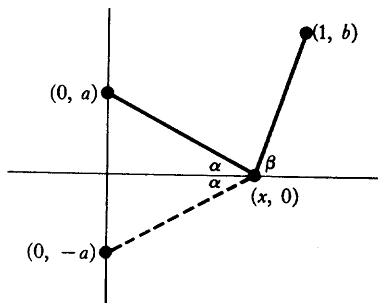


FIGURA 23

9. Demostrar que entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

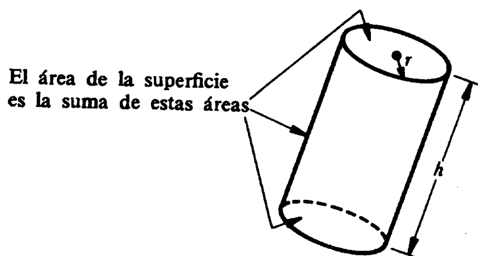


FIGURA 24

10. Entre todos los cilindros circulares rectos de volumen fijo V, hallar el de menor superficie (incluyendo las superficies de las caras superior e inferior como en la figura 24).

11. Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud a, se hace girar alrededor de uno de sus catetos. ¿Qué volumen máximo puede tener un cono engendrado de esta manera?

12. Dos pasillos de anchuras respectivas a y b se encuentran formando ángulo recto. ¿Qué longitud máxima puede tener una escalera de mano para poder ser pasada horizontalmente de uno a otro pasillo? (Figura 25.)

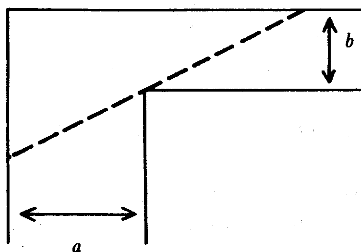


FIGURA 25

13. Se proyecta un jardín en forma de sector circular con un cierto radio R y un cierto ángulo central θ. El área del jardín ha de ser fija A (figura 26). ¿Qué valores de R y θ (en radianes) hacen mínimo el perímetro que bordea el jardín?

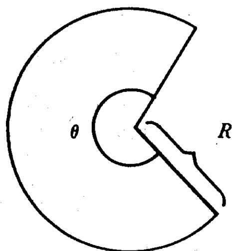


FIGURA 26

14. Demostrar que la suma de un número y su recíproco es por lo menos 2.

15. Hallar el trapecio de área máxima que puede inscribirse en un semicírculo

de radio a, con una de sus bases apoyada sobre el diámetro.

16. Se desplaza un ángulo recto a lo largo del diámetro de un círculo de radio a, tal como se indica en la figura 27. ¿Qué longitud máxima $(A + B)$ puede ser interceptada por el círculo?

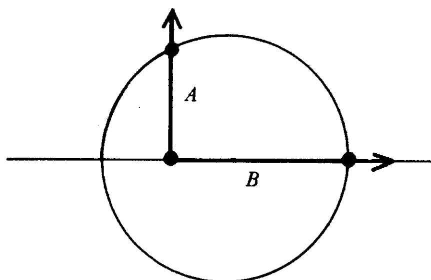


FIGURA 27

17. Miguel, el ecologista, tiene que cruzar un lago circular de una milla de radio. Puede hacerlo ya sea atravesándolo a remo a 2 millas por hora, o bordeándolo a pie a 4 millas por hora, o parte a remo y parte andando (Figura 28). ¿Cómo tendrá que hacerlo para:

(i) ver el máximo de paisaje?

(ii) cruzar lo más rápido posible?

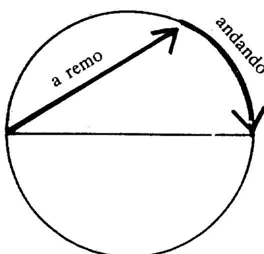


FIGURA 28

18. Se dobla el ángulo inferior derecho de una hoja de papel de modo que toque el lado izquierdo, tal como se indica en la figura 29. Si la anchura del papel es α y la hoja muy larga, demostrar que la longitud mínima de la señal del doblez es $3\sqrt{3}\,\alpha/4$.

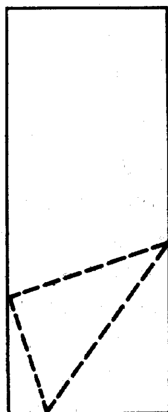


FIGURA 29

19. La figura 30 muestra la gráfica de la *derivada* de f. Hallar todos los puntos máximos y mínimos locales de f.

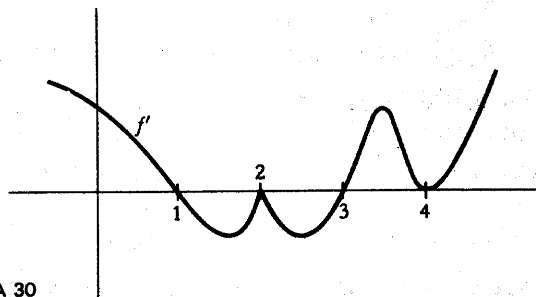


FIGURA 30

***20.** Supongamos que f es una función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ con puntos singulares -1, 1, 2, 3, 4, con los correspondientes valores singulares 6, 1, 2, 4, 3. Trazar la grafica de f distinguiendo los casos n par y n impar.

***21.** (a) Supongamos que la función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ tiene los puntos singulares -1, 1, 2, 3, y $f''(-1) = 0$, $f''(1) > 0$, $f''(2) < 0$, $f''(3) = 0$. Trazar la gráfica de f con todo el detalle posible a partir de esta información.

(b) ¿Existe alguna función polinómica con las propiedades anteriores, excepto que 3 no es punto singular?

22. Describir la gráfica de una función racional (en términos muy generales,

análogamente a la descripción del texto de la gráfica de una función polinómica).

23. (a) Demostrar que dos funciones polinómicas de grados m y n, respectivamente, se cortan a lo sumo en $\max(m, n)$ puntos.

(b) Para cada m y n muéstrense dos funciones polinómicas de grados m y n que se corten $\max(m, n)$ veces.

***24.** (a) Supóngase que la función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ tiene exactamente k puntos singulares y $f''(x) \neq 0$ para todos los puntos singulares x. Demuéstrese que $n - k$ es impar.

(b) Para cada n demostrar que existe una función polinómica f de grado n con k puntos singulares si $n - k$ es impar.

(c) Supóngase que la función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ tiene k_1 puntos máximos locales y k_2 puntos mínimos locales. Demostrar que $k_2 = k_1 + 1$ si n es par y $k_2 = k_1$ si n es impar.

(d) Sean n, k_1, k_2 tres enteros con $k_2 = k_1 + 1$ si n es par y $k_2 = k_1$ si n es impar y $k_1 + k_2 < n$. Demostrar que existe una función polinómica f de grado n con k_1 puntos máximos locales y k_2 puntos mínimos locales. Indicación: Elíjanse $a_1 < a_2 < \dots < a_{k_1+k_2}$ y pruébese con $f'(x) = \prod_{i=1}^{k_1+k_2} (x - a_i)\cdot(1 + x^2)^l$ para un número apropiado l.

25. (a) Demostrar que si $f'(x) \geq M$ para todo x de $[a, b]$, entonces $f(b) \geq f(a) + M(b - a)$.

(b) Demostrar que si $f'(x) \leq m$ para todo x de $[a, b]$, entonces $f(b) \leq f(a) + m(b - a)$.

(c) Formular un teorema análogo cuando $|f(x)| \leq M$ para todo x de $[a, b]$.

***26.** Supóngase que es $f'(x) \geq M > 0$ para todos los x de $[0, 1]$. Demostrar que existe un intervalo de longitud $1/4$ en el que es $|f| \geq M/4$.

27. (a) Supóngase que $f'(x) > g'(x)$ para todo x, y que $f(a) = g(a)$. Demostrar que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

(b) Demostrar mediante un ejemplo que estas conclusiones no son válidas sin la hipótesis $f(a) = g(a)$.

28. Hallar todas las funciones f tales que

(a) $f'(x) = \operatorname{sen} x$.
(b) $f''(x) = x^3$.
(c) $f'''(x) = x + x^2$.

29 Si bien es verdad que un peso que se suelta partiendo del reposo caerá

$s(t) = 4{,}9t^2$ metros en t segundos, este hecho experimental no menciona el comportamiento de los pesos que son lanzados hacia arriba o hacia abajo. Por otra parte, la ley $s''(t) = 9{,}8$ se cumple siempre y tiene la ambigüedad suficiente para explicar el comportamiento de un peso soltado desde cualquier altura y con cualquier velocidad inicial. Para mayor sencillez convengamos en medir las alturas hacia arriba desde el nivel del suelo; en este caso las velocidades son positivas para cuerpos que se elevan y negativas para cuerpos que caen, y todos los cuerpos caen según la ley $s''(t) = -9{,}8$.

(a) Demostrar que s es de la forma $s(t) = -4{,}9t^2 + \alpha t + \beta$.

(b) Haciendo $t = 0$ en la fórmula para s, y después en la fórmula para s', demostrar que $s(t) = -4{,}9t^2 + v_0 t + s_0$, donde s_0 es la altura desde la cual el cuerpo es soltado en el tiempo 0, y v_0 es la velocidad con la cual se suelta.

(c) Se lanza un peso hacia arriba con una velocidad de v metros por segundo desde el nivel del suelo. ¿A qué altura llegará? («A qué altura» significa «¿cuál es la máxima altura para todos los tiempos?») ¿Cuál es su velocidad en el momento en que alcanza su altura máxima? ¿Cuál es la aceleración en dicho momento? ¿Cuándo llegará otra vez al suelo? ¿Cuál será su velocidad en el momento de alcanzar el suelo?

30. Una bala de cañón se lanza desde el suelo con velocidad v y según un ángulo α (figura 31) de modo que su componente vertical de velocidad es v sen α y la componente horizontal v cos α. Su distancia $s(t)$ sobre el nivel

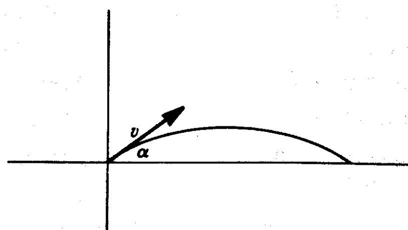


FIGURA 31

del suelo obedece a la ley $s(t) = -4{,}9t^2 + (v \text{ sen } \alpha)t$, mientras que su velocidad horizontal permanece constantemente v cos α.

(a) Demostrar que la trayectoria de la bala es una parábola (hallar la posición para cada tiempo t, y demostrar que estos puntos están sobre una parábola).

(b) Hallar el ángulo α que hace máxima la distancia horizontal recorrida por la bala antes de alcanzar el suelo

***31.** (a) Dese un ejemplo de función f para la cual existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$, pero no existe $\lim_{x\to\infty} f'(x)$.

(b) Demostrar que si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ existen ambos, entonces $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

(c) Demostrar que si existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y existe $\lim_{x\to\infty} f''(x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$ (véase también el problema 9-15).

32. Supóngase que f y g son dos funciones derivables que satisfacen $fg' - f'g = 0$. Demostrar que si a y b son ceros contiguos de f, y $g(a)$ y $g(b)$ no son ambos 0, entonces $g(x) = 0$ para algún x entre a y b. (Naturalmente se cumple este mismo resultado intercambiando f y g; así, los ceros de f y g se separan mutuamente.) Indicación: Deducir una contradicción si se supone que $g(x) \neq 0$ para todo x entre a y b: si un número no es 0, hay algo natural que se puede hacer con él.

33. Supóngase que $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^n$ para $n > 1$. Demostrar que f es constante considerando f'. Compárese con el problema 3-20.

34. De una función f se dice que es *Lipschitz de orden* α *en* x si existe una constante C tal que

$$(*) \qquad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}$$

para todos los y de un intervalo de x. La función f es *Lipschitz de orden* α *en un intervalo* si la condición (*) se cumple para todos los x e y del mismo.

(a) Si f es Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x, entonces es f continua en x.

(b) Si f es Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en un intervalo, entonces es f uniformemente continua en el mismo (véase capítulo 8, apéndice).

(c) Si f es derivable en x, entonces f es Lipschitz de orden 1 en x. ¿Se cumple la recíproca?

(d) Si f es derivable en $[a, b]$, ¿es f Lipschitz de orden 1 en $[a, b]$?

(e) Si f es Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en $[a, b]$, entonces f es constante en $[a, b]$.

35. Demostrar que si

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

entonces

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$$

para algún x de $[0, 1]$.

36. **Demostrar que, cualquiera que sea m, la función polinómica $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ no tiene nunca dos raíces en $[0, 1]$.** (Esto es una consecuencia fácil del teorema de Rolle. Resulta instructivo, una vez dada la demostración analítica, trazar las gráficas de f_0 y f_1 y considerar la posición de la gráfica de f_m en relación con ellas.)

37. Supóngase que f es continua y derivable en $[0, 1]$, que $f(x)$ está en $[0, 1]$ para todo x, y que $f'(x) \neq 1$ para todo x de $[0, 1]$. Demostrar que existe exactamente un número x en $[0, 1]$ tal que $f(x) = x$. La mitad de este problema ha sido visto ya en el problema 7-11.

38. (a) Demostrar que la función $f(x) = x^2 - \cos x$ satisface $f(x) = 0$ para exactamente dos valores de x.

(b) Demostrar lo mismo para la función $f(x) = 2x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos^2 x$ (valdrá la pena hacer algunos tanteos previos para acotar la posible localización de los ceros de f).

***39.** Demostrar que si f es una función dos veces derivable con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f'(0) = f'(1) = 0$, entonces $|f''(x)| \geq 4$ para algún x de $[0, 1]$. En términos más pintorescos: una partícula que recorre una distancia unidad en la unidad tiempo, y empieza y termina con velocidad 0, tiene en algún momento una aceleración ≥ 4. Indicación: Demostrar que o bien $f''(x) > 4$ para algún x de $[0, \frac{1}{2}]$, o bien $f''(x) < -4$ para algún x de $[\frac{1}{2}, 1]$.

40. Supóngase que f es una función tal que $f'(x) = 1/x$ para todo $x > 0$ y $f(1) = 0$. Demostrar que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y > 0$. Indicación: Hallar $g'(x)$ cuando $g(x) = f(xy)$.

***41.** Demostrar que f satisface

$$f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$$

para alguna función g. Demostrar que si f es 0 en dos puntos, entonces f es 0 en el intervalo entre ellos. Indicación: Aplicar el teorema 6.

42. Supóngase que f es n veces derivable y que $f(x) = 0$ para $n + 1$ diferentes valores de x. Demostrar que $f^{(n)}(x) = 0$ para algún x.

43. Sean $a_1, \dots, a_n$ puntos arbitrarios de $[a, b]$ y sea

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i).$$

Supóngase que f es derivable $(n + 1)$ veces y que P es un polinomio de gra-

do $\leq n$ tal que $P(x_i) = f(x_i)$ para $i = 1, ..., n + 1$ (véase pág. 62 y 63). Demostrar que para todo x de $[a, b]$ existe un número c de (a, b) tal que

$$f(x) - P(x) = Q(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Ayuda: Considere la función

$$F(t) = Q(x)[f(t) - P(t)] - Q(t)[f(x) - P(x)].$$

Demostrar que F se anula en $n + 2$ puntos distintos de $[a, b]$ y aplicar el problema 42.

29. Demostrar que

$$\tfrac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \tfrac{1}{8}$$

(sin calcular $\sqrt{66}$ con 2 cifras decimales).

45. Demostrar la siguiente ligera generalización del teorema del valor medio: Si f es continua y derivable en (a, b) y $\lim_{y \to a+} f(y)$ y $\lim_{y \to b-} f(y)$ existen, entonces existe algún x en (a, b) tal que

$$f'(x) = \frac{\lim_{y \to b^-} f(y) - \lim_{y \to a^+} f(y)}{b - a}.$$

(La demostración debe empezar: «Esto es una consecuencia trivial del teorema del valor medio porque...»)

46. Demostrar que la conclusión del teorema del valor medio puede escribirse en la forma

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

suponiendo, además, que $g(b) \neq g(a)$ y que $f'(x)$ y $g'(x)$ no se anulan simultáneamente en ningún punto de (a, b).

***47.** Demostrar que si f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), y $g'(x) \neq 0$ para todo x de (a, b), entonces existe algún x en (a, b) con

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(b) - g(x)}.$$

Indicación: Multiplíquese en cruz para ver qué es lo que esto realmente significa.

48. ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la regla de L'Hôpital?:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

(El límite es, en realidad, -4.)

49. Hallar los siguientes límites

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2}$.

50. Hallar $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

y $g(0) = g'(0) = 0$ y $g''(0) = 17$.

51. Demostrar las siguientes formas de la regla de L'Hôpital (ninguna de ellas requiere un razonamiento esencialmente nuevo).

(a) Si $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$, y $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)/g'(x) = l$, entonces $\lim\limits_{x\to a+} f(x)/g(x) = l$ (y análogamente para límites por la izquierda).

(b) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$ (y análogamente para $-\infty$ o si se sustituye $x \to a$ por $x \to a^+$ o $x \to a^-$).

(c) Si $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to \infty} f'(x)/g'(x) = l$, entonces $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)/g(x) = l$ (y análogamente para $-\infty$). Indicación: Considérese $\lim\limits_{x\to 0+} f(1/x)/g(1/x)$.

(d) Si $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to \infty} f'(x)/g'(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)/g(x) = \infty$.

52. Existe otra forma de la regla de L'Hôpital que exige más manipulaciones algebraicas: Si $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to \infty} f'(x)/g'(x) = l$, entonces

$\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = l$. Demostrar esto como sigue:

(a) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un número a tal que

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon \quad \text{para}\, x > a.$$

Aplicar el teorema del valor medio de Cauchy a f y g sobre $[a, x]$ para demostrar que

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - l\right| < \varepsilon \quad \text{para}\, x > a.$$

(¿Por qué podemos suponer $g(x) - g(a) \neq 0$?)

(b) Póngase ahora

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(x)}$$

[¿Por qué podemos suponer que $f(x) - f(a) \neq 0$ para x grandes?] y deducir que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < 2\varepsilon \quad \text{para } x \text{ suficientemente grandes.}$$

53 Para completar la orgía de variantes de la regla de L'Hôpital, aplicar el problema 52 para demostrar unos cuantos casos más de la siguiente proposición general (existen tantas posibilidades que el lector debe seleccionar aquellas, si las hay, que sean de su interés):

Si $\lim_{x\to[\ ]} f(x) = \lim_{x\to[\ ]} g(x) = \{\ \}$ y $\lim_{x\to[\ ]} f'(x)/g'(x) = (\ )$, entonces $\lim_{x\to[\ ]} f(x)/g(x) = (\ )$.

Aquí $[\ ]$ puede ser a o a^+ o a^- o ∞ o $-\infty$, y $\{\ \}$ puede ser 0 ó ∞ o $-\infty$, y $(\ )$ puede ser l o ∞ o $-\infty$.

***54.** (a) Supóngase que f es derivable sobre $[a, b]$. Demostrar que si el mínimo de f sobre $[a, b]$ está en a, entonces $f'(a) \geq 0$, y si está en b, entonces $f'(b) \leq 0$. (Se pasará por la mitad de la demostración del teorema 1.)

(b) Supóngase que $f'(a) < 0$ y $f'(b) > 0$. Demostrar que $f'(x) = 0$ para algún x de (a, b). Indicación: Considérese el mínimo de f sobre $[a, b]$; ¿por qué debe estar en algún punto de (a, b)?

(c) Demostrar que si $f'(a) < c < f'(b)$, entonces $f'(x) = c$ para algún x de (a, b). (Este resultado es conocido como teorema de Darboux.) Indicación: Constrúyase una función adecuada a la cual se pueda aplicar la parte (b).

55. Supóngase que f es derivable en un intervalo que contiene a a, pero que f' es discontinua en a.

(a) Los límites laterales $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$ y $\lim\limits_{x \to a^-} f'(x)$ no pueden existir a la vez (Esto no es más que una ligera variante del teorema 7).

(b) Estos límites laterales no pueden existir a la vez ni siquiera en el sentido de ser $+\infty$ o $-\infty$. Ayuda: Aplicar el Teorema de Darboux (problema 54).

***56.** Es fácil encontrar una función f tal que $|f|$ sea derivable sin serlo f. Por ejemplo, podemos elegir $f(x) = 1$ para x racional y $f(x) = -1$ para x irracional. En este ejemplo f ni siquiera es continua, y esto no es tampoco una simple coincidencia: Demostrar que si $|f|$ es derivable en a, y f es continua en a, entonces f es también derivable en a. Indicación: Basta considerar solamente a con $f(a) = 0$. ¿Por qué? En este caso, ¿cómo debe ser $|f|'(a)$?

***57.** (a) Sea $y \neq 0$ y sea n par. Demostrar que $x^n + y^n = (x + y)^n$ solamente cuando $x = 0$. Indicación: Si $x_0{}^n + y^n = (x_0 + y)^n$, aplicar el teorema de Rolle a $f(x) = x^n + y^n - (x + y)^n$ sobre $[0, x_0]$.

(b) Demostrar que si $y \neq 0$ y n es impar, entonces $x^n + y^n = (x + y)^n$ solamente si $x = 0$ ó $x = -y$.

****58.** Aplicar el método del problema 57 para demostrar que si n es par y $f(x) = x^n$, entonces toda tangente a f corta a f solamente una vez.

****59.** Demostrar todavía con más generalidad que si f' es creciente, entonces toda tangente corta a f solamente una vez.

***60.** Supóngase que $f(0) = 0$ y que f' es creciente. Demostrar que la función $g(x) = f(x)/x$ es creciente sobre $(0, \infty)$. Indicación: Evidentemente habrá que fijarse en $g'(x)$. Demostrar que es positiva aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo adecuado (será útil recordar que la hipótesis $f(0) = 0$ es esencial, según se ve en la función $f(x) = 1 + x^2$).

***61.** Utilizar derivadas para demostrar que si $n \geq 1$, entonces

$$(1 + x)^n > 1 + nx \quad \text{para} \quad -1 < x < 0 \quad \text{y} \quad 0 < x.$$

(Obsérvese que la igualdad se cumple para $x = 0$.)

62. Sea $f(x) = x^4 \operatorname{sen}^2 1/x$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$ (figura 32).

(a) Demostrar que 0 es un punto mínimo local para f.
(b) Demostrar que $f'(0) = f''(0) = 0$.

Esta función ofrece así otro ejemplo para ver que el teorema 6 no puede ser mejorado. Ilustra también una sutileza acerca de máximos y mínimos que con frecuencia pasa desapercibida: una función puede no ser creciente en ningún intervalo a la derecha de un punto mínimo local ni tampoco decreciente en ningún intervalo a la izquierda.

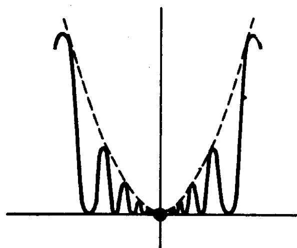


FIGURA 32

***63.** (a) Demostrar que si $f'(a) > 0$ y f' es continua en a, entonces f es creciente en algún intervalo que contiene a.

Las dos partes siguientes de este problema demuestran que la continuidad de f' es esencial.

(b) Si $g(x) = x^2$ sen $1/x$ demostrar que existen números x tan próximos como se quiera de 0 con $g'(x) = 1$ y también con $g'(x) = -1$.

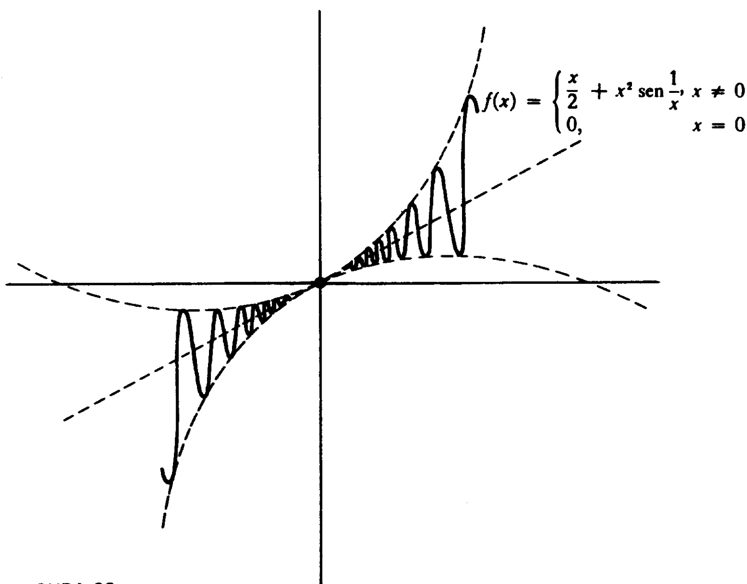


FIGURA 33

(c) Supóngase $0 < \alpha < 1$. Sea $f(x) = \alpha x + x^2$ sen $1/x$ para $x \neq 0$, y sea $f(0) = 0$ (véase la figura 28). Demostrar que f no es creciente en ningún intervalo abierto conteniendo 0, demostrando que en cualquier intervalo existen puntos x con $f'(x) > 0$ y también puntos x con $f'(x) < 0$.

El comportamiento de f para $\alpha \geq 1$, que es mucho más difícil de analizar se discute en el problema siguiente.

**64. Sea $f(x) = \alpha x + x^2$ sen $1/x$ para $x \neq 0$, y sea $f(0) = 0$. Para hallar el signo de $f'(x)$ cuando $\alpha \geq 1$ es necesario decidir si $2x$ sen $1/x$ — cos $1/x$ es < -1 para números x próximos a 0. Resulta algo más conveniente considerar la función $g(y) = 2(\text{sen } y)/y - \cos y$ para $y \neq 0$; queremos saber si $g(y) < -1$ para y grandes. Esta cuestión es muy delicada; la parte más importante de $g(y)$ es $-\cos y$, que alcanza el valor -1, pero esto ocurre solamente cuando sen $y = 0$, y no está claro en absoluto si g misma puede tener valores < -1. La manera evidente de atacar este problema consiste en hallar dos valores mínimos locales de g. Por desgracia es imposible resolver explícitamente la ecuación $g'(y) = 0$, de modo que hace falta mayor inventiva.

(a) Demostrar que si $g'(y) = 0$, entonces

$$\cos y = \text{sen } y \left(\frac{2 - y^2}{2y}\right),$$

y deducir que

$$g(y) = \text{sen } y \left(\frac{2 + y^2}{2y}\right).$$

(b) Demostrar ahora que si $g'(y) = 0$, entonces

$$\text{sen}^2 y = \frac{4y^2}{4 + y^4},$$

y deducir que

$$|g(y)| = \frac{2 + y^2}{\sqrt{4 + y^4}}.$$

(c) Utilizando el hecho de que $(2 + y^2)/\sqrt{4 + y^4} > 1$, demostrar que si

$\alpha = 1$, entonces f no es creciente en ningún intervalo alrededor de 0.

(d) Utilizando el hecho de que $\lim_{y\to\infty} (2+y^2)/\sqrt{4+y^4} = 1$, demostrar que si $\alpha > 1$, entonces f es creciente en algún intervalo alrededor de 0.

****65.** Una función f es **creciente en** a si existe algún número $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > f(a) \quad \text{si} \quad a < x < a + \delta$$

y

$$f(x) < f(a) \quad \text{si} \quad a - \delta < x < a.$$

Obsérvese que esto *no* significa que f sea creciente en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$; por ejemplo, la función de la figura 28 es creciente en 0, pero no es función creciente en cualquier intervalo abierto que contenga 0.

(a) Supóngase que f es continua sobre $[0, 1]$ y que f es creciente en a para todo a de $[0, 1]$. Demostrar que f es creciente en $[0, 1]$. (Convénzase primero el lector que hay algo a demostrar.) Indicación: Para $0 < b < 1$, demostrar que el mínimo de f sobre $[b, 1]$ debe estar en b.

(b) Demostrar la parte (a) sin la suposición de que f sea continua, considerando para cada b de $[0, 1]$ el conjunto $S_b = \{x: f(y) \geq f(b)$ para todo y de $[b, x]\}$. (Esta parte del problema no hace falta para las demás partes.) Indicación: Demostrar que $S_b = \{x: b \leq x \leq 1\}$ considerando sup S_b.

(c) Si f es creciente en a y f es derivable en a, demostrar que $f'(a) \geq 0$ (esto es fácil).

(d) Si $f'(a) > 0$, demostrar que f es creciente en a [partir de la definición de $f'(a)$].

(e) Utilícense las partes (a) y (b) para demostrar, sin hacer uso del teorema del valor medio, que si f es continua sobre $[0, 1]$ y $f'(a) > 0$ para todo a de $[0, 1]$, entonces f es creciente sobre $[0, 1]$.

(f) Supóngase que f es continua sobre $[0, 1]$ y $f'(a) = 0$ para todo a de $(0, 1)$. Aplicar la parte (e) a la función $g(x) = f(x) + \varepsilon x$ para demostrar que $f(1) - f(0) > -\varepsilon$. Análogamente, demostrar que $f(1) - f(0) < \varepsilon$ considerando $h(x) = \varepsilon x - f(x)$. Deducir que $f(0) = f(1)$.

Esta demostración particular de que una función con derivada nula debe ser constante coincide en muchos puntos con una demostración de H. A. Schwartz, la cual es posible que sea la primera demostración rigurosa que se haya dado. Su descubridor por lo menos parecía creerlo así. Véase su exuberante carta en la referencia [41] de la bibliografía.

**66. (a) Si f es una función constante, entonces todo punto es un punto máximo local para f. Esto puede ocurrir también aunque f no sea una función constante: por ejemplo, si $f(x) = 0$ para $x < 0$ y $f(x) = 1$ para $x \geq 0$. Demostrar, sin embargo, utilizando el problema 8-4, que si f es continua sobre $[a, b]$ y todo punto de $[a, b]$ es un punto máximo local, entonces f es una función constante. Por supuesto, se llega al mismo resultado si todo punto de $[a, b]$ es un punto mínimo local.

(b) Supóngase ahora que todo punto es un punto máximo local o bien un punto mínimo local para f (pero no se debe excluir la posibilidad de que algunos puntos sean máximos locales mientras que otros sean mínimos locales). Demuéstrese que f es constante de la siguiente forma. Supóngase que $f(a_0) < f(b_0)$. Se puede asumir que $f(a_0) < f(x) < f(b_0)$ para $a_0 < x < b_0$. (¿Por qué?) Utilizando el teorema 1 del apéndice al capítulo 8, sepárese $[a_0, b_0]$ en intervalos en los cuales $\sup f - \inf f < (f(b_0) - (a_0))/2$; también elíjanse las longitudes de estos intervalos de forma que sean menores que $(b_0 - a_0)/2$. Luego existe un tal intervalo $[a_1, b_1]$ con $a_0 < b_1 < b_0$ y $f(a_1) < f(b_1)$. (¿Por qué?) Prosígase por inducción y aplíquese el teorema de los intervalos encajados (problema 8-14) para hallar un punto x que no pueda ser un máximo o mínimo local.

67. (a) Un punto x se dice que es un punto **estrictamente máximo para f sobre A si $f(x) > f(y)$ para todo y de A con $y \neq x$ (compárese con la definición de un punto máximo ordinario). De manera evidente se define un punto **estrictamente máximo local.** Hallar todos los puntos estrictamente máximos locales de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q} \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

Parece muy improbable que una función pueda tener un punto estrictamente máximo local para *todo* punto (aunque el ejemplo anterior podría hacer pensar). Demostrar esto como sigue:

(b) Supóngase que todo punto es un punto estrictamente máximo local para f. Sea x_1 un número cualquiera y elíjanse $a_1 < x_1 < b_1$ con $b_1 - a_1 < 1$ tales que $f(x_1) > f(x)$ para todo x de $[a_1, b_1]$. Sea $x_2 \neq x_1$ un punto cualquiera de (a_1, b_1) y elíjanse $a_1 \leq a_2 < x_2 < b_2 \leq b_1$ con $b_2 - a_2 < \frac{1}{2}$ tales que $f(x_2) > f(x)$ para todo x de $[a_2, b_2]$. Prosígase de esta manera y aplíquese el teorema de los intervalos encajados (problema 8-14) para obtener una contradicción.

APÉNDICE. CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD

Aunque la gráfica de una función puede trazarse con bastante exactitud sobre la base de la información suministrada por la derivada, hay algunos aspectos sutiles de la misma para cuya aclaración hace falta examinar la derivada segunda. Hemos omitido estos detalles hasta aquí de intento porque, aun sin tomarlos en consideración, el trazado de gráficas es de por sí suficientemente complicado, y la información adicional que con ellos se obtendría no justifica el esfuerzo. Ocurre también que las demostraciones correctas de los hechos relevantes son suficientemente difíciles para relegarlas a un apéndice. A pesar de estas observaciones desalentadoras, vale bien la pena asimilar la información que aquí presentamos, ya que las nociones de convexidad y concavidad tienen mucha mayor importancia que la que deriva de ser meros auxiliares en el trazado de gráficas. Además, las demostraciones tienen un agradable sabor geométrico poco frecuente en los teoremas de cálculo infinitesimal. De hecho, la definición básica es de naturaleza geométrica (véase la figura 1).

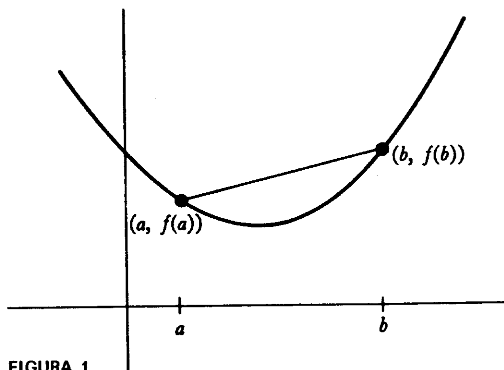


FIGURA 1

DEFINICIÓN 1

Se dice que una función f es **convexa** en un intervalo, si para todo a y b de este intervalo, el segmento rectilíneo que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ queda por encima de la gráfica de f.

La condición geométrica que aparece en esta definición puede expresarse de manera analítica que algunas veces resulta más útil en las demostraciones. La recta entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es la gráfica de la función g definida por

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Esta recta queda por encima de la gráfica de f en x si $g(x) > f(x)$, es decir, si

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) > f(x)$$

o

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) > f(x) - f(a)$$

o

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Tenemos, por lo tanto, una definición equivalente de convexidad.

DEFINICIÓN 2

Una función f es **convexa** en un intervalo si para a, x y b del intervalo con $a < x < b$ se tiene

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Si se sustituye la palabra «encima» por «debajo» en la definición 1 ó, de modo equivalente, si la desigualdad de la definición 2 se sustituye por

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

se obtiene la definición de función **cóncava** (figura 2). No es difícil ver que las funciones cóncavas son precisamente las de la forma $-f$, donde f es convexa. Por esta razón, los tres teoremas siguientes acerca de funciones convexas tienen

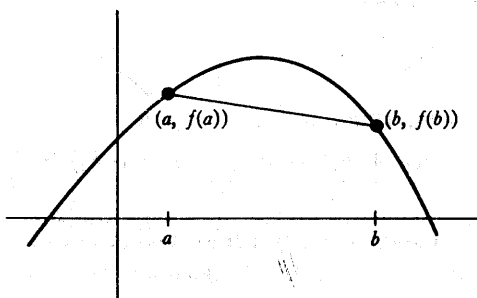


FIGURA 2

corolarios inmediatos acerca de funciones cóncavas, y estos corolarios son tan sencillos que no nos molestaremos siquiera en enunciarlos.

En la figura 3 se ven algunas tangentes de una función convexa. Dos cosas parecen ser ciertas:

(1) La gráfica de f queda por encima de la tangente en $(a, f(a))$ excepto en el punto $(a, f(a))$ mismo (este punto recibe el nombre de **punto de contacto** de la tangente).

(2) Si $a < b$, entonces la pendiente de la tangente en $(a, f(a))$ es menor que la pendiente de la tangente en $(b, f(b))$; es decir, f' es creciente.

De hecho estas observaciones son verdaderas, y las demostraciones no son difíciles.

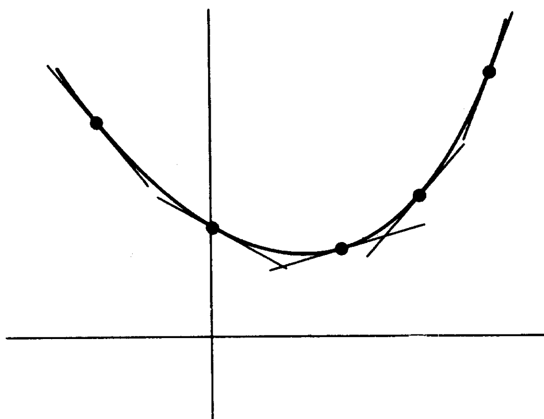


FIGURA 3

TEOREMA 1

Sea f convexa. Si f es derivable en a, entonces la gráfica de f queda por encima de la tangente por $(a, f(a))$ excepto en $(a, f(a))$ mismo. Si $a < b$ y f es derivable en a y en b, entonces $f'(a) < f'(b)$.

DEMOSTRACIÓN

Si $0 < h_1 < h_2$, entonces, como indica la figura 4,

$$(1) \quad \frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1} < \frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}.$$

Se puede derivar inmediatamente una demostración sin dibujos de la definición 2 aplicada a $a < a + h_1 < a + h_2$. La desigualdad (1) indica que los valores de

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

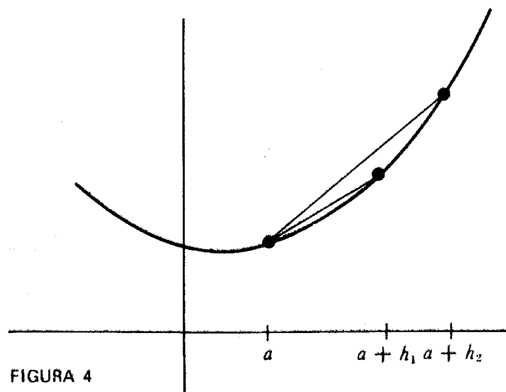


FIGURA 4

decrecen cuando $h \to 0^+$. En consecuencia,

$$f'(a) < \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{para } h > 0$$

(de hecho, $f'(a)$ es la cota inferior máxima de todos estos números). Pero esto significa que para $h > 0$ la secante por $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$ tiene mayor pendiente que la tangente, lo cual implica que $(a + h, f(a + h))$ queda por encima de la tangente (la traducción analítica de este razonamiento sale fácilmente).

Una situación parecida se presenta para h negativo (fig. 5): si $h_2 < h_1 < 0$, entonces

$$\frac{f(a+h_1) - f(a)}{h_1} > \frac{f(a+h_2) - f(a)}{h_2}.$$

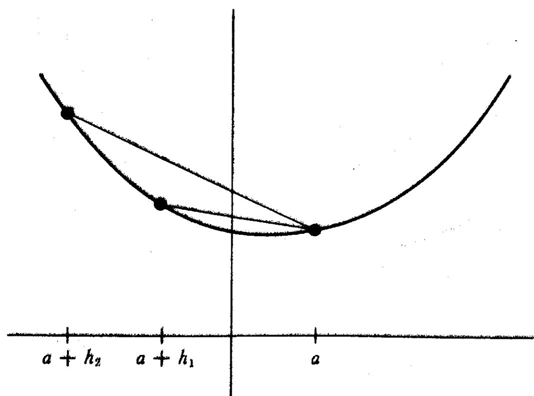


FIGURA 5

Esto indica que la pendiente de la tangente es mayor que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{para } h < 0$$

(de hecho, $f'(a)$ es la cota superior mínima de todos estos números), de modo que $f(a+h)$ queda por encima de la tangente si $h < 0$. Esto demuestra la primera parte del teorema.

Supongamos ahora que $a < b$. Entonces, según ya hemos visto (fig. 6),

$$\begin{aligned} f'(a) &< \frac{f(a+(b-a))-f(a)}{b-a} \quad \text{por ser } b-a > 0 \\ &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f'(b) &> \frac{f(b+(a-b))-f(b)}{a-b} \quad \text{por ser } a-b < 0 \\ &= \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \end{aligned}$$

Combinando estas desigualdades obtenemos $f'(a) < f'(b)$. ∎

El teorema 1 tiene dos recíprocos. Aquí las demostraciones serán algo más difíciles. Empezamos con un lema que desempeña el mismo papel en el teorema, que el desempeñado por el teorema de Rolle en la demostración del teorema del valor medio. Establece que si f' es creciente, entonces la gráfica de f queda por debajo de cualquier secante *que sea horizontal.*

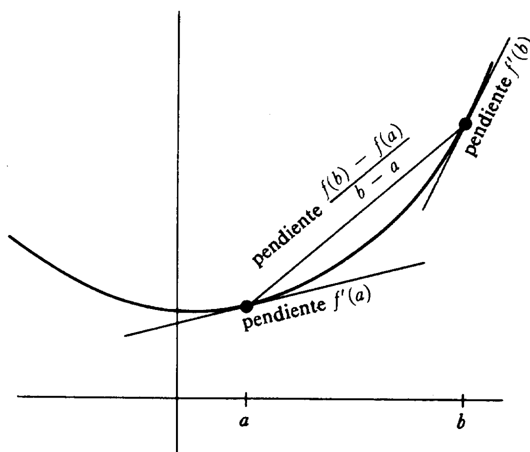


FIGURA 6

LEMA

Supóngase que f es derivable y f' creciente. Si $a < b$ y $f(a) = f(b)$, entonces $f(x) < f(a) = f(b)$ para $a < x < b$.

DEMOSTRACIÓN

Supóngase primero que $f(x) > f(a) = f(b)$ para algún x de (a, b). Entonces el

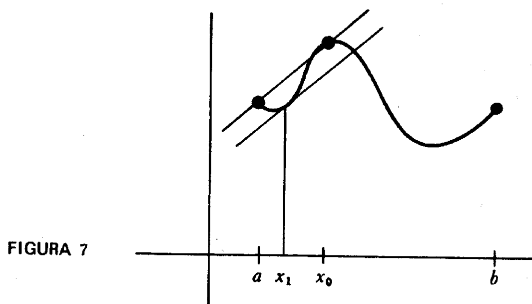


FIGURA 7

máximo de f sobre $[a, b]$ se presenta en algún punto x_0 de (a, b) con $f(x_0) > f(a)$ y, por supuesto, $f'(x_0) = 0$ (fig. 7). Por otra parte, aplicando el teorema del valor medio al intervalo $[a, x_0]$, encontramos que existe x_1 con $a < x_1 < x_0$ y

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > 0,$$

en contradicción con el hecho de ser f' creciente. Esto demuestra que $f(x) \leq f(a) = f(b)$ para $a < x < b$, y sólo queda por demostrar que $f(x) = f(a)$ es también imposible para x en (a, b).

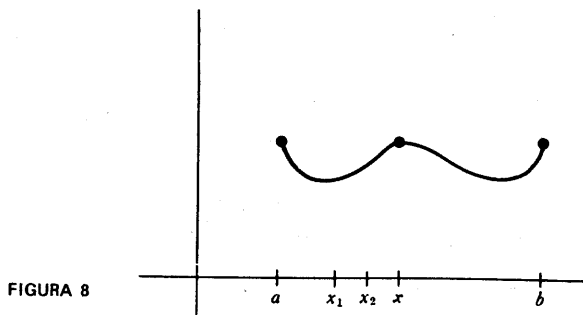


FIGURA 8

Supongamos que es $f(x) = f(a)$ para algún x de (a, b). Sabemos que f no es constante sobre $[a, x]$ (si lo fuera, f' no sería creciente sobre $[a, x]$), de modo que existe (fig. 8) algún x_1 con $a < x_1 < x$ y $f(x_1) < f(a)$. Aplicando el teorema del valor medio a $[x_1, x]$ deducimos que existe x_2 con $x_1 < x_2 < x$ y

$$f'(x_2) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > 0.$$

Por otra parte, $f'(x) = 0$, puesto que hay un máximo local en x. Otra vez tenemos una contradicción con la hipótesis de ser f' creciente. ▌

Atacaremos ahora al caso general por medio de manipulaciones algebraicas parecidas a las que ya hemos usado en la demostración del teorema del valor medio.

TEOREMA 2

Si f es derivable y f' es creciente, entonces f es convexa.

DEMOSTRACIÓN

Sea $a < b$. Definamos g por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Es fácil ver que g' es también creciente; además, $g(a) = g(b) = f(a)$. Aplicando el lema a g deducimos que

$$g(x) < f(a) \quad \text{si} \quad a < x < b.$$

En otras palabras, si $a < x < b$, entonces

$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) < f(a)$$

o

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Por lo tanto, f es convexa. ▌

TEOREMA 3

Si f es derivable y la gráfica de f queda por encima de cada tangente excepto en el punto de contacto, entonces f es convexa.

DEMOSTRACIÓN

Sea $a < b$. De la figura 9 se desprende claramente que si $(b, f(b))$ queda por encima de la tangente en $(a, f(a))$, y $(a, f(a))$ queda por encima de la tangente

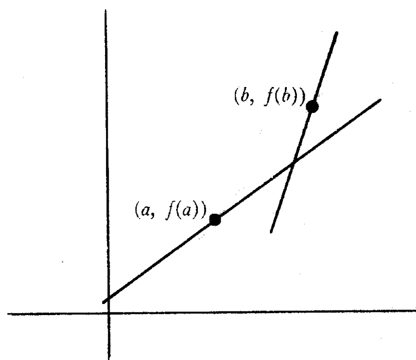


FIGURA 9

en $(b, f(b))$, entonces la pendiente de la tangente en $(b, f(b))$ debe ser mayor que la pendiente de la tangente en $(a, f(a))$. El razonamiento que sigue expresa precisamente esto con ecuaciones.

Puesto que la tangente en $(a, f(a))$ es la gráfica de la función

$$g(x) = f'(a)(x - a) + f(a),$$

y puesto que $(b, f(b))$ queda por encima de la tangente, tenemos

$$(1) \quad f(b) > f'(a)(b - a) + f(a).$$

Análogamente, puesto que la tangente en $(b, f(b)$ es la gráfica de

$$h(x) = f'(b)(x - b) + f(b),$$

y $(a, f(a))$ queda por encima de la tangente en $(b, f(b))$, tenemos

$$(2) \quad f(a) > f'(b)(a - b) + f(b).$$

Se sigue de (1) y (2) que $f'(a) < f'(b)$.

Se sigue ahora del teorema 2 que f es convexa. ▮

Si una función f tiene una derivada segunda razonable, la información dada en estos teoremas puede utilizarse para descubrir las regiones en que f es convexa o cóncava. Consideremos, por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Para esta función,

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}.$$

Así pues, $f'(x) = 0$ solamente para $x = 0$, y $f(0) = 1$, mientras que

$$f'(x) > 0 \quad \text{si} \quad x < 0,$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{si} \quad x > 0.$$

Además,

$$f(x) > 0 \quad \text{para todo } x,$$
$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando } x \to \infty \text{ o } -\infty,$$
$$f \text{ es par.}$$

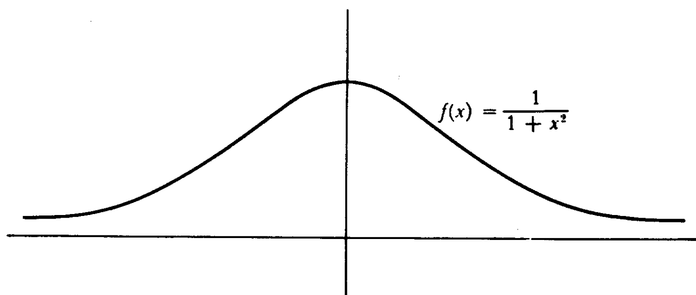


FIGURA 10

La gráfica de f tiene, por lo tanto, un aspecto parecido al de la figura 10. Calculamos ahora

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(1+x^2)^2(-2)+2x\cdot[2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

No es difícil determinar el signo de $f''(x)$. Obsérvese primero que $f''(x)=0$ solamente cuando $x=\sqrt{1/3}$ o $-\sqrt{1/3}$. Puesto que f'' es evidentemente continua, debe conservar el mismo signo en cada uno de los conjuntos

$$\begin{gathered} (-\infty,-\sqrt{1/3}), \\ (-\sqrt{1/3},\sqrt{1/3}), \\ (\sqrt{1/3},\infty). \end{gathered}$$

Puesto que obtenemos fácilmente, por ejemplo, que

$$\begin{aligned} f''(-1) &= \tfrac{1}{2} > 0, \\ f''(0) &= -2 < 0, \\ f''(1) &= \tfrac{1}{2} > 0, \end{aligned}$$

deducimos que

$$\begin{aligned} &f''>0 \quad \text{sobre} \quad (-\infty,-\sqrt{1/3}) \quad \text{y} \quad (\sqrt{1/3},\infty), \\ &f''<0 \quad \text{sobre} \quad (-\sqrt{1/3},\sqrt{1/3}). \end{aligned}$$

Puesto que $f''>0$ significa que f' es creciente, se sigue del teorema 2 que f es convexa en $(-\infty,-\sqrt{1/3})$ y $(\sqrt{1/3},\infty)$, mientras que en $(-\sqrt{1/3},\sqrt{1/3})$ f es cóncava (fig. 11).

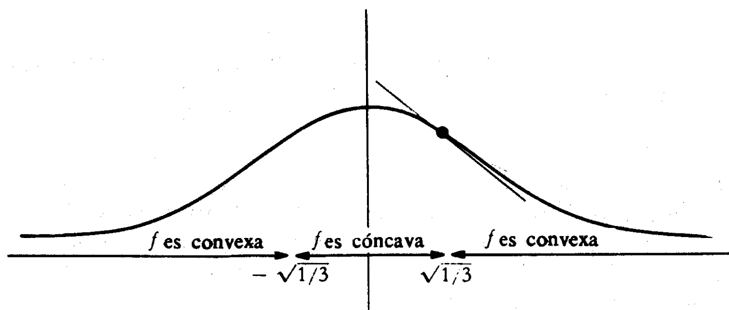


FIGURA 11

Obsérvese que en $(\sqrt{1/3}, \frac{3}{4})$ la tangente queda por debajo de la parte de la gráfica de la derecha, puesto que f es convexa en $(\sqrt{1/3}, \infty)$, y por encima de la parte de la gráfica izquierda, puesto que f es cóncava en $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$; así pues, la tangente cruza la gráfica. En general, un número a recibe el nombre de **punto de inflexión** de f si la tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$ cruza la gráfica; así, $\sqrt{1/3}$ y $-\sqrt{1/3}$ son puntos de inflexión de $f(x) = 1/(1 + x^2)$. Obsérvese que la condición $f''(a) = 0$ *no* garantiza que a sea un punto de inflexión de f; por ejemplo, si $f(x) = x^4$, entonces $f''(0) = 0$, pero f es convexa, de modo que la tangente en $(0, 0)$ no cruza ciertamente la gráfica de f. Para que a sea un punto de inflexión de una función f, es necesario que f'' tenga signos diferentes a la izquierda y a la derecha de a.

Este ejemplo ilustra el procedimiento que puede seguirse para analizar una función f. Después de trazar la gráfica utilizando la información suministrada por f', se calculan los ceros de f'' y se determina el signo de f'' en los intervalos entre ceros consecutivos. En los intervalos en que $f'' > 0$, la función es convexa; en los intervalos en que $f'' < 0$, la función es cóncava. El conocimiento de las regiones de convexidad y concavidad de f puede con frecuencia precaver contra absurdas interpretaciones de otros datos acerca de f. Varias funciones que pueden ser analizadas de esta manera se presentan en los problemas, los cuales contienen también otras cuestiones teóricas.

Para completar nuestro estudio de la convexidad y de la concavidad, debemos probar un último hecho que puede haber empezado a intrigarnos. Hemos visto que las funciones convexas y cóncavas tienen la propiedad de que toda tangente corta a la gráfica solamente una vez; unos pocos dibujos convencerán al lector de que ninguna otra función tiene esa propiedad. La demostración, no obstante, es bastante complicada y está muy relacionada con la del teorema 2 del próximo capítulo; probablemente es mejor esperar hasta que se haya leído esa demostración.

TEOREMA 4

Si f es derivable en un intervalo y sus tangentes la cortan una sola vez, entonces f es cóncava o es convexa en ese intervalo.

DEMOSTRACIÓN

Esta demostración tiene dos partes.

(1) Antes hemos afirmado que ninguna recta puede cortar la gráfica de f en *tres* puntos diferentes. Supongamos, por el contrario, que una recta interseque la gráfica de f en $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ y $(c, f(c))$, siendo $a < b < c$ (figura 12). Entonces tendremos

$$(1) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

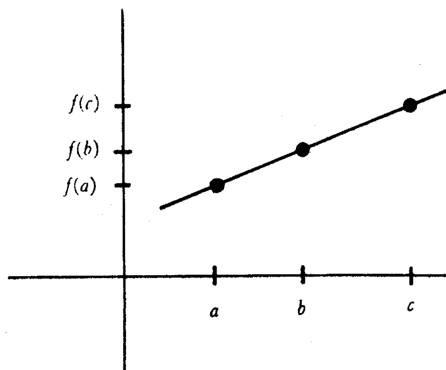


FIGURA 12

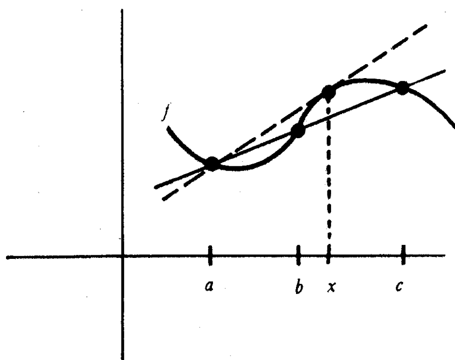


FIGURA 13

Consideremos la función

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{para } x \text{ en } [b, c]$$

La ecuación (1) nos dice que $g(b) = g(c)$. Luego por el teorema de Rolle, hay algunos números x en (b, c) en los que $0 = g'(x)$ y, en consecuencia,

$$0 = (x - a)f'(x) - [f(x) - f(a)]$$

es decir,

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pero esto nos indica (figura 13) que la tangente a $(x, f(x))$ pasa por $(a, f(a))$, lo que contradice la hipótesis.

(2) Supongamos que $a_0 < b_0 < c_0$ y que $a_1 < b_1 < c_1$ son puntos de ese intervalo. Sea

$$\begin{aligned} x_t &= (1 - t)a_0 + ta_1 \\ y_t &= (1 - t)b_0 + tb_1 \qquad 0 \le t \le 1. \\ z_t &= (1 - t)c_0 + tc_1 \end{aligned}$$

Entonces, $x_0 = a_0$ y $x_1 = a_1$, y (problema 4-2) los puntos x_t quedan todos entre a_0 y a_1, con análogos razonamientos para y_t y z_t. Además,

$$x_t < y_t < z_t \qquad \text{para} \qquad 0 \le t \le 1.$$

Ahora, consideremos la función

$$g(t) = \frac{f(y_t) - f(x_t)}{y_t - x_t} - \frac{f(z_t) - f(x_t)}{z_t - x_t} \quad \text{para } 0 \le t \le 1.$$

Por el paso (1), $g(t) \neq 0$ para todo t en $[0, 1]$. Luego, $g(t) > 0$ para todo t en $[0, 1]$ o $g(t) < 0$ para todo t en $[0, 1]$. En consecuencia, f es convexa o es cóncava (Véase el teorema 2 de la página 323).

PROBLEMAS

1. Dibujar las funciones del problema 11-1, indicando las regiones de convexidad y concavidad y los puntos de inflexión (considérese (iv) con doble asterisco).
2. La figura 30 del capítulo 11 muestra la gráfica de f'. Dibujar la gráfica de f.
3. Hallar dos funciones convexas f y g tales que $f(x) = g(x)$ si y sólo si x es entero.
4. Demostrar que f es convexa en un intervalo si y sólo si para todo x e y del intervalo tenemos

$$f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y), \text{ para } 0 < t < 1.$$

(Esto no es más que una repetición de la definición, pero una repetición útil.)
5. (a) Demostrar que si f y g son convexas y f es creciente, entonces $g \circ f$ es convexa. (Será muy fácil aplicando el problema 4).
   (b) Dar un ejemplo en el que $g \circ f$ no sea convexa.
   (c) Supongamos que f y g son dos veces derivables. Dar otra demostración del resultado del punto (a) teniendo en cuenta las derivadas segundas.
6. (a) Supongamos que f es derivable y convexa en un intervalo. Demostrar que f es creciente, o decreciente, o que hay un número c tal que f es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha.
   (b) Aplicar este hecho para dar otra demostración del resultado del problema 5(a) cuando f y g son derivables (una vez). (Conviene ir con cuidado al comparar $f'(g(x))$ y $f'(g(y))$ para $x < y$).
   (c) Demostrar el punto (a) sin suponer que f es derivable. Es necesario tener en cuenta diferentes casos pero no se precisan ideas especialmente ingeniosas. Empezar demostrando que si $a < b$ y $f(a) < f(b)$, entonces f es creciente a la derecha de b; y si $f(a) > f(b)$, entonces f es decreciente a la izquierda de a.

*7. Sea f una función dos veces derivable con las siguientes propiedades: $f(x) > 0$ para $x \geq 0$, f es decreciente, y $f'(0) = 0$. Demostrar que $f''(x) = 0$ para algún $x > 0$ (de modo que en casos razonables f tendrá un punto de inflexión en x; un ejemplo lo tenemos en $f(x) = 1/(1 + x^2)$). Cada una de las hipótesis de este teorema es esencial, según se ve por $f(x) = 1 - x^2$, la cual no es positiva para todo x; por $f(x) = x^2$, la cual no es decreciente, y por $f(x) = 1/(x + 1)$, la cual no satisface $f'(0) = 0$. Indicación: Elíjase $x_0 > 0$ con $f'(x_0) < 0$. No podemos tener $f'(y) \leq f'(x_0)$ para todo $y > x_0$. ¿Por qué no? Así pues, $f'(x_1) > f'(x_0)$ para algún $x_1 > x_0$. Considérese f' sobre $[0, x_1]$.

***8.** (a) Demostrar que si f es convexa, entonces $f([x+y]/2) < [f(x)+f(y)]/2$.
(b) Supongamos que f satisface esta condición. Demostrar que

$$f(kx+(1-k)y) < kf(x)+(1-k)f(y)$$

siempre que k sea un número racional entre 0 y 1, de la forma $m/2^n$. Indicación: La parte (a) es el caso particular $n = 1$. Aplíquese inducción, empleando en cada paso la parte (a).
(c) Supongamos que f satisface la condición de la parte (a) y que f es continua. Demostrar que f es convexa.

***9.** Sean $p_1, \dots, p_n$ números *positivos* con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
(a) Para números cualesquiera $x_1, \dots, x_n$ demostrar que $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ está entre el más pequeño y el más grande de los x_i.
(b) Demostrar lo mismo para $(1/t)\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i$, donde $t = \sum_{i=1}^{n-1} p_i$.
(c) Demostrar la *desigualdad de Jensen*: Si f es convexa, entonces

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)..$$

Indicación: Aplíquese el problema 4, observando que $p_n = 1-t$. (La parte (b) es necesaria para demostrar que $(1/t)\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i$ pertenece al dominio de f si pertenecen al mismo $x_1, \dots, x_n$.)

***10.** (a) Para una función cualquiera f se designa por $f'_+(a)$ la derivada por la derecha, $\lim_{h\to 0^+} [f(a+h)-f(a)]/h$, y por $f'_-(a)$ la derivada por la izquierda. La demostración del teorema 1 prueba en realidad que f'_+ y f'_- existen siempre si f es convexa. Comprobar este aserto, y demostrar también que f'_+ y f'_- son crecientes, y que $f'_-(a) \le f'_+(a)$.
**(b) Demostrar que si f es convexa, entonces $f'_+(a) = f'_-(a)$ si y sólo si f'_+ es continua en a. (Así pues, f es derivable precisamente cuando f'_+ es continua.) Indicación: $[f(b)-f(a)]/(b-a)$ está próximo a $f'_-(a)$ para valores de $b < a$ próximos a a, y $f'_+(b)$ es menor que este cociente.

***11.** (a) Demostrar que una función convexa en **R**, o en un intervalo abierto, debe ser continua.
b) Dar un ejemplo de una función convexa en un intervalo cerrado que sea *no* continuo y explicar exactamente qué tipo de discontinuidades son posibles.

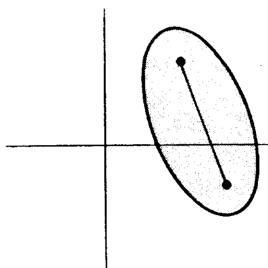
12. Llamamos *débilmente convexa* a una función f en un intervalo, si para $a < b < c$ en este intervalo, tenemos

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

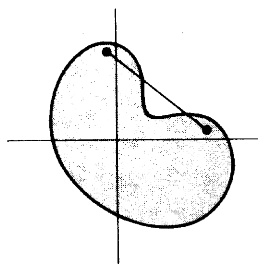
(a) Demostrar que una función débilmente convexa es convexa si, y sólo si, su gráfica no contiene ningún segmento recto. (A veces, las funciones débilmente convexas son llamadas "convexas", simplemente, mientras que las funciones convexas son llamadas "estrictamente convexas").

(b) Formular de nuevo los teoremas de este apéndice para las funciones débilmente convexas.

13. Un conjunto A de puntos en el plano es llamado *convexo* si A contiene la recta que une dos puntos cualesquiera de él (figura 14). Para una función f, sea A_f el conjunto de puntos (x, y) con $y \geq f(x)$, es decir, el conjunto de puntos de la gráfica de f. Demostrar que A es convexa si, y sólo si, f es débilmente convexa, según la terminología del problema 12. Se hallará más información sobre los conjuntos convexos en la referencia [11] de las Lecturas Aconsejadas.



(a) Un subconjunto convexo del plano



(b) Un subconjunto noconvexo del plano

FIGURA 14

CAPÍTULO

12

FUNCIONES INVERSAS

Tenemos ahora a nuestra disposición métodos muy poderosos para investigar funciones; lo que nos falta es una cantera adecuada de funciones a las cuales sean aplicables estos métodos. Hemos estudiado distintos métodos de formar nuevas funciones a partir de otras conocidas —suma, multiplicación, división y composición—, pero utilizando sólo estos métodos no podremos obtener más que las funciones racionales (incluso la función seno, aunque frecuentemente utilizada en los ejemplos, no ha sido definida). En los próximos capítulos empezaremos a construir nuevas funciones mediante procedimientos muy elaborados, pero existe un método importante cuya utilidad es prácticamente doble que la de cualquier otro método que descubramos.

Si recordamos que una función es una colección de pares de números, se nos puede ocurrir la luminosa idea de simplemente invertir todos los pares. Así, partiendo de la función

$$f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 9), (13, 8)\},$$

obtenemos

$$g = \{(2, 1), (4, 3), (9, 5), (8, 13)\}.$$

Al ser $f(1) = 2$ y $f(3) = 4$, obtenemos $g(2) = 1$ y $g(4) = 3$.

Desgraciadamente, esta luminosa idea no da siempre resultado. Si

$$f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 9), (13, 4)\},$$

entonces la colección

$$\{(2, 1), (4, 3), (9, 5), (4, 13)\}$$

ya no es en absoluto una función, puesto que contiene a la vez (4, 3) y (4, 13). Está claro dónde reside la dificultad: $f(3) = f(13)$, aun cuando $3 \neq 13$. Esto es lo único que puede ofrecer dificultad y vale la pena dar un nombre a las funciones para las cuales esto no ocurre.

DEFINICIÓN

Una función f es **uno-uno** si $f(a) \neq f(b)$ siempre que $a \neq b$.

La función identidad I es evidentemente uno-uno, y lo mismo ocurre con la siguiente modificación de la misma:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 3, 5 \\ 3, & x = 5 \\ 5, & x = 3. \end{cases}$$

La función $f(x) = x^2$ no es uno-uno, puesto que $f(-1) = f(1)$, pero si definimos

$$g(x) = x^2, \quad x \geq 0$$

(y dejamos g sin definir para $x < 0$), entonces g es uno-uno, porque g es creciente (ya que $g'(x) = 2x > 0$ para $x > 0$). Esta observación se generaliza fácilmente: Si n es un número natural y

$$f(x) = x^n, \quad x \geq 0,$$

entonces f es uno-uno. Si n es impar, se puede decir más: La función

$$f(x) = x^n \text{ para todo } x$$

es uno-uno (ya que $f'(x) = nx^{n-1} > 0$ para todo $x \neq 0$).

Es particularmente fácil decidir partiendo de la gráfica de f si f es uno-uno: la condición $f(a) \neq f(b)$ para $a \neq b$ significa que ninguna recta *horizontal* corta a la gráfica de f dos veces (fig. 1).

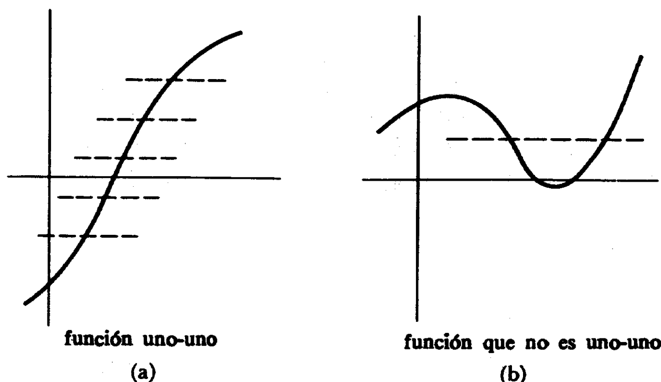


FIGURA 1

Si invertimos todos los pares en (una función no necesariamente uno-uno) f obtenemos, en cualquier caso, una colección de pares. Es corriente abstenerse de este procedimiento salvo en el caso de ser f uno-uno, pero no hay ninguna razón particular para hacerlo así —en vez de dar una definición con condiciones restrictivas, daremos una sin estas condiciones y obtendremos seguidamente un teorema.

DEFINICIÓN

> Para una función cualquiera f, recibe el nombre de **inversa** de f y se designa por f^{-1} el conjunto de todos los pares (a, b) para los cuales el par (b, a) pertenece a f.

TEOREMA 1

f^{-1} es una función si y sólo si f es uno-uno.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos en primer lugar que f es uno-uno. Sean (a, b) y (a, c) dos pares de f^{-1} Entonces (b, a) y (c, a) están en f, de modo que $a = f(b)$ y $a = f(c)$; al ser f uno-uno esto implica que $b = c$. Así pues, f^{-1} es una función.

Recíprocamente, supongamos que f^{-1} es una función. Si $f(b) = f(c)$, entonces f contiene los pares $(b, f(b))$ y $(c, f(c)) = (c, f(b))$, de modo que $(f(b), b)$ y $(f(b), c)$ están en f^{-1}. Al ser f^{-1} una función, esto implica que $b = c$. Así pues, f es uno-uno. ▮

Las gráficas de f y de f^{-1} están tan íntimamente relacionadas que es posible utilizar la gráfica de f para obtener una imagen visual de la gráfica de f^{-1}. Puesto que la gráfica de f^{-1} consiste en todos los pares (a, b) tales que (b, a) pertenece a la gráfica de f, se obtiene la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f intercambiando los ejes horizontal y vertical. Si f tiene la gráfica que se indica en la figura 2(a),

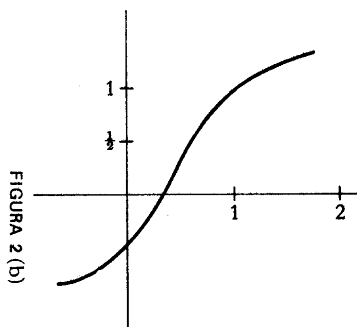


FIGURA 2 (a)

FIGURA 2 (b)

y se rota esta página 90° en sentido contrario a las agujas de un reloj entonces la gráfica de f^{-1} aparece a la izquierda del lector (fig. 2(b)). La única dificultad está en que el sentido de la numeración sobre el eje horizontal quedará ahora invertido, de modo que se deberá rebatir esta figura para obtener la gráfica corriente de f^{-1}, que es la que aparece a la derecha del lector (fig. 3).

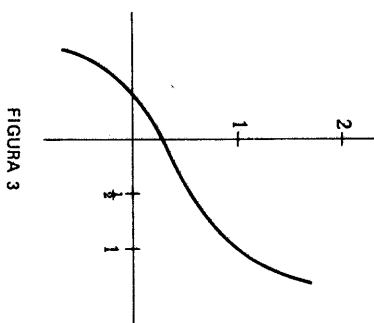


FIGURA 3

Este procedimiento es incómodo con los libros e imposible con encerados, pero afortunadamente existe otra manera de construir la gráfica de f^{-1}. Los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos uno de otro respecto a la gráfica de $I(x) = x$,

que recibe el nombre de **diagonal** (fig. 4). Para obtener la gráfica de f^{-1} hallamos simplemente la simétrica de la gráfica de f respecto a dicha recta (fig. 5).

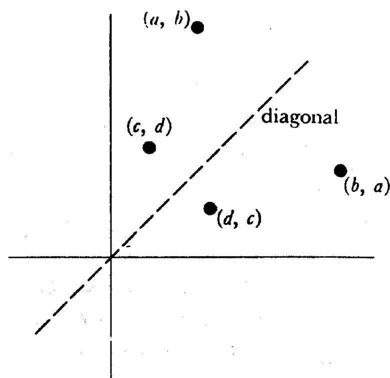


FIGURA 4

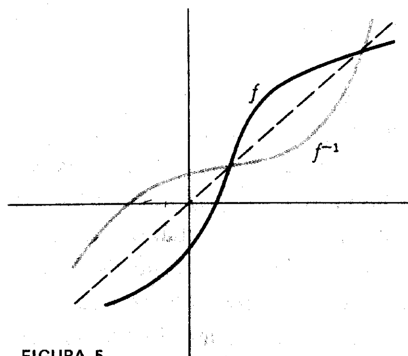


FIGURA 5

Al obtener dos veces la simétrica respecto a la diagonal volvemos al punto de partida; eso significa que $(f^{-1})^{-1} = f$, lo cual es también evidente partiendo de la definición. En conjunción con el teorema 1, esta ecuación tiene una consecuencia importante: si f es una función uno-uno, entonces también la función f^{-1} es uno-uno (puesto que $(f^{-1})^{-1}$ es una función).

Hay unas cuantas manipulaciones más con las funciones inversas que conviene que el lector conozca. Puesto que (a, b) está en f precisamente cuando (b, a) está en f^{-1}, se sigue que

$$b = f(a) \quad \text{significa lo mismo que} \quad a = f^{-1}(b).$$

Así pues, $f^{-1}(b)$ es el (único) número a tal que $f(a) = b$; por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $f^{-1}(b)$ es el único número a tal que $a^3 = b$, y este número es, por definición, $\sqrt[3]{b}$.

El hecho de que $f^{-1}(x)$ es el número y tal que $f(y) = x$ puede enunciarse en forma mucho más compacta:

$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad \text{para todo } x \text{ del dominio de } f^{-1}.$$

Además,

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \text{para todo } x \text{ del dominio de } f;$$

esto se sigue de la ecuación anterior al sustituir f por f^{-1}. Estas dos importantes ecuaciones pueden escribirse en la forma

$$f \circ f^{-1} = I,$$
$$f^{-1} \circ f = I$$

(salvo que el segundo miembro tendrá un dominio más amplio si el dominio de f o de f^{-1} no es todo $\mathbf{R}$).

Puesto que muchas funciones corrientes serán definidas como inversas de otras funciones, es muy importante saber distinguir las funciones que son uno-uno. Hemos apuntado ya cuál es la clase de funciones más fáciles de tratar —las funciones crecientes y las decrecientes son evidentemente uno-uno—. Además, si f es creciente, entonces f^{-1} es también creciente, y si f es decreciente, entonces f^{-1} es decreciente (la demostración se deja para el lector). Además, f es creciente si y sólo si $-f$ es decreciente, un hecho que conviene recordar.

No es ciertamente verdad que toda función uno-uno sea o bien creciente o bien decreciente. Ya hemos mencionado un ejemplo que viene ahora dibujado en la figura 6:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 3, 5 \\ 3, & x = 5 \\ 5, & x = 3. \end{cases}$$

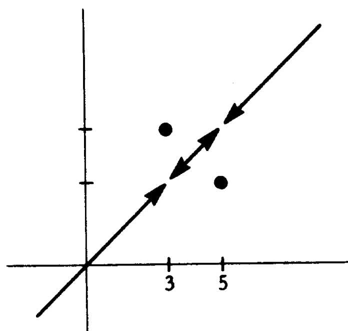
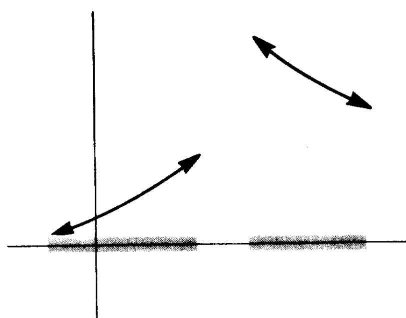


FIGURA 6


FIGURA 7

La figura 7 hace ver que existen incluso funciones no continuas uno-uno que no son ni crecientes ni decrecientes. Pero si el lector intenta trazar unos cuantos dibujos, se dará pronto cuenta de que toda función continua uno-uno, definida so-

bre un intervalo es o bien creciente o bien decreciente. De este hecho se puede dar una demostración directa pero larga e intrincada que supone el seguimiento de multitud de casos (algo así como en el problema 6 (c) del Apéndice último). La demostración que sigue prescinde de todos estos detalles molestos, aunque es algo rebuscada.

TEOREMA 2

Si f es continua y uno a uno en un intervalo, entonces f es o bien creciente o bien decreciente en dicho intervalo.

DEMOSTRACIÓN

Sean $a_0 < b_0$ dos números del intervalo. Al ser f uno a uno, sabemos que

$$\begin{array}{lll} \text{o bien} & \text{(i)} & f(b_0) - f(a_0) > 0 \\ \text{o bien} & \text{(ii)} & f(b_0) - f(a_0) < 0. \end{array}$$

Supondremos que se cumple (i) y demostraremos que la misma desigualdad se cumple para cualesquiera $a_1 < b_1$ del intervalo, de modo que f es creciente. (Un razonamiento análogo haría ver que si se cumple (ii), entonces f es decreciente.)

Sean

$$\left.\begin{array}{l} x_t = (1 - t)a_0 + ta_1 \\ y_t = (1 - t)b_0 + tb_1 \end{array}\right. \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1.$$

Entonces $x_0 = a_0$ y $x_1 = a_1$ y todos los puntos están entre a_0 y a_1 (Problema 4-2). Una proposición análoga vale para y_t. Así pues, los x_t e y_t están todos en el dominio de f. Además, puesto que $a_0 < b_0$ y $a_1 < b_1$, tenemos también

$$x_t < y_t \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1.$$

Consideremos ahora la función

$$g(t) = f(y_t) - f(x_t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1.$$

Aplicando el teorema 6-2 resulta fácil ver que g es continua en $[0, 1]$. Además $g(t)$ no es nunca 0, ya que $x_t < y_t$ y f es uno a uno. En consecuencia, $g(t)$ es o bien positiva para todos los t de $[0, 1]$ o bien negativa para todos los t de $[0, 1]$ (de otro modo, por el teorema de los valores intermedios sería también 0 en algún punto de $[0, 1]$). Pero $g(0) > 0$ por (i). Así pues también $g(1) > 0$, lo que sig-

nifica que (i) se cumple también para a_1, b_1. ▌

De aquí en adelante nos ocuparemos casi exclusivamente de funciones continuas crecientes o decrecientes definidas sobre un intervalo. Si f es una de tales funciones, se puede decir con toda precisión cómo va a ser el dominio de f^{-1}.

Supongamos primero que f es una función creciente continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces, según el teorema de los valores intermedios, f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Por lo tanto, el dominio de f^{-1} es el intervalo cerrado $[f(a), f(b)]$. Análogamente, si f es continua y decreciente sobre $[a, b]$, entonces el dominio de f^{-1} es $[f(b), f(a)]$.

Si f es una función creciente continua sobre un intervalo *abierto* (a, b), el análisis se hace algo más difícil. Para empezar, elijamos algún punto c de (a, b). Veremos primero cuáles son los valores $> f(c)$ tomados por f. Una posibilidad es que f tome valores arbitrariamente grandes (figura 8). en este caso f toma *todos* los valores $> f(c)$, según el teorema de los valores intermedios. Si, por otra parte, f no toma valores arbitrariamente grandes, entonces $A = \{f(x): c \leq x < b\}$

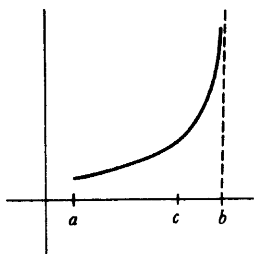


FIGURA 8

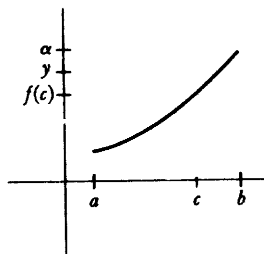


FIGURA 9

está acotado superiormente, de modo que A tiene una cota superior mínima α (figura 9). Supongamos ahora que y es un número cualquiera con $f(c) < y < \alpha$. Entonces f toma algún valor $f(x) > y$ (puesto que α es la cota superior mínima de A). Según el teorema de los valores intermedios, f toma efectivamente el valor y. Obsérvese que f no puede tomar el valor α mismo; pues si $\alpha = f(x)$ para $a < x < b$ y elegimos t con $x < t < b$, entonces $f(t) > \alpha$, lo cual es imposible.

Exactamente los mismos razonamientos sirven para valores menores que $f(c)$: o bien f toma todos los valores menores que $f(c)$, o bien existe un número $\beta < f(c)$ tal que f toma todos los valores comprendidos entre β y $f(c)$, pero no el mismo β.

El razonamiento entero puede repetirse si f es decreciente, y si el dominio

de f es R o (a, ∞) o $(-\infty, a)$. Resumiendo: si f es una función continua creciente cuyo dominio es un intervalo de una de las formas

$$(a, b), (-\infty, b), (a, \infty), \text{ o } \mathbf{R},$$

entonces el dominio de f^{-1} es también un intervalo de una de dichas cuatro formas.

Ahora, una vez concluido este análisis preliminar de las funciones uno-uno continuas, se puede uno preguntar qué propiedades importantes de una función uno-uno son heredadas por su inversa. Para la continuidad no hay problema.

TEOREMA 3

Si f es continua y uno-uno sobre un intervalo, entonces f^{-1} es también continua.

DEMOSTRACIÓN

Sabemos por el teorema 2 que f es o bien creciente o bien decreciente. Podemos muy bien suponer que f es creciente, ya que después se puede tratar el otro caso aplicando el artificio usual de considerar $-f$.

Hemos de demostrar que

$$\lim_{x \to b} f^{-1}(x) = f^{-1}(b)$$

para todo b del dominio de f^{-1}. Un tal número b es de la forma $f(a)$ para algún a del dominio de f. Para cualquier $\varepsilon > 0$ hemos de encontrar un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } f(a) - \delta < x < f(a) + \delta, \text{ entonces } a - \varepsilon < f^{-1}(x) < a + \varepsilon.$$

La figura 10 sugiere la manera de hallar δ (recuérdese que al mirar de lado se ve la gráfica de f^{-1}): al ser

$$a - \varepsilon < a < a + \varepsilon,$$

se sigue que

$$f(a - \varepsilon) < f(a) < f(a + \varepsilon);$$

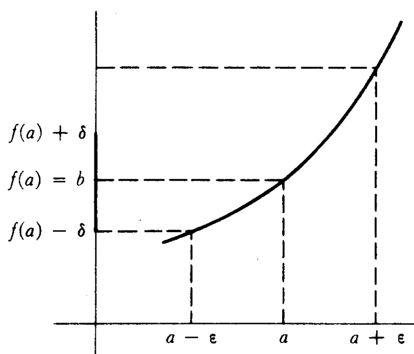


FIGURA 10

ponemos como δ el más pequeño de los números $f(a + \varepsilon) - f(a)$ y $f(a) - f(a - \varepsilon)$. La figura 10 contiene la demostración completa de que este δ va bien y lo que sigue es sencillamente una expresión verbal de la información contenida en dicha figura.

Nuestra elección de δ asegura que

$$f(a - \varepsilon) \leq f(a) - \delta \quad \text{y} \quad f(a) + \delta \leq f(a + \varepsilon).$$

En consecuencia, si

$$f(a) - \delta < x < f(a) + \delta,$$

entonces

$$f(a - \varepsilon) < x < f(a + \varepsilon).$$

Al ser f creciente, f^{-1} es también decreciente, y obtenemos

$$f^{-1}(f(a - \varepsilon)) < f^{-1}(x) < f^{-1}(f(a + \varepsilon)),$$

es decir,

$$a - \varepsilon < f^{-1}(x) < a + \varepsilon,$$

que es precisamente lo que queríamos. ▌

Una vez investigada con éxito la continuidad de f^{-1}, parece razonable abordar la derivabilidad. Otra vez se puede ver gráficamente cuál es el resultado que deberíamos obtener. La figura 11 muestra la gráfica de una función uno-uno f con

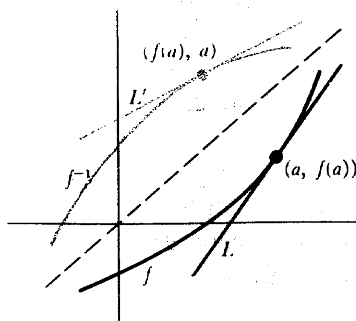


FIGURA 11

una tangente L por $(a, f(a))$. Si se refleja toda la figura a través de la diagonal, se obtiene la gráfica de f^{-1} y la tangente L' por $(f(a), a)$. La pendiente de L' es la recíproca de la pendiente de L. En otras palabras, parece ser que

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Esta fórmula puede escribirse igualmente de manera que exprese $(f^{-1})'(b)$ directamente, para cada b del dominio de f^{-1}:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Contrariamente al razonamiento usado para la continuidad, esta «demostración» en imágenes se hace algo más complicada al formularla analíticamente. Hay otro procedimiento que podría intentarse. Puesto que sabemos que

$$f(f^{-1}(x)) = x,$$

resulta tentador demostrar la fórmula deseada mediante una aplicación de la regla de la cadena:

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1,$$

de modo que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Desgraciadamente, esto no es una demostración de que f^{-1} es derivable, puesto que la regla de la cadena no puede aplicarse a no ser que se sepa ya que f^{-1} es derivable. Pero este razonamiento indica cómo tendrá que ser $(f^{-1})'(x)$ si f^{-1} *es* derivable, y puede también utilizarse para obtener alguna importante información preliminar.

TEOREMA 4

Si f es una función uno-uno continua definida sobre un intervalo y $f'(f^{-1}(a)) = 0$, entonces f^{-1} *no* es derivable en a.

DEMOSTRACIÓN

Tenemos

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Si f^{-1} *fuese* derivable en a, la regla de la cadena implicaría que

$$f'(f^{-1}(a)) \cdot (f^{-1})'(a) = 1,$$

de donde

$$0 \cdot (f^{-1})'(a) = 1,$$

lo cual es absurdo. ▮

Un ejemplo sencillo al que es aplicable el teorema 4 lo constituye la función $f(x) = x^3$. Al ser $f'(0) = 0$ y $0 = f^{-1}(0)$, la función f^{-1} no es derivable en 0 (figura 12).

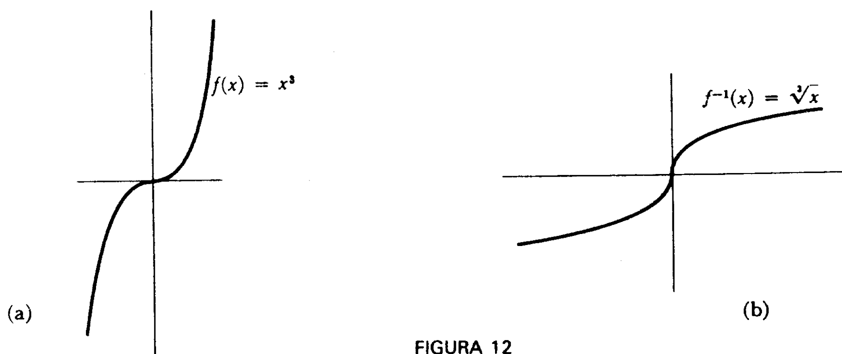


FIGURA 12

Una vez visto dónde no puede ser derivable una función inversa, estamos en condiciones para dar la demostración rigurosa de que en todos los demás casos la derivada viene dada por la fórmula que ya hemos «deducido» de dos maneras diferentes. Obsérvese que el siguiente razonamiento utiliza la *continuidad* de f^{-1}, que ya hemos demostrado.

TEOREMA 5

Sea f una función uno-uno continua definida sobre un intervalo, y supongamos que f es derivable en $f^{-1}(b)$, con derivada $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Entonces f^{-1} es derivable en b, y

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $b = f(a)$. Entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - a}{h}.$$

Ahora bien, todo número $b + h$ del dominio de f^{-1} puede escribirse en la forma

$$b + h = f(a + k)$$

para un k único (en rigor deberíamos poner $k(h)$, pero nos quedaremos con k para mayor sencillez). Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - a}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(f(a+k)) - a}{f(a+k) - b} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{k}{f(a+k) - f(a)}.\end{aligned}$$

Evidentemente vamos por buen camino. No es difícil obtener una expresión explícita de k; al ser

$$b + h = f(a + k)$$

tenemos

$$f^{-1}(b + h) = a + k$$

o

$$k = f^{-1}(b + h) - f^{-1}(b).$$

Ahora bien, según el teorema 3, la función f^{-1} es continua en b. Esto significa que k tiende hacia 0 cuando h tiende hacia 0. Al ser

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a + k) - f(a)}{k} = f'(a) = f'(f^{-1}(b)) \neq 0,$$

esto implica que

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \blacksquare$$

El trabajo que hemos hecho con las funciones inversas se verá más adelante ampliamente remunerado, pero aquí tenemos ya una compensación inmediata. Para n impar, sea

$$f_n(x) = x^n \quad \text{para todo } x;$$

para n par, sea

$$f_n(x) = x^n, \quad x \geq 0.$$

Entonces f_n es una función uno-uno continua, cuya función inversa es

$$g_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}.$$

Según el teorema 5 tenemos, para $x \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
g_n'(x) &= \frac{1}{f_n'(f_n^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{n(f_n^{-1}(x))^{n-1}} \\
&= \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{1-(1/n)}} \\
&= \frac{1}{n} \cdot x^{(1/n)-1}.
\end{aligned}
$$

Así pues, si $f(x) = x^a$ y a es un entero o el recíproco de un número natural, entonces $f'(x) = ax^{a-1}$. Ahora es fácil comprobar que esta fórmula se cumple si a es un número racional cualquiera: Sea $a = m/n$, donde m es un entero y n es un número natural; si

$$
f(x) = x^{m/n} = (x^{1/n})^m,
$$

entonces, según la regla de la cadena,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= m(x^{1/n})^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{(1/n)-1} \\
&= \frac{m}{n} \cdot x^{[(m/n)-(1/n)]+[(1/n)-1]} \\
&= \frac{m}{n} x^{(m/n)-1}.
\end{aligned}
$$

Aunque tenemos ahora una fórmula para $f'(x)$ cuando $f(x) = x^a$ y a es racional, el tratamiento de la función $f(x) = x^a$ para a irracional deberá ser dejado para más adelante, ya que de momento no sabemos ni siquiera cuál es el *significado* de un símbolo tal como $x^{\sqrt{2}}$. En realidad las funciones inversas desempeñarán un papel central en la definición de x^a para a irracional. Efectivamente, en los próximos capítulos se definirán varias funciones importantes en términos de sus funciones inversas.

PROBLEMAS

1. Hallar f^{-1} para cada una de las f siguientes.

(i) $f(x) = x^3 + 1.$

(ii) $f(x) = (x - 1)^3.$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ -x, & x \text{ irracional} \end{cases}$

(iv) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0 \\ 1 - x^3, & x < 0. \end{cases}$

(v) $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq a_1, \ldots, a_n \\ a_{i+1}, & x = a_i, \quad i = 1, \ldots, n-1 \\ a_1, & x = a_n. \end{cases}$

(vi) $f(x) = x + [x].$

(vii) $f(0{,}a_1a_2a_3 \ldots) = 0{,}a_2a_1a_3 \ldots.$ (Estamos utilizando la representación decimal.)

(viii) $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}, \ -1 < x < 1.$

2. Descríbase la gráfica de f^{-1} cuando
(i) f es creciente y siempre positiva.
(ii) f es creciente y siempre negativa.
(iii) f es decreciente y siempre positiva.
(iv) f es decreciente y siempre negativa.

3. Demostrar que si f es creciente, entonces también lo es f^{-1}, y análogamente para funciones decrecientes.

4. Si f y g son crecientes, ¿lo es $f + g$? ¿O $f \cdot g$? ¿O $f \circ g$?

5. (a) Demostrar que si f y g son uno-uno entonces $f \circ g$ es también uno-uno. Hallar $(f \circ g)^{-1}$ en términos de f^{-1} y g^{-1}. Indicación: La solución *no* es $f^{-1} \circ g^{-1}$.
(b) Hallar g^{-1} en términos de f^{-1} si $g(x) = 1 + f(x)$.

6. Demostrar que $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ es uno-uno si y sólo si $ad - bc \neq 0$, y hallar f^{-1} en este caso.

7. ¿En qué intervalos $[a, b]$ serán uno-uno las siguientes funciones?

(i) $f(x) = x^3 - 3x^2.$

(ii) $f(x) = x^5 + x$.
(iii) $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$.
(iv) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

8. Supóngase que f es derivable, siendo la derivada $f'(x) = (1 + x^3)^{-1/2}$. Demostrar que $g = f^{-1}$ satisface $g''(x) = 3g(x)^2/2$.

9. Supongamos que f es una función uno-uno y que f^{-1} tiene una derivada que no es 0 en ningún punto. Demostrar que f es derivable. Indicación: Existe una demostración inmediata.

10. En el Problema 10-17 se definió la derivada de Schwarz.

(a) Demostrar que si existe $\mathfrak{D}f(x)$ para todo x, entonces existe también $\mathfrak{D}f^{-1}(x)$ para todo x en el dominio de f^{-1}.

(b) Hallar una fórmula para $\mathfrak{D}f^{-1}(x)$.

***11.** (a) Demostrar que existe una función derivable f tal que $[f(x)]^5 + f(x) + x = 0$ para todo x. Indicación: Demostrar que f puede expresarse como función inversa. La manera más fácil de hacer esto consiste en hallar f^{-1}. Y la manera más fácil de hacer *esto* es poniendo $x = f^{-1}(y)$.

(b) Hallar f' en términos de f, aplicando un teorema apropiado de este capítulo.

(c) Hallar f' de otra manera, derivando simplemente la ecuación que define f.

La función del problema 11 se dice a menudo que está **definida implícitamente** por la ecuación $y^5 + y + x = 0$. Sin embargo, el caso de esta ecuación es especial del todo. Según indica el próximo problema, una ecuación no define por lo general una función implícitamente sobre toda la recta, y en algunas regiones puede estar definida implícitamente más de una función.

12. (a) ¿Cuáles son las dos funciones derivables f definidas implícitamente sobre $(-1, 1)$ por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, es decir, que satisfacen $x^2 + [f(x)]^2 = 1$ para todo x de $(-1, 1)$? Obsérvese que no existen soluciones definidas fuera de $[-1, 1]$.

(b) ¿Cuáles son las funciones f que satisfacen $x^2 + [f(x)]^2 = -1$?

*(c) ¿Cuáles son las funciones derivables f que satisfacen $[f(x)]^3 - 3f(x) = x$? Indicación: Será útil dibujar primero la gráfica de la función $g(x) = x^3 - 3x$.

En general, la determinación de los intervalos sobre los cuales una función derivable queda definida implícitamente mediante una ecuación particular puede resultar un asunto delicado, y se estudia mejor dentro del contexto del cálculo

infinitesimal avanzado. Sin embargo, si *suponemos* que f es una solución derivable, entonces puede deducirse una fórmula para $f'(x)$, exactamente lo mismo que en el problema 11 (c), derivando ambos miembros de la ecuación que define f (proceso conocido por «derivación implícita»):

13. (a) Aplicar este método a la ecuación $[f(x)]^2 + x^2 = 1$. Obsérvese que la solución encerrará $f(x)$; esto era de esperar, puesto que existe más de una función definida implícitamente por la ecuación $y^2 + x^2 = 1$.
    (b) Compruébese con todo que la solución va bien para las dos funciones f halladas en el problema 12(a).
    (c) Aplicar este mismo método a $[f(x)]^3 - 3f(x) = x$.
14. (a) Por medio de la derivación implícita hallar $f'(x)$ y $f''(x)$ para las funciones f definidas implícitamente mediante la ecuación $x^3 + y^3 = 7$.
    (b) Una de estas funciones f satisface $f(-1) = 2$. Para esta f hallar $f'(-1)$ y $f''(-1)$.
15. El conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $3x^3 + 4x^2y - xy^2 + 2y^3 = 4$ forma una cierta curva del plano. Hallar la ecuación de la tangente a esta curva en el punto $(-1, 1)$.
16. La notación de Leibniz es particularmente adecuada para la derivación implícita. Al ser usado con tanta consistencia y como abreviación para $f(x)$, la ecuación en x e y que define f implícitamente representará automáticamente la ecuación que ha de satisfacer f. ¿Cómo se escribiría el siguiente cálculo en nuestra notación?

$$y^4 + y^3 + xy = 1,$$
$$4y^3 \frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{4y^3 + 3y^2 + x}.$$

17. Al entrar en juego la notación de Leibniz, debe mencionarse la notación de Leibniz para derivadas de funciones inversas. Si dy/dx denota la derivada de f, entonces la derivada de f^{-1} es designada por dx/dy. Escríbase el teorema 5 con esta notación. La ecuación resultante hará ver otra razón de por qué la notación de Leibniz tiene tantos partidarios. Explicará también en qué punto ha de calcularse $(f^{-1})'$ cuando se usa la notación dx/dy. ¿Cuál es el significado del siguiente cálculo?

$$x = y^n,$$
$$y = x^{1/n},$$
$$\frac{dx^{1/n}}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}}.$$

18. Supongamos que f es una función uno-uno derivable, con derivada que no se anula en ningún punto, y que $f = F'$. Sea $G(x) = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$. Demostrar que $G'(x) = f^{-1}(x)$. (Prescindiendo de detalles, este problema nos da a conocer un hecho muy interesante: Si tenemos una función cuya derivada es f, entonces también tendremos una cuya derivada es f^{-1}. Pero ¿cómo será posible obtener la función G? Se indican dos maneras diferentes en los problemas 14-18 y 18-15.)

19. Supongamos que h es una función tal que $h'(x) = \text{sen}^2(\text{sen}(x+1))$ y $h(0) = 3$. Hallar

(i) $(h^{-1})'(3)$.
(ii) $(\beta^{-1})'(3)$, donde $\beta(x) = h(x+1)$.

20. Hallar una fórmula para $(f^{-1})''(x)$.

***21.** Demostrar que si existe $f^{(k)}(f^{-1}(x))$, y es distinta de 0, entonces existe $(f^{-1})^{(k)}(x)$.

22. (a) Demostrar que una función creciente y una decreciente se cortan a lo sumo en un punto.

(b) Hallar dos funciones crecientes continuas f y g tales que $f(x) = g(x)$ precisamente para x enteros.

(c) Hallar una función creciente continua f y una función decreciente continua g, definidas sobre $\mathbf{R}$ y que no se corten en ningún punto.

***23.** (a) Si f es una función continua sobre $\mathbf{R}$ y $f = f^{-1}$, demostrar que existe por lo menos un x tal que $f(x) = x$. (¿Cuál es el significado geométrico de la condición $f = f^{-1}$?)

(b) Dense varios ejemplos de funciones continuas f tales que $f = f^{-1}$ y $f(x) = x$ para un x y sólo uno. Indicación: Pruébese con una f decreciente y recuérdese la interpretación geométrica. Una posibilidad es $f(x) = -x$.

(c) Demostrar que si f es una función creciente tal que $f = f^{-1}$, entonces $f(x) = x$ para todo x. Indicación: Aunque la interpretación geométrica convencerá inmediatamente, la demostración más sencilla (unas dos líneas) consiste en excluir las posibilidades $f(x) < x$ y $f(x) > x$.

***24.** ¿Qué funciones tienen la propiedad de que su gráfica sigue siendo la gráfica

de una función después de reflejada a través de la gráfica de $-I$ (la «antidiagonal»)?

25. Una función f es **no decreciente** si $f(x) \leq f(y)$ siempre que $x < y$. (Para ser más precisos deberíamos estipular que el dominio de f fuera un intervalo.) De manera análoga se define una función **no creciente.** Advertencia: Algunos autores usan «creciente» en vez de «no decreciente», y «estrictamente creciente» en vez de nuestro «creciente».
   (a) Demostrar que si f es no decreciente, pero no es creciente, entonces f es constante sobre algún intervalo. (Evítense los involuntarios equívocos: no es lo mismo decir que una función «no es creciente» que decir que es «no creciente».)
   (b) Demostrar que si f es derivable y no creciente, entonces $f'(x) \geq 0$ para todo x.
   (c) Demostrar que si $f'(x) \geq 0$ para todo x, entonces f es no decreciente.

*26. (a) Supongamos que $f(x) > 0$ para todo x y que f es decreciente. Demostrar que existe una función decreciente *continua* g tal que $0 < g(x) \leq f(x)$ para todo x.
   (b) Demostrar que podemos incluso hacer que g satisfaga $\lim_{x \to \infty} g(x)/f(x) = 0$.

APÉNDICE. REPRESENTACIÓN PARAMÉTRICA DE CURVAS

El material de este capítulo sirve para destacar algo que ya hemos hecho notar hace tiempo: una curva perfecta de buen ver no tiene por qué ser la gráfica de una función (figura 1). Dicho de otro modo, puede que no sea posible describirla como conjunto de todos los puntos $(x, f(x))$. Quizá pudiéramos describir la curva como conjunto de todos los puntos $(f(x), x)$; por ejemplo, la curva de la figura 1

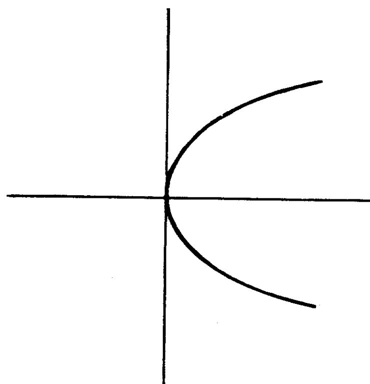


FIGURA 1

es el conjunto de todos los puntos (x^2, x). Pero ni siquiera este truco da resultado en la mayoría de los casos. No nos permite describir la circunferencia formada por todos los puntos (x, y) que satisfacen $x^2 + y^2 = 1$ y no nos sirve para describir una curva como la de la figura 2.

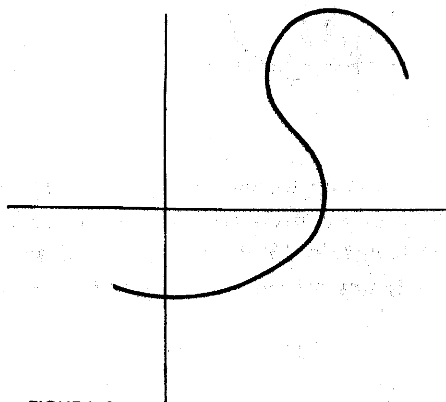


FIGURA 2

El modo más sencillo de describir curvas, en general, se apoya en la concepción física de una curva como trayectoria de una partícula que se mueve en el plano. En cada instante t, la partícula se halla en un cierto punto que tiene dos coordenadas; para significar la dependencia de estas coordenadas del tiempo t las podemos designar por $u(t)$ y $v(t)$. Nos quedamos de este modo con *dos* funciones. Recíprocamente, dadas dos funciones u y v, podemos concebir la curva como constituida por todos los puntos $(u(t), v(t))$. De esta curva se dice que está representada *paramétricamente* por u y v y el par de funciones u, v se dice que es una representación paramétrica de la curva. La curva representada paramétricamente por u y v consiste pues en la totalidad de los pares (x, y) con $x = u(t)$ e $y = v(t)$. Se la suele describir brevemente como «la curva $x = u(t)$, $y = v(t)$». Obsérvese que es siempre posible describir paramétricamente la gráfica de una función f como la curva $x = t$, $y = f(t)$.

Incluso en casos en que una curva sea la gráfica de una función, puede resultar más sencillo obtenerla mediante una descripción paramétrica. Como ejemplo vamos a examinar la *cicloide*, una de las curvas más famosas en matemáticas. Se define esta curva como la trayectoria de un punto situado en el borde de una rueda rotatoria de radio a. Podrá el lector observar una hermosa cicloide si pega un reflector a la llanta de una rueda de bicicleta y consigue que un amigo pase lentamente, montado en ella, de noche, por delante de las luces de su automóvil. A

falta de automóvil, bicicleta o complaciente amigo puede observar la figura 3.

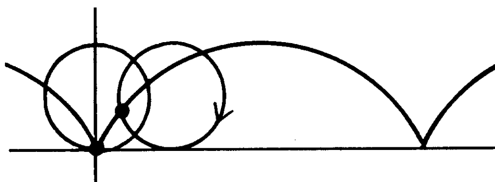


FIGURA 3

Para describir la cicloide en forma paramétrica, sean $u(t)$ y $v(t)$ las coordenadas del punto del borde de la rueda cuando ésta ha rodado un ángulo t. Vamos a medir t en radianes (capítulo 15) de modo que el arco del borde de la rueda que va de P a Q en la figura 4 tiene una longitud at. Puesto que la rueda va ro-

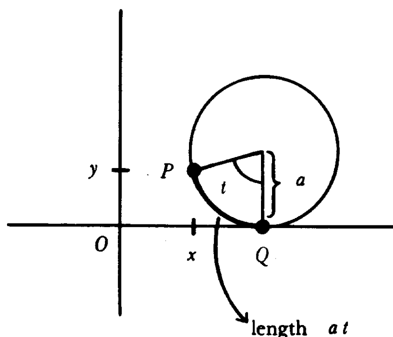


FIGURA 4

dando sin deslizamiento, at es también la distancia de 0 a Q. Con esto resulta fácil ver que la representación paramétrica de la curva es

$$u(t) = a(t - \text{sen } t)$$
$$v(t) = a(1 - \cos t)$$

En la figura 5 se pueden ver las curvas que se obtienen cuando la distancia del punto al centro de la rueda es (a) menor que el radio o (b) mayor que el radio. En este último caso la curva no es la gráfica de ninguna función; en ciertos instantes el movimiento del punto es hacia atrás a pesar de que la rueda se mueva hacia adelante. En la figura 3 hemos dibujado la cicloide como gráfica de una función, pero el lector podrá preguntarse por qué estamos tan seguros de que lo

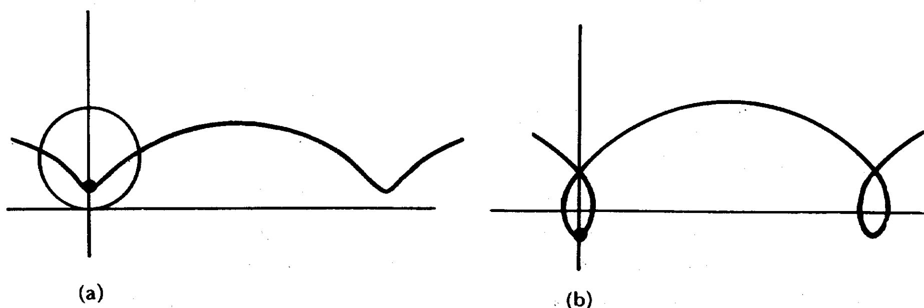


FIGURA 5

sea. La justificación de esto es muy sencilla. Al ser

$$u'(t) = a(1 - \cos t) \geq 0$$

la función u es creciente, de modo que para un x cualquiera existe un valor *único* de t para el cual es $x = u(t)$, a saber $t = u^{-1}(x)$.
Así pues, el único punto de la cicloide con x como primera coordenada es el punto

$$(x, v(u^{-1}(x))).$$

Dicho de otro modo, la cicloide es la gráfica de $f = v \circ u^{-1}$.

No existe modo alguno de obtener f explícitamente mediante una fórmula (el máximo logro en este sentido puede verse en el problema 6), pero todo lo que la fórmula pudiera dar es posible obtenerlo a través de la representación paramétrica. Por ejemplo, el primero de los problemas que siguen proporciona la manera de obtener las tangentes a la cicloide.

PROBLEMAS

1. Sea $x = u(t)$, $y = v(t)$ una representación paramétrica de una curva, y supóngase que u es biunívoca en un intervalo, de modo que parte de la curva es la gráfica de $f = v \circ u^{-1}$.
   (a) Demostrar que en el punto $x = u(t)$ se tiene

$$f'(x) = \frac{v'(t)}{u'(t)}$$

Con la notación de Leibnitz se puede dar a esto una expresión muy sugestiva en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

(b) Se tiene también

$$f''(x) = \frac{u'(t)v''(t) - v'(t)u''(t)}{(u'(t))^3}.$$

2. Sea f una función definida en forma implícita mediante la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. Hallar $f'(x)$ de dos maneras:

(i) Derivando implícitamente

(ii) Considerando la representación paramétrica $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$.

3. Sea $x = u(t)$, $y = v(t)$ la representación paramétrica de una curva, siendo u y v derivables, y sea $P = (x_0, y_0)$ un punto del plano. Demostrar que si $Q = (u(\bar{t}), v(\bar{t}))$ es el punto de la curva más próximo a (x_0, y_0) entonces la recta que une P con Q es perpendicular a la tangente a la curva en Q (Figura 6). Lo mismo ocurre si Q es un punto para el que la distancia de P a Q alcanza un máximo relativo.

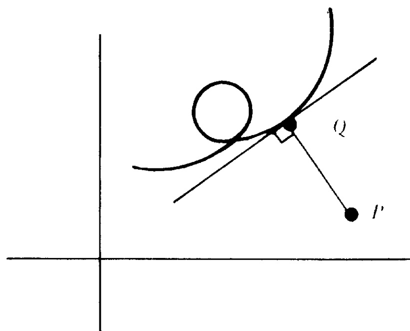


FIGURA 6

En el apéndice al capítulo 4 hemos estudiado la gráfica de una función en coordenadas polares. Es aquí oportuno destacar que esto no es otra cosa que un ejemplo particular de representación paramétrica de una curva:

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

4. (a) Demostrar que para la gráfica de f en coordenadas polares, la pendiente de la tangente en el punto de coordenadas polares $(f(\theta), \theta)$ es

$$\frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta}{-f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta + f'(\theta)\cos\theta}.$$

(b) Demostrar que si $f(\theta) = 0$ y f es derivable en 0, entonces la recta por el origen que forma un ángulo θ con el eje horizontal positivo es tangente a la gráfica de f en coordenadas polares. Con ayuda de este resultado añádase algunos detalles a la gráfica de la espiral de Arquímedes del apéndice al capítulo 4, así como a las gráficas de los problemas 3 y 7 del mismo apéndice.

(c) Supóngase que el punto de coordenadas polares $(f(\theta), \theta)$ dista más del origen 0 que cualquier otro punto de la gráfica de f. ¿Qué se puede decir acerca de la tangente a la gráfica en este punto? Compárese con el problema 3.

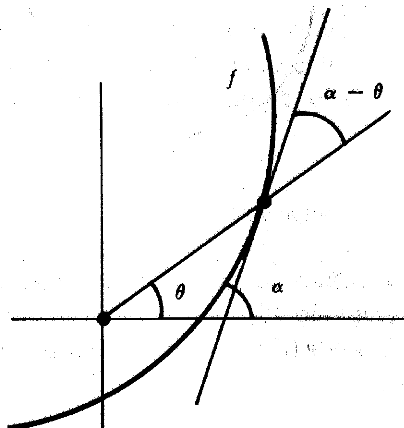


FIGURA 7

(d) Supóngase que la tangente a la gráfica de f en el punto de coordenadas polares $(f(\theta), \theta)$ forma un ángulo α con el eje horizontal (figura 7), de tal modo que $\alpha - \theta$ es el ángulo que la tangente forma con el rayo que une 0 con el punto considerado. Demostrar que

$$\mathrm{tg}\,(\alpha - \theta) = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}.$$

5. (a) En el Problema 5 del apéndice al capítulo 4 hemos visto que la car-

dioide $r = 1 - \text{sen}\,\theta$ se puede describir también mediante la ecuación $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$. Hallar la pendiente de la tangente en un punto de la cardioide de dos maneras:

(i) Derivando implícitamente

(ii) Utilizando el problema anterior.

(b) Comprobar que las tangentes en el origen son verticales, tal como aparece en la figura 8.

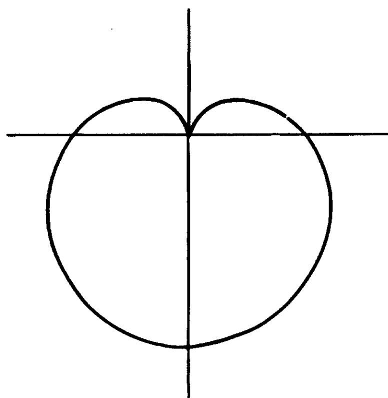


FIGURA 8

6. En este problema entran en juego las funciones trigonométricas inversas y sus propiedades (capítulo 15).

(a) Sea $x = u(t)$, $y = v(t)$ la representación paramétrica de la cicloide. Demostrar que

$$u(t) = a \text{ arccos} \frac{a - v(t)}{a} \pm \sqrt{[2a - v(t)]v(t)}.$$

Ayuda: Despejar primero t en función de $v(t)$.

(b) La primera mitad del primer arco de la cicloide es la gráfica de g^{-1}, siendo

$$g(y) = a \text{ arccos} \frac{a - y}{y} - \sqrt{(2a - y)y}.$$

7. Sean u y v continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b); entonces u y v proporcionan la representación paramétrica de una curva desde $P = (u(a), u(b))$ hasta $Q = (v(a), v(b))$. Geométricamente parece claro que en algún punto de la

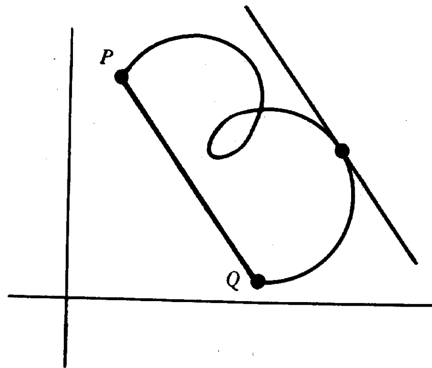


FIGURA 9

curva (figura 9) la tangente será paralela al segmento rectilíneo que une P con Q. Demostrar esto analíticamente. Indicación: Este problema proporcionará una interpretación geométrica de uno de los teoremas del capítulo 11.

CAPÍTULO

13

INTEGRALES

La derivada no despliega toda su fuerza hasta que se alía con la «integral», el segundo concepto fundamental de la parte III. Al principio, lo acabado de decir puede parecer totalmente una digresión, puesto que en este capítulo las derivadas no aparecen ni una sola vez. El estudio de las integrales requiere una preparación larga, pero una vez hecho este trabajo preliminar, las integrales constituyen un instrumento de valor incalculable para construir nuevas funciones, y la derivada volverá a aparecer, más poderosa que nunca, en el capítulo 14.

Aunque será necesario definirla de forma esencialmente complicada, la integral viene a formalizar un concepto sencillo, intuitivo: el de área. Ahora ya no nos debe causar sorpresa el encontrarnos con que la definición de un concepto intuitivo puede presentar grandes dificultades y ciertamente el «área» no es ninguna excepción a esto.

En geometría elemental se deducen fórmulas para las áreas de muchas figuras planas, pero un poco de reflexión hace ver que raramente se da una definición aceptable de área. El área de una región se define a veces como el número de cuadrados de lado unidad que caben en la región. Pero esta definición es totalmente inadecuada para todas las regiones con excepción de las más simples. Por ejemplo, el círculo de radio 1 tiene por área el número irracional π, pero no está claro en absoluto cuál es el significado de «π cuadrados». Incluso si consideramos un círculo de radio $1/\sqrt{\pi}$ cuya área es 1, resulta difícil explicar de qué manera un cuadrado unidad puede llenar este círculo, ya que no parece posible dividir el cua-

drado unidad en pedazos que puedan ser yuxtapuestos de manera que formen un círculo.

En este capítulo intentaremos solamente definir el área de algunas regiones muy especiales (figura 1): aquellas que están limitadas por el eje horizontal, las

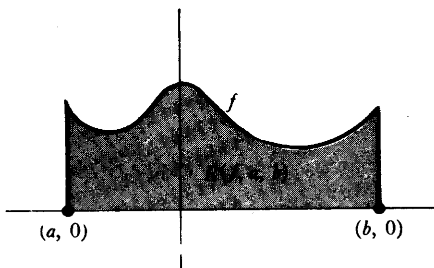


FIGURA 1

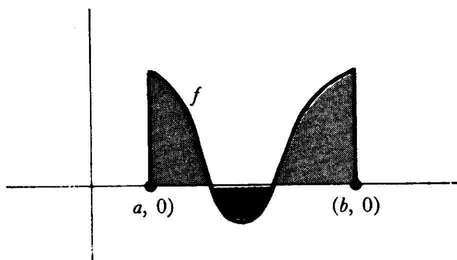


FIGURA 2

verticales por $(a, 0)$ y $(b, 0)$, y la gráfica de una función f tal que $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$. Conviene denotar esta región por $R(f, a, b)$. Obsérvese que estas regiones incluyen rectángulos y triángulos, así como muchas otras figuras geométricas importantes.

El número que asignaremos eventualmente como área de $R(f, a, b)$ recibirá el nombre de *integral* de f sobre $[a, b]$. En realidad, la integral se definirá también para funciones f que no satisfacen la condición $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$. Si f es la función dibujada en la figura 2, la integral representará la diferencia entre las áreas de las regiones de sombreado claro y de sombreado fuerte («área algebraica» de $R(f, a, b)$).

La idea que ampara la definición que vamos a dar se indica en la figura 3. El intervalo $[a, b]$ ha sido dividido en cuatro subintervalos

$$[t_0, t_1] \quad [t_1, t_2] \quad [t_2, t_3] \quad [t_3, t_4]$$

por medio de números t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 con

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b$$

(la numeración de los subíndices empieza por 0 de modo que el subíndice más grande será igual al número de subintervalos).

Sobre el primer intervalo $[t_0, t_1]$ la función f tiene el valor mínimo m_1 y el valor máximo M_1; análogamente, sea m_i el valor mínimo y M_i el valor máximo de f sobre el intervalo i-ésimo $[t_{i-1}, t_i]$. La suma

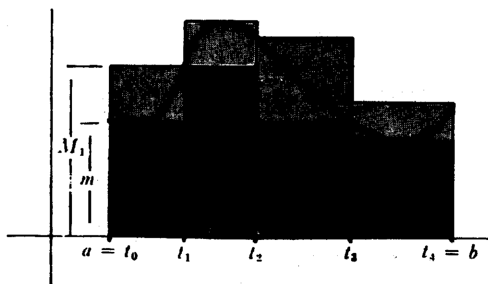


FIGURA 3

$$s = m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + m_3(t_3 - t_2) + m_4(t_4 - t_3)$$

representa el área total de los rectángulos que quedan dentro de la región $R(f, a, b)$, mientras que la suma

$$S = M_1(t_1 - t_0) + M_2(t_2 - t_1) + M_3(t_3 - t_2) + M_4(t_4 - t_3)$$

representa el área total de los rectángulos que contienen la región $R(f, a, b)$. El principio que nos va a guiar en nuestro intento de definir el área A de $R(f, a, b)$ será la observación de que A debe satisfacer

$$s \leq A \quad \text{y} \quad A \leq S,$$

y que esto debe ser verdad, *cualquiera que sea la división que se haga del intervalo* $[a, b]$. Es de esperar que estas condiciones determinen A. En las definiciones siguientes empezamos a formalizar estos comentarios y a eliminar algunas de las suposiciones implícitas contenidas en los mismos.

DEFINICIÓN

Sea $a < b$. Recibe el nombre de **partición** del intervalo $[a, b]$ toda colección finita de puntos de $[a, b]$, de los cuales uno es a y otro es b.

Los puntos de una partición pueden ser numerados $t_0, \ldots, t_n$ de manera que

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b;$$

supondremos siempre que se ha dado una numeración de este tipo.

DEFINICIÓN

Supongamos que f es acotada sobre $[a, b]$ y $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$. Sea

$$m_i = \inf \{f(x)\colon t_{i-1} \leq x \leq t_i\},$$
$$M_i = \sup \{f(x)\colon t_{i-1} \leq x \leq t_i\}.$$

La **suma inferior** de f para P, designada por $L(f, P)$, se define poniendo

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

La **suma superior** de f para P, designada por $U(f, P)$, se define poniendo

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Las sumas inferior y superior corresponden a las sumas s y S del ejemplo anterior; se supone que representan las áreas totales de los rectángulos que quedan por debajo y por encima de la gráfica de f. Obsérvese, sin embargo, que, a pesar de la motivación geométrica, estas sumas han sido definidas sin recurrir al concepto de «área».

Hay dos detalles de esta definición que merecen un comentario. La condición de que f esté acotada sobre $[a, b]$ es esencial para que los m_i y M_i queden definidos. Obsérvese también que fue necesario definir los números m_i y M_i como ínfimos y supremos, en vez de como mínimos y máximos, ya que no se exigió que f fuese continua.

Una cosa es evidente en relación con las sumas inferiores y superiores: Si P es una partición cualquiera, entonces

$$L(f, P) \leq U(f, P),$$

puesto que

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}),$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}),$$

* Las letras L y U corresponden a las iniciales de las palabras inglesas Lower (inferior) y Upper (superior) respectivamente. (Nota del traductor.)

y para cada i tenemos

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Por otra parte, *debería* cumplirse otra cosa menos evidente: Si P_1 y P_2 son dos particiones *cualesquiera* de $[a, b]$, entonces debería darse el caso de que

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2),$$

puesto que $L(f, P_1)$ debería ser $\leq$ área $R(f, a, b)$, y $U(f, P_2)$ debería ser $\geq$ área $R(f, a, b)$. Esta observación no demuestra nada (puesto que el «área de $R(f, a, b)$» no ha sido todavía ni siquiera definida), pero sí indica que si hemos de abrigar alguna esperanza de poder definir el área de $R(f, a, b)$, lo primero que hemos de conseguir ha de ser una demostración de que $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$. La demostración que vamos a dar depende de un lema referente al comportamiento de las sumas inferiores y superiores al añadir más puntos a una partición. En la figura 4 la

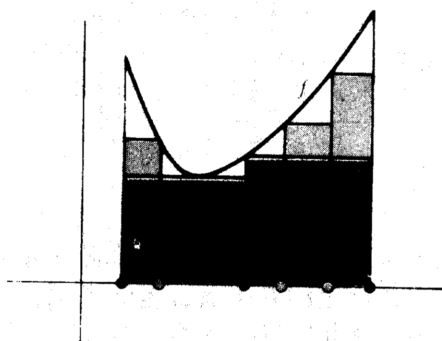


FIGURA 4

partición P contiene los puntos en negro, y Q contiene los puntos en negro y los puntos en gris. La figura indica que los rectángulos correspondientes a la partición Q constituyen una aproximación mejor a la región $R(f, a, b)$ que los correspondientes a la partición original P. Para ser más precisos:

LEMA

Si Q contiene P (es decir, si todos los puntos de P están también en Q), entonces

$$L(f, P) \leq L(f, Q),$$
$$U(f, P) \geq U(f, Q).$$

DEMOSTRACIÓN

Consideremos primero el caso especial (figura 5) en que Q contiene exactamente un punto más que P:

$$P = \{t_0, \ldots, t_n\},$$
$$Q = \{t_0, \ldots, t_{k-1}, u, t_k, \ldots, t_n\},$$

donde

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < u < t_k < \cdots < t_n = b.$$

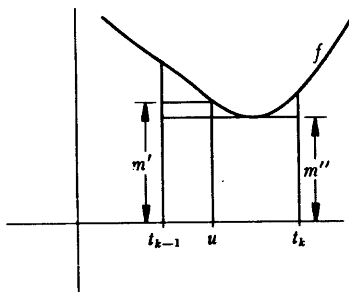


FIGURA 5

Sea

$$m' = \inf \{f(x) \colon t_{k-1} \leq x \leq u\},$$
$$m'' = \inf \{f(x) \colon u \leq x \leq t_k\}.$$

Entonces

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}),$$

$$L(f, Q) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

Para demostrar $L(f, P) \leq L(f, Q)$ basta, por lo tanto, probar que

$$m_k(t_k - t_{k-1}) \leq m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u).$$

Ahora bien, el conjunto $\{f(x)\colon t_{k-1} \leq x \leq t_k\}$ contiene todos los números de $\{f(x)\colon t_{k-1} \leq x \leq u\}$ y posiblemente otros más pequeños, de modo que el ínfimo del primer conjunto es *menor o igual* que el ínfimo del segundo; así pues

$$m_k \leq m'.$$

Análogamente,

$$m_k \leq m''.$$

Por lo tanto,

$$m_k(t_k - t_{k-1}) = m_k(u - t_{k-1}) + m_k(t_k - u) \leq m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u).$$

Esto demuestra, en este caso especial, que $L(f, P) \leq L(f, Q)$. La demostración de $U(f, P) \geq U(f, Q)$ es análoga y se deja para el lector como ejercicio fácil, pero importante.

El caso general puede ahora deducirse fácilmente. La partición Q puede obtenerse a partir de P añadiendo un punto cada vez; en otras palabras, existe una sucesión de particiones

$$P = P_1, P_2, \ldots, P_\alpha = Q$$

tales que P_{j+1} contiene exactamente un punto más que P_j. Entonces

$$L(f, P) = L(f, P_1) \leq L(f, P_2) \leq \cdots \leq L(f, P_\alpha) = L(f, Q),$$

y

$$U(f, P) = U(f, P_1) \geq U(f, P_2) \geq \cdots \geq U(f, P_\alpha) = U(f, Q). \blacksquare$$

El teorema que queremos demostrar es una consecuencia sencilla de este lema.

TEOREMA 1

Sean P_1 y P_2 particiones de $[a, b]$, y sea f una función acotada sobre $[a, b]$. Entonces

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2).$$

DEMOSTRACIÓN

Existe una partición P que contiene a la vez a P_1 y P_2 (P puede ser la que consiste en los puntos de P_1 y P_2). Según el lema,

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2). \blacksquare$$

Del teorema 1 se sigue que cualquier suma superior $U(f, P')$ es una cota superior para el conjunto de todas las sumas inferiores $L(f, P)$. En consecuencia, cualquier suma superior $U(f, P')$ es mayor o igual que la cota superior *mínima* de todas las sumas inferiores:

$$\sup \{L(f, P): P \text{ es una partición de } [a, b]\} \leq U(f, P'),$$

para todo P'. Esto significa a su vez que $\sup \{L(f, P)\}$ es una cota inferior para el conjunto de todas las sumas superiores de f. En consecuencia,

$$\sup \{L(f, P)\} \leq \inf \{U(f, P)\}.$$

Está claro que tanto uno como otro de estos números están entre la suma inferior y la suma superior de f para *todas* las particiones:

$$L(f, P') \leq \sup \{L(f, P)\} \leq U(f, P'),$$
$$L(f, P') \leq \inf \{U(f, P)\} \leq U(f, P'),$$

para todas las particiones P'.

Puede ocurrir muy bien que

$$\sup \{L(f, P)\} = \inf \{U(f, P\};$$

en este caso, éste es el *único* número entre la suma inferior y la suma superior de f para todas las particiones, y este número es en consecuencia un candidato ideal para el área de $R(f, a, b)$. Por otra parte, si

$$\sup \{L(f, P)\} < \inf \{U(f, P)\},$$

entonces todo número x comprendido entre sup $\{L(f, P)\}$ e inf $\{U(f, P)\}$ satisfará

$$L(f, P') \leq x \leq U(f, P')$$

para todas las particiones P'.

Dista mucho de estar claro cuáles son precisamente los casos en que tal confusiva superabundancia se presentará. Los siguientes dos ejemplos, aunque no tan interesantes como muchos que aparecerán pronto, hacen ver que son posibles los dos fenómenos.

Supongamos en primer lugar que $f(x) = c$ para todo x de $[a, b]$ (figura 6). Si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición cualquiera de $[a, b]$, entonces

$$m_i = M_i = c,$$

de manera que

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c(b - a),$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c(b - a).$$

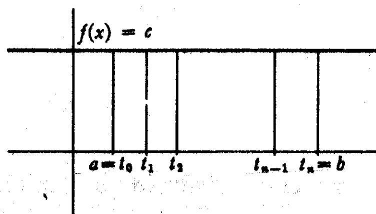


FIGURA 6

En este caso todas las sumas inferiores y las sumas superiores son iguales, y

$$\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\} = c(b - a).$$

Consideremos ahora (figura 7) la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1, & x \text{ racional.} \end{cases}$$

Si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición cualquiera, entonces

$m_i = 0$, puesto que existe un número irracional en $[t_{i-1}, t_i]$,

y

$M_i = 1$, puesto que existe un número racional en $[t_{i-1}, t_i]$.

Por lo tanto,

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (t_i - t_{i-1}) = 0,$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (t_i - t_{i-1}) = b - a.$$

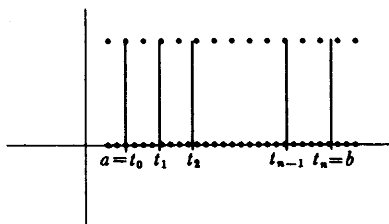


FIGURA 7

Así, pues, en este caso ciertamente *no* es verdad que sup $\{L(f, P)\} = \inf \{U(f, P)\}$. El principio sobre el cual se tuvo que basar la definición de área no nos suministra una información suficiente para determinar un área específica $R(f, a, b)$; cualquier número entre 0 y $b - a$ parece ir igual de bien. Por otra parte, la región $R(f, a, b)$ es tan extraña que estamos justificados a renunciar a asignarle un área. De hecho, podemos afirmar, con más generalidad, que siempre que

$$\sup \{L(f, P)\} \neq \inf \{U(f, P)\},$$

la región $R(f, a, b)$ es demasiado irrazonable para merecer que se le asigne un área. Como parece desprenderse de nuestro recurso a la palabra «irrazonable», nos disponemos a vestir nuestra ignorancia con una terminología.

DEFINICIÓN

Una función f acotada sobre $[a, b]$ es **integrable** sobre $[a, b]$ si

$$\sup \{L(f, P): P \text{ es una partición de } [a, b]\} = \\ = \inf \{U(f, P): P \text{ es una partición de } [a, b]\}.$$

En este caso, este número común recibe el nombre de **integral** de f sobre $[a, b]$ y se denota por

$$\int_a^b f.$$

(El símbolo $\int$ recibe el nombre de *signo integral* y en su origen era una s alargada, por «suma»; los números a y b reciben el nombre de *límites de integración inferior y superior.*) La integral $\int_a^b f$ recibe el nombre de **área** de $R(f, a, b)$ cuando $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$.

Si f es integrable, entonces según esta definición,

$$L(f, P) \leq \int_a^b f \leq U(f, P) \text{ para todas las particiones } P \text{ de } [a, b].$$

Además $\int_a^b f$ es el *único* número con esta propiedad.

Esta definición únicamente prepara, pero no resuelve, el problema planteado antes: no sabemos cuáles funciones son integrables (ni tampoco sabemos cómo hallar la integral de f sobre $[a, b]$ cuando f *es* integrable). De momento conocemos solamente dos ejemplos:

(1) si $f(x) = c$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$ y $\int_a^b f = c \cdot (b - a)$.

(Obsérvese que esta integral asigna al rectángulo el área sabida.)

(2) si $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1, & x \text{ racional}, \end{cases}$ entonces f no es integrable sobre $[a, b]$.

Daremos algunos ejemplos más antes de proseguir en el estudio de estos problemas. Sin embargo, incluso para estos ejemplos, resulta conveniente tener explícitamente expresado el siguiente criterio sencillo de integrabilidad.

TEOREMA 2

Si f está acotada sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN

Supongamos en primer lugar que para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P con

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Al ser

$$\begin{aligned} \inf\{U(f, P')\} &\leq U(f, P), \\ \sup\{L(f, P')\} &\geq L(f, P), \end{aligned}$$

se sigue que

$$\inf\{U(f, P')\} - \sup\{L(f, P')\} < \varepsilon.$$

Puesto que esto se cumple para todo $\varepsilon > 0$, se sigue que

$$\sup\{L(f, P')\} = \inf\{U(f, P')\};$$

por definición, f es, pues, integrable. La demostración del enunciado inverso es parecida. Si f es integrable, entonces

$$\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\}.$$

Esto significa que para todo $\varepsilon > 0$ existen particiones P', P'' con

$$U(f, P'') - L(f, P') < \varepsilon.$$

Sea P una partición que contiene a la vez P' y P''. Entonces, según el lema,

$$U(f, P) \leq U(f, P''),$$
$$L(f, P) \geq L(f, P');$$

en consecuencia,

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f, P'') - L(f, P') < \varepsilon. \blacksquare$$

Aunque la mecánica de la demostración ocupa poco espacio, conviene que quede claro que el teorema 2 equivale solamente a expresar de otro modo la definición de integrabilidad. Sin embargo se trata de una expresión muy conveniente puesto que en ella no se mencionan los supremos y los ínfimos, que muchas veces son difíciles de manejar. El próximo ejemplo ilustra este punto y sirve también como una buena introducción al tipo de razonamiento requerido por la complicada definición de integral, incluso en situaciones muy sencillas.

Sea f definido sobre [0, 2] por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Supóngase que $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de [0, 2] con

$$t_{j-1} < 1 < t_j$$

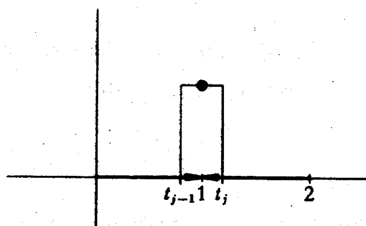


FIGURA 8

(véase la figura 8). Entonces

$$m_i = M_i = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j,$$

pero

$$m_j = 0 \quad \text{y} \quad M_j = 1.$$

Puesto que

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{j-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_j(t_j - t_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}),$$
$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{j-1} M_i(t_i - t_{i-1}) + M_j(t_j - t_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}),$$

tenemos

$$U(f, P) - L(f, P) = t_j - t_{j-1}.$$

Esto indica ciertamente que f es integrable; para obtener una partición P con

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon,$$

hace falta solamente elegir una partición con

$$t_{j-1} < 1 < t_j \quad \text{y} \quad t_j - t_{j-1} < \varepsilon.$$

Además, está claro que

$$L(f, P) \leq 0 \leq U(f, P) \text{ para todas las particiones } P.$$

Puesto que f es integrable, existe solamente *un* número entre todas las sumas inferiores y superiores, a saber, la integral de f, de modo que

$$\int_0^2 f = 0.$$

Aunque la discontinuidad de f fue la responsable de las dificultades de este ejemplo, surgen problemas incluso peores para funciones continuas muy sencillas. Por ejemplo, sea $f(x) = x$, y para mayor sencillez consideremos un intervalo $[0, b]$, donde $b > 0$. Si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[0, b]$, entonces (figura 9)

$$m_i = t_{i-1} \quad \text{y} \quad M_i = t_i$$

y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} t_{i-1}(t_i - t_{i-1}) \\
&= t_0(t_1 - t_0) + t_1(t_2 - t_1) + \cdots + t_{n-1}(t_n - t_{n-1}), \\
U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} t_i(t_i - t_{i-1}) \\
&= t_1(t_1 - t_0) + t_2(t_2 - t_1) + \cdots + t_n(t_n - t_{n-1}).
\end{aligned}
$$

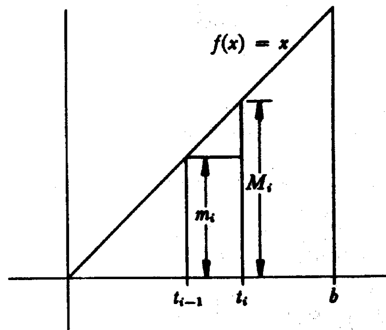


FIGURA 9

Ninguna de estas fórmulas es particularmente llamativa, pero las dos se simplifican considerablemente para particiones $P_n = \{t_0, \ldots, t_n\}$ en n subintervalos *iguales*. En este caso, la longitud $t_i - t_{i-1}$ de cada intervalo es b/n, de modo que

$$
\begin{aligned}
t_0 &= 0, \\
t_1 &= \frac{b}{n}, \\
t_2 &= \frac{2b}{n}, \text{ etc;}
\end{aligned}
$$

en general,

$$t_i = \frac{ib}{n}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} t_{i-1}(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{(i-1)b}{n}\right\} \cdot \frac{b}{n} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} (i-1)\right] \frac{b^2}{n^2} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} j\right) \frac{b^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Recordando la fórmula

$$1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

esto puede escribirse

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \frac{(n-1)(n)}{2} \cdot \frac{b^2}{n^2} \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{b^2}{2}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} t_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{ib}{n} \cdot \frac{b}{n} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{b^2}{n^2} \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{b^2}{2}. \end{aligned}$$

Si n es muy grande, tanto $L(f, P_n)$ como $U(f, P_n)$ están próximos a $b^2/2$, y esta

observación facilita la demostración de que f es integrable. Obsérvese en primer lugar que

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{2}{n} \cdot \frac{b^2}{2}.$$

Esto demuestra que existen particiones P_n con $U(f, P_n) - L(f, P_n)$ tan pequeño como se quiera. Según el teorema 2, la función f es integrable. Además, $\int_0^b f$ puede hallarse ahora con poco trabajo. Primero de todo, es evidente que

$$L(f, P_n) \leq \frac{b^2}{2} \leq U(f, P_n) \quad \text{para todo } n$$

Esta desigualdad demuestra que $b^2/2$ queda entre ciertas sumas superiores e inferiores especiales, pero acabamos de ver que $U(f, P_n) - L(f, P_n)$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, de modo que existe *solamente un* número con esta propiedad. Puesto que la integral posee ciertamente esta propiedad, podemos concluir que

$$\int_0^b f = \frac{b^2}{2}.$$

Obsérvese que esta ecuación asigna el área $b^2/2$ a un triángulo rectángulo de base y altura b (figura 10). Mediante cálculos más complicados, o recurriendo al teorema 4, puede demostrarse que

$$\int_a^b f = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

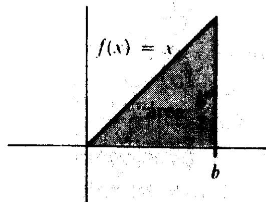


FIGURA 10

La función $f(x) = x^2$ presenta dificultades aún mayores. En este caso (figura 11), si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[0, b]$, entonces

$$m_i = f(t_{i-1}) = (t_{i-1})^2 \quad \text{y} \quad M_i = f(t_i) = t_i^2.$$

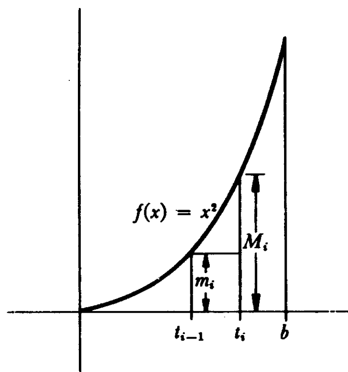


FIGURA 11

Eligiendo una vez más una partición $P_n = \{t_0, \ldots, t_n\}$ en n partes iguales, de manera que

$$t_i = \frac{i \cdot b}{n},$$

las sumas inferiores y superiores se convierten en

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1})^2 \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n} \\ &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} j^2, \end{aligned}$$

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \cdot (t_i - t_{i-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n}$$
$$= \frac{b^3}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2$$

Recordando la fórmula

$$1^2 + \cdots + k^2 = \tfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

del problema 2-1, estas sumas pueden escribirse poniendo

$$L(f, P_n) = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6}(n-1)(n)(2n-1),$$
$$U(f, P_n) = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

No es muy difícil demostrar que

$$L(f, P_n) \leq \frac{b^3}{3} \leq U(f, P_n),$$

y que $U(f, P_n) - L(f, P_n)$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, eligiendo n suficientemente grande. Un razonamiento del mismo tipo que antes demuestra entonces que

$$\int_0^b f = \frac{b^3}{3}.$$

Este cálculo representa ya un resultado no trivial: el área de la región limitada por una parábola no se obtiene por lo general en geometría elemental. Sin embargo, el resultado era conocido por Arquímedes, quien lo dedujo esencialmente de la misma manera. La única superioridad que podemos pretender es que en el próximo capítulo descubriremos una manera mucho más simple de llegar a este resultado.

Algunas de nuestras investigaciones pueden resumirse como sigue:

$$\int_a^b f = c \cdot (b - a) \quad \text{si} \quad f(x) = c \quad \text{para todo } x.$$

$$\int_a^b f = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad \text{si} \quad f(x) = x \quad \text{para todo } x,$$

$$\int_a^b f = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \quad \text{si} \quad f(x) = x^2 \text{ para todo } x,$$

Esta lista revela ya que la notación $\int_a^b f$ adolece de falta de notación conveniente para designar a funciones definidas mediante fórmulas. Por esta razón resulta también útil otra notación,* análoga a la notación $\lim_{x \to a} f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{significa precisamente lo mismo que} \quad \int_a^b f.$$

Así pues,

$$\int_a^b c\, dx = c \cdot (b - a),$$

$$\int_a^b x\, dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2},$$

$$\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Obsérvese que, lo mismo que en la notación $\lim_{x \to a} f(x)$, el símbolo x puede sustituirse por otra letra cualquiera (con excepción, por supuesto, de f, a o b):

* La notación $\int_a^b f(x)$ es en realidad la más antigua, y durante muchos años fue el símbolo único para la integral. Leibniz utilizó este símbolo porque consideraba a la integral como la suma (designada por $\int$) de infinitos rectángulos de altura $f(x)$ y anchura dx «infinitamente pequeña». Autores posteriores utilizaron $x_0, \ldots, x_n$ para designar los puntos de una partición, y abreviaron $x_i - x_{i-1}$ por Δx_i. La integral se definió como el límite cuando Δx_i tendía a 0 de las sumas $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x_i$ (análogas a las sumas inferiores y superiores). El hecho de que el límite se obtenga cambiando Σ por $\int$, $f(x_i)$ por $f(x)$, y Δx_i por dx encanta a muchas personas.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(c)\,dc.$$

El símbolo dx carece de significado aisladamente, del mismo modo que tampoco tiene significado el símbolo $x \rightarrow$, excepto en el contexto $\lim_{x \to a} f(x)$. En la ecuación

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3},$$

el símbolo $x^2\,dx$ *entero* puede ser considerado como una abreviación para:

la función f tal que $f(x) = x^2$ para todo x.

Esta notación para la integral es tan flexible como la notación $\lim_{x \to a} f(x)$. Varios ejemplos pueden ayudar en la interpretación de varios tipos de fórmulas que aparecen con frecuencia; hemos utilizado los teoremas 5 y 6.*

(1) $$\int_a^b (x + y)\,dx = \int_a^b x\,dx + \int_a^b y\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + y(b - a)$$

(2) $$\int_a^x (y + t)\,dy = \int_a^x y\,dy + \int_a^x t\,dy = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} + t(x - a).$$

(3) $$\begin{aligned}\int_a^b \left(\int_a^x (1 + t)\,dz\right) dx &= \int_a^b (1 + t)(x - a)\,dx \\ &= (1 + t)\int_a^b (x - a)\,dx \\ &= (1 + t)\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - a(b - a)\right].\end{aligned}$$

* Para que la confusión no se apodere del lector cuando lea otros libros, la ecuación (1) requiere que hagamos una importante salvedad. Esta ecuación interpreta $\int_a^b y\,dx$ como la integral de la función f tal que cada valor $f(x)$ es el número y. Pero la notación clásica con frecuencia utiliza y por $y(x)$, de modo que $\int_a^b y\,dx$ podría significar la integral de alguna *función* arbitraria y.

$$(4)\quad \int_a^b \left(\int_c^d (x+y)\,dy\right) dx = \int_a^b \left[x(d-c) + \frac{d^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right] dx$$
$$= \left(\frac{d^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right)(b-a) + (d-c)\int_a^b x\,dx$$
$$= \left(\frac{d^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right)(b-a) + (d-c)\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right).$$

Los cálculos de $\int_a^b x\,dx$ y $\int_a^b x^2\,dx$ pueden hacer creer que el cálculo de integrales es generalmente difícil o imposible. De hecho, las integrales de la mayor parte de las funciones *son* imposibles de determinar con exactitud *(aunque pueden determinarse con tanta precisión como se quiera mediante el cálculo de sumas inferiores y superiores)*. Sin embargo, como veremos en el próximo capítulo, la integral de muchas funciones puede calcularse muy fácilmente.

Aun cuando la mayor parte de las integrales no puedan ser calculadas exactamente, es importante saber por lo menos cuándo una función f es integrable sobre $[a, b]$. Aunque es posible decir con precisión qué funciones son integrables, el criterio de integrabilidad es un poco demasiado difícil para ser expuesto aquí y tendremos que conformarnos con resultados parciales. El teorema que sigue proporciona el resultado más útil, pero la demostración que aquí se da utiliza material del apéndice al capítulo 8. El lector que así lo prefiera puede esperar hasta el final del próximo capítulo donde se da una demostración completamente distinta.

TEOREMA 3

Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN

Obsérvese que por ser f continua en $[a, b]$, f es acotada en $[a, b]$. Para demostrar que f es integrable en $[a, b]$ tendremos que utilizar el teorema 2 y demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Por el teorema 1 del apéndice al capítulo 8 sabemos ahora que f es uniformemente continua en $[a, b]$. Así pues, existe un $\delta > 0$ tal que para todos los x e y de $[a, b]$,

$$\text{si } |x-y| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

La idea consiste sencillamente en elegir una partición $P = \{t_0, ..., t_n\}$ tal que se cumpla $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ para $i = 1, ..., n$. Se tiene entonces para todo i

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{para todos los } x, y \text{ de } [t_{i-1}, t_i],$$

y fácilmente se sigue que

$$M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Al cumplirse esto para todo i, tenemos entonces

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} t_i - t_{i-1} \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot b - a \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos. ▮

Aunque este teorema va a suministrar toda la información necesaria para el uso de integrales en este libro, resulta más satisfactorio disponer de un surtido algo más amplio de funciones integrables. Varios problemas tratan con detalle de esta cuestión. Será conveniente conocer los tres teoremas siguientes, que demuestran que f es integrable sobre $[a, b]$, si es integrable sobre $[a, c]$ y $[c, b]$; que $f + g$ es integrable si f y g lo son; y que $c \cdot f$ es integrable si f es integrable y c es un número cualquiera.

Como aplicación sencilla de estos teoremas, recuérdese que si f es 0 excepto en un punto, en el cual su valor es 1, entonces f es integrable. Multiplicando esta función por c se sigue que se cumple lo mismo si el valor de f en el punto excepcional es c. Sumando una tal función a una función integrable, vemos que el valor de una función integrable puede cambiarse arbitrariamente en un punto sin destruir la integrabilidad. Descomponiendo el intervalo en muchos subintervalos, vemos que el valor puede ser alterado en un número finito de puntos.

Las demostraciones de estos teoremas utilizan por lo general el segundo criterio de integrabilidad del teorema 2; según ilustran algunas de nuestras demostraciones anteriores, los detalles del razonamiento contribuyen a menudo a oscu-

recer la demostración. Sería muy conveniente que el lector intentara por sí mismo las demostraciones, consultando las que aquí se dan como último recurso o como comprobación. Esto probablemente dará claridad a las demostraciones y será de seguro una buena práctica en las técnicas utilizadas en algunos de los problemas.

TEOREMA 4

Sea $a < c < b$. Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, c]$ y $[c, b]$. Recíprocamente, si f es integrable sobre $[a, c]$ y sobre $[c, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$. Finalmente, si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

DEMOSTRACIÓN

Supóngase que f es integrable sobre $[a, b]$. Si $\varepsilon > 0$, existe una partición $P = \{t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

No hay inconveniente en suponer que $c = t_j$ para algún j. (En otro caso, sea Q la partición que contiene $t_0, \ldots, t_n$ y c; entonces Q contiene P, de modo que $U(f, Q) - L(f, Q) \leq U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.)

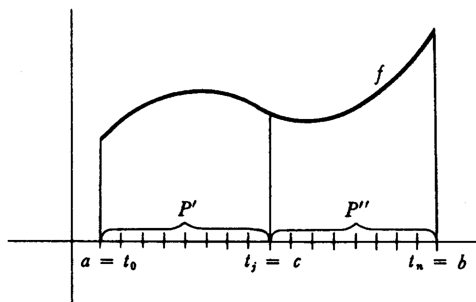


FIGURA 12

Ahora bien, $P' = \{t_0, \ldots, t_j\}$ es una partición de $[a, c]$ y $P'' = \{t_j, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[c, b]$ (figura 12). Puesto que

$$L(f, P) = L(f, P') + L(f, P''),$$
$$U(f, P) = U(f, P') + U(f, P''),$$

tenemos

$$[U(f, P') - L(f, P')] + [U(f, P'') - L(f, P'')] = U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Al no ser negativo cada uno de los términos entre corchetes, cada uno de ellos es menor que ε. Esto indica que f es integrable sobre $[a, c]$ y $[c, b]$. Obsérvese también que

$$L(f, P') \leq \int_a^c f \leq U(f, P'),$$
$$L(f, P'') \leq \int_c^b f \leq U(f, P''),$$

de modo que

$$L(f, P) \leq \int_a^b f + \int_b^c f \leq U(f, P).$$

Puesto que esto se cumple para cualquier P, queda demostrado que

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

Supongamos ahora que f sea integrable sobre $[a, c]$ y sobre $[c, b]$. Si $\varepsilon > 0$, existe una partición P' de $[a, c]$ y una partición P'' de $[c, b]$ tal que

$$U(f, P') - L(f, P') < \varepsilon/2,$$
$$U(f, P'') - L(f, P'') < \varepsilon/2.$$

Si P es la partición de $[a, b]$ que contiene todos los puntos de P' y de P'', entonces

$$L(f, P) = L(f, P') + L(f, P'');$$
$$U(f, P) = U(f, P') + U(f, P'');$$

en consecuencia,

$$U(f, P) - L(f, P) = [U(f, P') - L(f, P')] + [U(f, P'') - L(f, P'')] < \varepsilon. \blacksquare$$

El teorema 4 constituye la base para algunas convenciones de notación. La integral $\int_a^b f$ fue definida solamente para $a < b$. Añadamos ahora las definiciones

$$\int_a^a f = 0 \quad \text{y} \quad \int_a^b f = -\int_b^a f \quad \text{si } a > b.$$

Con estas definiciones, la ecuación $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$ se cumple para todo a, c, b incluso si no se cumple $a < c < b$ (la demostración de este aserto es una comprobación bastante prolija caso por caso).

TEOREMA 5

Si f y g son integrables sobre $[a, b]$ entonces $f + g$ es integrable sobre $[a, b]$ y

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición cualquiera de $[a, b]$. Sea

$$\begin{aligned} m_i &= \inf \{(f+g)(x): t_{i-1} \leq x \leq t_i\}, \\ m_i' &= \inf \{f(x): t_{i-1} \leq x \leq t_i\}, \\ m_i'' &= \inf \{g(x): t_{i-1} \leq x \leq t_i\}, \end{aligned}$$

y definamos M_i, M_i', M_i'' análogamente. No se cumple necesariamente que

$$m_i = m_i' + m_i'',$$

pero si se cumple (problema 10) que

$$m_i \geq m_i' + m_i''.$$

Análogamente,

$$M_i \leq M_i' + M_i''.$$

Por lo tanto,

$$L(f, P) + L(g, P) \leq L(f+g, P)$$

y

$$U(f+g, P) \leq U(f, P) + U(g, P).$$

Así pues,

$$L(f, P) + L(g, P) \leq L(f + g, P) \leq U(f + g, P) \leq U(f, P) + U(g, P).$$

Puesto que f y g son integrables, existen particiones P', P'' con

$$U(f, P') - L(f, P') < \varepsilon/2,$$
$$U(g, P'') - L(g, P'') < \varepsilon/2.$$

Si P contiene a la vez a P' y a P'', entonces

$$U(f, P) + U(g, P) - [L(f, P) + L(g, P)] < \varepsilon,$$

y en consecuencia

$$U(f + g, P) - L(f + g, P) < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $f + g$ es integrable sobre $[a, b]$. Además,

$$\begin{aligned}(1) \quad L(f, P) + L(g, P) &\leq L(f + g, P)\\ &\leq \int_a^b (f + g)\\ &\leq U(f + g, P) \leq U(f, P) + U(g, P);\end{aligned}$$

y también

$$(2) \quad L(f, P) + L(g, P) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq U(f, P) + U(g, P).$$

Puesto que $U(f, P) - L(f, P)$ y $U(g, P) - L(g, P)$ pueden hacerse tan pequeñas como se quiera, se sigue que

$$U(f, P) + U(g, P) - [L(f, P) + L(g, P)]$$

puede también hacerse tan pequeño como se quiera; se sigue por lo tanto de (1) y de (2) que

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \blacksquare$$

TEOREMA 6

Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces para cualquier número c, la función cf es integrable sobre $[a, b]$ y

$$\int_a^b cf = c \cdot \int_a^b f.$$

DEMOSTRACIÓN

La demostración (mucho más fácil que la del teorema 5) se deja para el lector. Conviene tratar por separado los casos $c \geq 0$ y $c \leq 0$. ¿Por qué? ▮

(El teorema 6 no es sino un caso particular del teorema más general que dice que $f \cdot g$ es integrable sobre $[a, b]$, si f y g lo son, pero este resultado es bastante difícil de demostrar (véase el problema 39).)

En este capítulo solamente hemos incorporado una definición complicada, unos pocos teoremas sencillos con demostraciones complicadas, y un teorema que requería material del apéndice al capítulo 8. Esto no se debe a que las integrales constituyan un tema más complicado que las derivadas, sino a que hemos dejado permanecer inactivos los poderosos instrumentos desarrollados en capítulos anteriores. El descubrimiento más importante del cálculo infinitesimal es el hecho de que la integral y la derivada están íntimamente relacionadas y una vez que aprendamos la conexión entre ellas, la integral pasará a ser tan útil como la derivada y de uso igualmente fácil que ésta. La conexión entre derivadas e integrales merece capítulo aparte, pero los preparativos que haremos en este capítulo pueden servir de indicación. Establecemos primero una desigualdad sencilla relativa a integrales, que interviene en muchos teoremas importantes.

TEOREMA 7

Supóngase f integrable sobre $[a, b]$ y que

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{para todo } x \text{ de } [a, b]$$

Entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

DEMOSTRACIÓN

Está claro que

$$m(b-a) \leq L(f, P) \quad \text{y} \quad U(f, P) \leq M(b-a)$$

para toda partición P. Puesto que $\int_a^b f = \sup \{M(f, P)\} = \inf \{U(f, P)\}$, la desigualdad deseada se sigue inmediatamente. ▮

Supongamos ahora que f es integrable sobre $[a, b]$. Podemos definir una nueva función F sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)\, dt.$$

(Esto depende del teorema 4.) Hemos visto que f puede ser integrable incluso no siendo continua, y en los problemas se dan ejemplos de funciones integrables que son completamente patológicas. El comportamiento de F es, por lo tanto, una sorpresa muy agradable.

TEOREMA 8

Si f es integrable sobre $[a, b]$ y F está definida sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f,$$

entonces F es continua sobre $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que c está en $[a, b]$. Al ser f integrable sobre $[a, b]$ está, por definición, acotada sobre $[a, b]$; sea M un número tal que

$$|f(x)| \leq M \quad \text{para todo } x \text{ de } [a, b].$$

Si $h > 0$, entonces (figura 13)

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f = \int_c^{c+h} f.$$

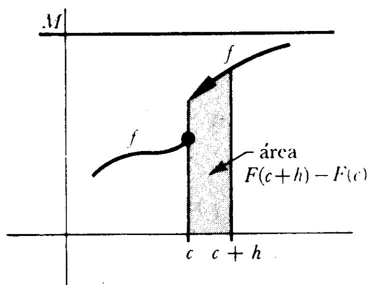


FIGURA 13

Puesto que

$$-M \leq f(x) \leq M \quad \text{para todo } x,$$

se sigue del teorema 7 que

$$-M \cdot h \leq \int_{c}^{c+h} f \leq Mh;$$

en otras palabras,

$$(1) \quad -M \cdot h \leq F(c+h) - F(c) \leq M \cdot h.$$

Si $h < 0$, puede deducirse una desigualdad semejante. Obsérvese que

$$F(c+h) - F(c) = \int_{c}^{c+h} f = -\int_{c+h}^{c} f.$$

Aplicando el teorema 7 al intervalo $[c+h, c]$, de longitud $-h$, obtenemos

$$Mh \leq \int_{c+h}^{c} f \leq -Mh;$$

multiplicando por -1, lo cual invierte todas las desigualdades, tenemos

$$(2) \quad Mh \leq F(c+h) - F(c) \leq -Mh.$$

Las desigualdades (1) y (2) pueden combinarse:

$$|F(c+h) - F(c)| \leq M \cdot |h|.$$

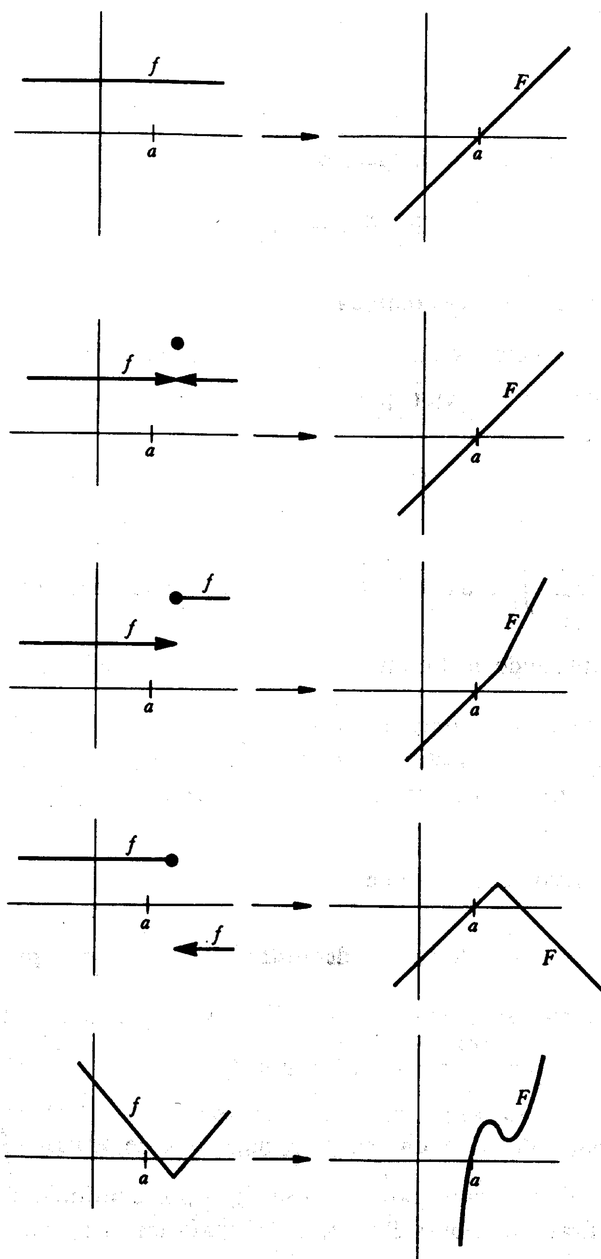


FIGURA 14

Por lo tanto, si $\varepsilon > 0$, tenemos

$$|F(c+h) - F(c)| < \varepsilon,$$

siempre que $|h| < \varepsilon/M$. Esto demuestra que

$$\lim_{h \to 0} F(c+h) = F(c);$$

lo cual quiere decir que F es continua en c. ▌

La figura 14 compara f y $F(x) = \int_a^x f$ para varias funciones f; resulta que F se comporta siempre mucho mejor que f. En el próximo capítulo veremos hasta qué punto esto es verdad.

PROBLEMAS

1. Demostrar que $\int_0^b x^3\,dx = b^4/4$, considerando particiones en n subintervalos iguales y utilizando la fórmula para $\sum_{i=1}^{n} i^3$ hallada en el problema 2-6. Este problema requiere solamente una simple imitación de los cálculos del texto, pero conviene que el lector lo escriba con detalle como demostración formal para asegurarse de que todos los puntos delicados del razonamiento quedan claros.

2. Demostrar, análogamente, que $\int_0^b x^4\,dx = b^5/5$.

***3.** (a) Utilizando el problema 2-7 demostrar que $\sum_{k=1}^{n} k^p/n^{p+1}$ puede aproximarse tanto como se quiera a $1/(p+1)$, eligiendo n suficientemente grande.

(b) Demostrar que $\int_0^b x^p\,dx = b^{p+1}/(p+1)$.

***4.** Este problema describe una manera ingeniosa de hallar $\int_a^b x^p\,dx$ para $0 < a < b$. (El resultado para $a = 0$ se sigue por continuidad.) La idea consiste en utilizar particiones $P = \{t_0, ..., t_n\}$ para las que todas las *razones* $r = t_i/t_{i-1}$ son iguales en vez de particiones para las que son iguales todas las diferencias $t_i - t_{i-1}$.

(a) Demostrar que para una tal partición P tenemos

$$t_i = a \cdot c^{i/n} \text{ siendo } c = \frac{b}{a}.$$

(b) Si $f(x) = x^p$, demostrar, utilizando la fórmula del problema 2-5, que

$$\begin{aligned} U(f, P) &= a^{p+1}(1 - c^{1/n}) \sum_{i=1}^{n} (c^{(p+1)/n})^i \\ &= (a^{p+1} - b^{p+1})c^{(p+1)/n} \frac{1 - c^{-1/n}}{1 - c^{(p+1)/n}}. \\ &= (b^{p+1} - a^{p+1})c^{p/n} \cdot \frac{1}{1 + c^{1/n} + \cdots + c^{p/n}} \end{aligned}$$

y hallar una fórmula análoga para $L(f, P)$.

(c) Concluir que

$$\int_a^b x^p \, dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p + 1}.$$

5. Obtener sin cálculos

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1 - x^2}\, dx.$

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^5 + 3)\sqrt{1 - x^2}\, dx.$

6. Demostrar que

$$\int_0^x \frac{\text{sen } t}{t + 1} \, dt > 0$$

para todos los $x > 0$.

7. Decidir cuáles de las siguientes funciones siguientes son integrables sobre [0, 2], y calcular la integral cuando sea posible.

(i) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ x - 2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 2, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(iii) $f(x) = x + [x]$.

(iv) $f(x) = \begin{cases} x + [x], & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional.} \end{cases}$

(v) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es de la forma } a+b\sqrt{2} \text{ para } a \text{ y } b \text{ racionales} \\ 0, & \text{si } x \text{ no es de esta forma.} \end{cases}$

(vi) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \text{ o } x > 1. \end{cases}$

(vii) f es la función indicada en la figura 15.

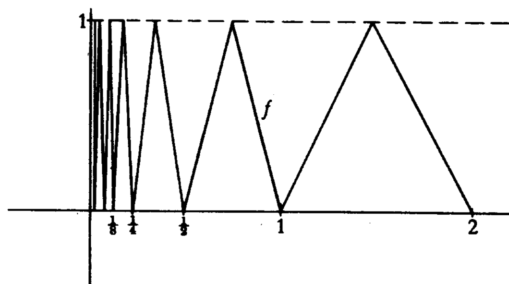


FIGURA 15

8. Hallar las áreas de las regiones limitadas por

(i) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2$.

(ii) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$ y las verticales por $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

(iii) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 1 - x^2$.

(iv) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 1 - x^2$ y $h(x) = 2$.

(v) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x + 4$ y el eje vertical.

(vi) La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, el eje horizontal, y la vertical por $(2, 0)$. (No intente el lector hallar $\int_0^2 \sqrt{x}\,dx$; debería darse cuenta de la manera de adivinar la respuesta utilizando sólo integrales que ya sabe calcular. Las cuestiones que debe sugerir este ejemplo son consideradas en el problema 22).

9. Hallar

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)\, dy \right) dx$$

en términos de $\int_a^b f$ y $\int_c^d g$. (Este problema es eminentemente un ejercicio de notación; es importantísimo que el lector sepa reconocer una constante cuando aparezca).

10. Demostrar, utilizando la notación del teorema 5, que

$$m_i' + m_i'' = \inf \{f(x_1) + g(x_2)\colon t_{i-1} \leq x_1, x_2 \leq t_i\} \leq m_i.$$

11. (a) ¿Qué funciones tienen la propiedad de que toda suma inferior es igual a toda suma superior?
 (b) ¿Qué funciones tienen la propiedad de que alguna suma superior es igual a alguna suma inferior (distinta)?
 (c) ¿Qué funciones continuas tienen la propiedad de que todas las sumas inferiores son iguales?
 *(d) ¿Qué funciones integrables tienen la propiedad de que todas las sumas inferiores son iguales? [Recuérdese que una de estas funciones es $f(x) = 0$ para x irracional, $f(x) = 1/q$ para $x = p/q$ fracción irreducible.] Indicación: Hará falta el concepto de conjunto denso, introducido en el problema 8-6, así como los resultados del problema 31.

12. Dado un intervalo cerrado $[a, b]$, sea P_n la partición de $[a, b]$ en n intervalos iguales.
 (a) Utilizando el teorema 1 del apéndice al capítulo 8 demostrar que si f es continua en $[a, b]$, entonces $U(f, P_n) - \int_a^b f$ y $\int_a^b f - L(f, P_n)$ se pueden hacer tan pequeños como se quiera tomando n suficientemente grande.
 (b) Hallar una función f, integrable en $[0, 1]$ y un $\varepsilon > 0$ tales que
 $U(f, P_n) - \int_a^b f > \varepsilon$ para todos los n.

13. Si $a < b < c < d$ y f es integrable sobre $[a, d]$, demostrar que f es integrable sobre $[b, c]$. (No hay que trabajar demasiado.)

14. (a) Demostrar que si f es integrable sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$, entonces $\int_a^b f \geq 0$.

(b) Demostrar que si f y g son integrables sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x)$ para todo x de $[a, b]$, entonces $\int_a^b f \geq \int_a^b g$. [Ahora ya no debería hacer falta advertir que si se trabaja mucho en la parte (b) se está perdiendo el tiempo.]

15. Demostrar que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx.$$

(La interpretación geométrica debe hacer esto muy plausible.) Indicación: Toda partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ da origen a una partición $P' = \{t_0 + c, \ldots, t_n + c\}$ de $[a + c, b + c]$ y viceversa.

***16.** Demostrar que

$$\int_1^a \frac{1}{t}\,dt + \int_1^b \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{ab} \frac{1}{t}\,dt.$$

Indicación: Esto puede escribirse $\int_1^a 1/t\,dt = \int_b^{ab} 1/t\,dt$. Toda partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[1, a]$ da origen a una partición $P' = \{bt_0, \ldots, bt_n\}$ de $[b, ab]$, y viceversa.

***17.** Demostrar que

$$\int_{ca}^{cb} f(t)\,dt = c\int_a^b f(ct)\,dt.$$

(Obsérvese que el problema 16 es un caso especial.)

18. Sabiendo que el área encerrada por el círculo unidad, descrito por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ es π, utilizar el problema 17 para demostrar que el área delimitada por la elipse descrita por la ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es πab.

19. Este problema señala otra manera más de calcular $\int_a^b x^n\,dx$; fue utilizada por Cavalieri, uno de los matemáticos que desarrollaron sus trabajos poco antes de la invención del cálculo infinitesimal.

(a) Sea $c_n = \int_0^1 x^n\,dx$. Utilizar el problema 17 para demostrar que

$$\int_0^a x^n\,dx = c_n a^{n+1}.$$

(b) El problema 15 demuestra que

$$\int_0^{2a} x^n\,dx = \int_{-a}^{a} (x+a)^n\,dx.$$

Utilizar esta fórmula para demostrar que

$$2^{n+1}c_n a^{n+1} = 2a^{n+1} \sum_{k \text{ par}} \binom{n}{k} c_k.$$

(c) Utilizar ahora el problema 2-3 para demostrar que $c_n = 1/(n+1)$.

20. Supongamos que f está acotada sobre $[a, b]$ y que f es continua en todo punto de $[a, b]$ con la excepción de x_0 de (a, b). Demostrar que f es integrable sobre $[a, b]$. Indicación: Imítese uno de los ejemplos del texto.

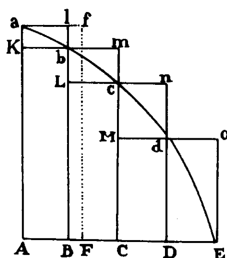
21. Supóngase que f es no decreciente sobre $[a, b]$. Obsérvese que f está automáticamente acotada sobre $[a, b]$, puesto que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para x en $[a, b]$.
(a) Si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$, ¿cómo son $L(f, P)$ y $U(f, P)$?
(b) Supóngase que $t_i - t_{i-1} = \delta$ para todo i. Demostrar que $U(f, P) - L(f, P) = \delta\,[f(b) - f(a)]$.
(c) Demostrar que f es integrable.
(d) Dar un ejemplo de función no decreciente sobre $[0, 1]$ que sea discontinua en un número infinito de puntos.

Puede ser de interés comparar este problema con el siguiente extracto de los *Principia* de Newton.*

LEMA II

Si en cualquier figura AacE, *limitada por las rectas* Aa, AE, *y la curva* acE, *se inscribe un número cualquiera de paralelogramos* Ab, Bc, Cd, *etc., comprendidos entre bases iguales* AB, BC, CD, *etc., y los lados,* Bb, Cc, Dd, *etc., paralelos a un lado* Aa *de la figura; y los paralelogramos* aKbl, bLcm, cMdn, *etc., se completan: entonces, si la anchura de estos paralelogramos se supone que disminuye y que su número aumenta* hasta el infinito, *digo que las relaciones últimas en que estarán entre sí la figura inscrita* AKbLcMdD, *la figura circunscrita* AalbmcndoE, *y la figura curvilínea* AabcdE, *serán relaciones de igualdad.*

* *Principia* de Newton, una revisión de la traducción de Mott, por Florian Cajori. University of California Press, Berkeley, California, 1946.



Pues la diferencia entre las figuras inscrita y circunscrita es la suma de los paralelogramos Kl, Lm, Mn, Do, es decir (por la igualdad de todas sus bases), el rectángulo con una de sus bases Kb y como altura la suma de sus alturas Aa, es decir, el rectángulo ABla. Pero este rectángulo, puesto que su anchura AB se supone que disminuye *hasta el infinito,* se hace más pequeño que cualquier espacio dado. Y por lo tanto (según el lema I) las figuras inscrita y circunscrita al final se igualan una a otra; y con mayor razón la figura curvilínea intermedia será al final igual a cualquiera de las dos. Q.E.D.

*22. Supongamos que f es creciente. La figura 16 sugiere que

$$\int_a^b f^{-1} = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f.$$

(a) Si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$, sea $P' = \{f^{-1}(t_0), \ldots, f^{-1}(t_n)\}$. Demostrar que, según sugiere la figura 17,

$$L(f^{-1}, P) + U(f, P') = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a).$$

(b) Demostrar ahora la fórmula enunciada arriba.

(c) Hallar $\int_a^b \sqrt[n]{x}\, dx$ para $0 \leq a < b$.

23. Supóngase que f es una función creciente con $f(0) = 0$. Demostrar que, para $a, b > 0$ tenemos la *desigualdad de Young*,

$$ab \leq \int_0^b f(x)\, dx + \int_0^b f^{-1}(x)\, dx,$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si $b = f(a)$. Ayuda: Trazar una figura como la de la figura 16.

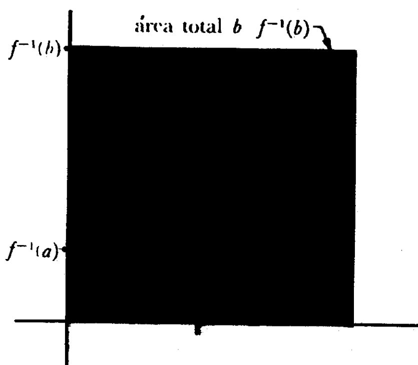


FIGURA 16

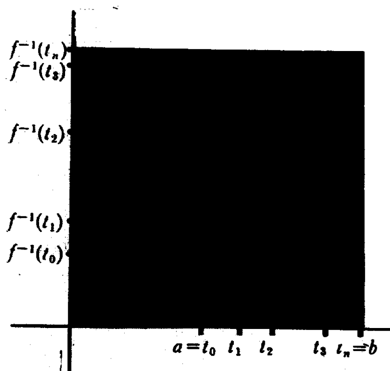


FIGURA 17

24. (a) Demostrar que si f es integrable en $[a, b]$ y $m \leq f(x) \leq M$ para todos los x de $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\mu$$

para un cierto μ con $m \leq \mu \leq M$.

(b) Demostrar que si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)$$

para un cierto ξ de $[a, b]$; hágase ver mediante un ejemplo que la continuidad es esencial.

(c) De un modo más general, supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que g es integrable y no negativa en $[a, b]$. Demostrar que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

para un cierto ξ de $[a, b]$. Este resultado recibe el nombre de Teorema del Valor Medio para Integrales.

(d) Deducir el mismo resultado si g es integrable y no positiva en $[a, b]$.

(e) Demostrar que una de estas dos hipótesis para g es esencial.

25. En este problema consideramos la gráfica de una función en coordenadas polares (capítulo 4, apéndice). La figura 18 muestra un sector circular con ángulo central θ. El área de este sector es $r^2\,\dfrac{\theta}{2}$, cuando se mide θ en radianes

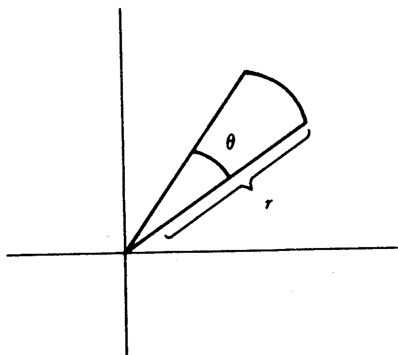


FIGURA 18

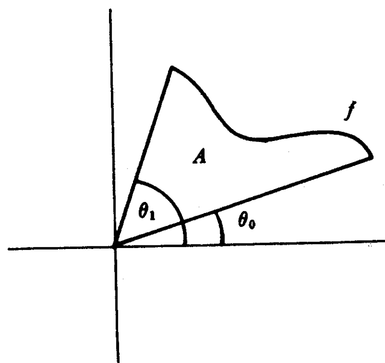


FIGURA 19

(capítulo 15). Consideremos ahora la región A de la figura 19, donde la curva es la gráfica, en coordenadas polares de la función continua f. Demostrar que

$$\text{área } A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)^2\, d\theta.$$

***26.** Sea f una función continua en $[a, b]$. Si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$, definir

$$\ell(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + [f(t_i) - f(t_{i-1})]^2}.$$

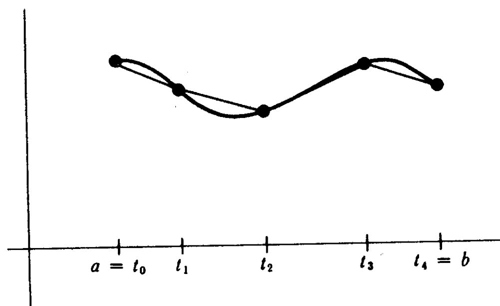


FIGURA 20

El número $l(f, P)$ representa la longitud de una curva poligonal inscrita en la gráfica de f (ver figura 20). Definimos la **longitud** de f en $[a, b]$ como el

extremo superior de todos los $\ell(f, P)$ para todas las particiones P (siempre que el conjunto de todos estos $\ell(f, P)$ esté acotado superiormente).

(a) Si f es una función lineal en $[a, b]$, demostrar que la longitud de f es la distancia de $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$.

(b) Si f es no lineal, demostrar que existe una partición $P = \{a, t, b\}$ de $[a, b]$ tal que $\ell(f, P)$ es mayor que la distancia de $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. (Hará falta el problema 4-9).

(c) Concluir que, entre todas las funciones f en $[a, b]$, con $f(a) = c$ y $f(b) = d$, la longitud de la función lineal es menor que la longitud de cualquier otra. (O, dicho al modo convencional pero irremediablemente incorrecto: «la línea recta es el camino más corto entre dos puntos».)

(d) Supóngase que f' es acotada en $[a, b]$. Si P es una partición cualquiera de $[a, b]$ demostrar que

$$L(\sqrt{1 + (f')^2}, P) \leq \ell(f, P) \leq U(\sqrt{1 + (f')^2}, P).$$

Ayuda: Utilizar el teorema del valor medio.

(e) ¿Por qué es $\sup\{L(\sqrt{1 + (f')^2}, P)\} \leq \sup\{\ell(f, P)\}$? (Esto es fácil).

(f) Demostrar ahora que $\sup\{\ell(f, P)\} \leq \inf\{U(\sqrt{1 + (f')^2}, P)\}$, con lo que se demuestra que la longitud de f en $[a, b]$ es $\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}$, si $\sqrt{1 + (f')^2}$ es integrable en $[a, b]$. Ayuda: Basta demostrar que si P' y P'' son dos particiones cualesquiera, entonces $\ell(f, P') \leq U(\sqrt{1 + (f')^2}, P'')$. Si P contiene todos los puntos de P' y todos los de P'', ¿cómo es $\ell(f, P')$ en comparación con $\ell(f, P)$?

(g) Sea $\mathcal{L}(x)$ la longitud de la gráfica de f en $[a, x]$ y sea $d(x)$ la longitud del segmento rectilíneo de $(a, f(a))$ a $(x, f(x))$. Demostrar que

$$\lim_{x \to a} \frac{\mathcal{L}(x)}{d(x)} = 1.$$

Ayuda: Vendrán bien un par de teoremas de valor medio.

27. Una función s definida sobre $[a, b]$ se dice que es una **función escalonada** si existe una partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que s es constante en cada (t_{i-1}, t_i) (los valores s y t_i pueden ser arbitrarios).

(a) Demostrar que si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función escalonada $s_1 \leq f$ con $\int_a^b f - \int_a^b s_1 < \varepsilon$, y tam-

bién una función escalonada $s_2 \geq f$ con $\int_a^b s_2 - \int_a^b f < \varepsilon$.

(b) Supóngase que para todo $\varepsilon > 0$ existen funciones escalonadas $s_1 \leq f$ y $s_2 \geq f$ tales que $\int_a^b s_2 - \int_a^b s_1 < \varepsilon$. Demostrar que f es integrable.

(c) Hallar una función f que no sea una función escalonada, pero que satisfaga $\int_a^b f = L(f, P)$ para alguna partición P de $[a, b]$.

*28. Demostrar que si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función continua $g \leq f$ con $\int_a^b f - \int_a^b g < \varepsilon$. Indicación: Obténgase primero una función escalonada con esta propiedad y después una continua. Un dibujo será de inmensa ayuda.

29. (a) Demostrar que si s_1 y s_2 son funciones escalonadas sobre $[a, b]$, entonces $s_1 + s_2$ lo es también.

(b) Demostrar, sin aplicar el teorema 5, que $\int_a^b (s_1 + s_2) = \int_a^b s_1 + \int_a^b s_2$.

(c) Utilizar la parte (b) (y el problema 27) para dar otra demostración del teorema 5.

30. Supóngase que f es integrable sobre $[a, b]$. Demostrar que existe un número x en $[a, b]$ tal que $\int_a^x f = \int_x^b f$. Demostrar, por ejemplo, que *no* siempre es posible elegir un x que esté en (a, b).

*31. El objeto de este problema es demostrar que si f es integrable sobre $[a, b]$ entonces f debe ser continua en muchos puntos de $[a, b]$.

(a) Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición de $[0, 1]$ con $U(f, P) - L(f, P) < b - a$. Demostrar que para algún i se tiene $M_i - m_i < 1$.

(b) Demostrar que existen números a_1 y b_1 con $a < a_1 < b_1 < b$ y $\sup \{f(x)\colon a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf \{f(x)\colon a_1 \leq x \leq b_1\} < 1$. (Se puede elegir $[a_1, b_1] = [t_{i-1}, t_i]$ de la parte (a) salvo si es $i = 1$ ó n; y en estos dos casos un artificio sencillo resuelve el problema.)

(c) Demostrar que existen números a_2 y b_2 con $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$ y $\sup \{f(x)\colon a_2 \leq x \leq b_2\} - \inf \{f(x)\colon a_2 \leq x \leq b_2\} < \frac{1}{2}$.

(d) Continúese de esta manera para hallar una sucesión de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ tal que $\sup \{f(x)\colon x \text{ en } I_n\} - \inf \{f(x)\colon x \text{ en } I_n\} < 1/n$. Aplicar el teorema de los intervalos encajados (problema 8-14) para hallar un punto x en el cual f es continua.

(e) Demostrar que f es continua en infinitos puntos de $[a, b]$.

*32. Recuérdese, del problema 14, que $\int_a^b f \geq 0$ si $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$.

(a) Dar un ejemplo en el que $f(x) \geq 0$ para todo x, y $f(x) > 0$ para algún x de $[a, b]$, y $\int_a^b f = 0$.
(b) Supóngase $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$ y que f es continua en x_0 de $[a, b]$ y $f(x_0) > 0$. Demostrar que $\int_a^b f > 0$. Indicación: Basta hallar la suma inferior $L(f, P)$, la cual es positiva.
(c) Supóngase que f es integrable sobre $[a, b]$ y que $f(x) > 0$ para todo x de $[a, b]$. Demostrar que $\int_a^b f > 0$. Indicación: Va a hacer falta el problema 31; en realidad ésta fue una de las razones para incluir el problema 31.

*33. (a) Supóngase que f es continua sobre $[a, b]$ y $\int_a^b fg = 0$ para todas las funciones continuas g sobre $[a, b]$. Demostrar que $f = 0$. (Esto es fácil; hay una g clara para elegir.)
(b) Supóngase que f es continua sobre $[a, b]$ y que $\int_a^b fg = 0$ para aquellas funciones continuas g sobre $[a, b]$ que satisfacen además las condiciones $g(a) = g(b) = 0$. Demostrar que $f = 0$. (Este hecho, inocente en apariencia, constituye un lema importante del cálculo de variaciones; para referencias véase la bibliografía). Indicación: Dedúzcase una contradicción si se supone $f(x_0) > 0$ o $f(x_0) < 0$; la g que se elija dependerá del comportamiento de f cerca de x_0.

34. Sea $f(x) = x$ para x racional y $f(x) = 0$ para x irracional.
(a) Calcular $L(f, P)$ para todas las particiones P de $[0, 1]$.
(b) Hallar $\inf \{U(f, P)\colon P \text{ partición de } [0, 1]\}$.

*35. Sea $f(x) = 0$ para x irracional, y $1/q$ si $x = p/q$ fracción irreducible. Demostrar que f es integrable sobre $[0, 1]$ y que $\int_0^1 f = 0$. (Todas las sumas inferiores son evidentemente 0; el lector debe encontrar la manera de hacer pequeñas las sumas superiores.)

*36. Hallar dos funciones f y g que sean integrables pero cuya composición $g \circ f$ no lo sea. Indicación: El problema 35 es apropiado.

*37. Sea f una función acotada en $[a, b]$ y sea P una partición de $[a, b]$. M_i y m_i tienen el significado usual y M_i' y m_i' tendrán el significado análogo para la función $|f|$.
(a) Demostrar que $M_i' - m_i' \leq M_i - m_i$.
(b) Demostrar que si f es integrable en $[a, b]$ entonces también lo es $|f|$.
(c) Demostrar que si f y g son integrables en $[a, b]$, también lo son en-

tonces $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$.

(d) Demostrar que f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si su «parte positiva» $\max(f, 0)$ y su «parte negativa» $\min(f, 0)$ son integrables en $[a, b]$.

38. Demostrar que si f es integrable en $[a, b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Ayuda: Esto deriva fácilmente de una serie de desigualdades en cadena; el problema 1-14 tiene algo que ver.

***39.** Supóngase que f y g son integrables en $[a, b]$ y que $g(x) \geq 0$ para todos los x de $[a, b]$. Sea P una partición de $[a, b]$. Sean M_i' y m_i' los consabidos supremos e ínfimos para f, M_i'' y m_i'' los de g y M_i y m_i los de fg.

(a) Demostrar que $M_i \leq M_i'M_i''$ y que $m_i \geq m_i'm_i''$.

(b) Demostrar que

$$U(fg, P) - L(fg, P) \leq \sum_{i=1}^{n} [M_i'M_i'' - m_i'm_i''](t_i - t_{i-1}).$$

(c) Haciendo uso del hecho de ser f y g acotadas, de modo que $|f(x)|$, $|g(x)| \leq M$ para los x de $[a, b]$ demostrar que

$$U(fg, P) - L(fg, P)$$
$$\leq M \left\{ \sum_{i=1}^{n} [M_i' - m_i'](t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} [M_i'' - m_i''](t_i - t_{i-1}) \right\}.$$

(d) Demostrar que fg es integrable.

(e) Eliminar ahora la restricción de que tenga que ser $g(x) \geq 0$ para los x de $[a, b]$.

40. Supóngase que f y g son integrables en $[a, b]$. La *desigualdad de Cauchy-Schwarz* establece que

$$\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right).$$

(a) Demostrar que la desigualdad de Schwarz es un caso particular de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

(b) Dar tres demostraciones de la desigualdad de Cauchy-Schwarz imitando las demostraciones de la desigualdad de Schwarz del problema 2-21. (Para la última hará falta algo de imaginación).

(c) ¿Tiene que ser necesariamente $f = \lambda g$ para algún λ para que la igual-

dad se cumpla? ¿Y si son f y g continuas?

(d) Demostrar que $\left(\int_0^1 f\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2\right)$. ¿Sigue esto siendo válido si 0 y 1 se sustituyen por a y b?

***41.** Supóngase que f es continua y que $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$. Demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = a.$$

Ayuda: La condición $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ implica que $f(t)$ está próximo a a para $t \geq$ que un cierto N. Esto significa que $\int_N^{N+M} f(t)\,dt$ se aproxima a Ma. Si M es grande en comparación con N, entonces $Ma/(N+M)$ se aproxima a a.

APÉNDICE 1. SUMAS DE RIEMANN

Supóngase que $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$ y que para cada i elegimos un punto de $[t_{i-1}, i_t]$. Se tiene entonces, claramente

$$L(f, P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \leq U(f, P).$$

Una suma tal como $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1})$ recibe el nombre de *suma de Riemann* de f para P. La figura 1 ofrece la interpretación geométrica de una suma de Rie-

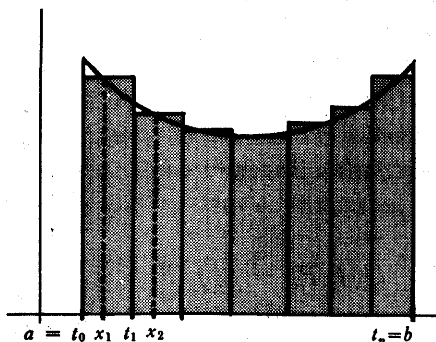


FIGURA 1

mann; se trata del área total de n rectángulos que quedan en parte por encima y en parte por debajo de la gráfica de f. Debido al modo arbitrario en que se han tomado las alturas de los rectángulos no se puede establecer con seguridad si una determinada suma de Riemann es mayor o es menor que la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Pero lo que sí parece cierto es que los retazos por encima o por debajo no van a importar demasiado; si las bases de los rectángulos son suficientemente estrechas, la suma de Riemann tendría que aproximarse a la integral. El teorema que sigue establece esto con precisión.

TEOREMA 1

Supóngase que f es continua en $[a, b]$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, si $P = \{t_0, ..., t_n\}$ es una partición cualquiera de $[a, b]$ con todas las longitudes $t_i - t_{i-1} < \delta$, entonces,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

para cualquier suma de Riemann formada tomando x_i en $[t_{i-1}, t_i]$.

DEMOSTRACIÓN

Esta demostración, lo mismo que la de que toda función continua es integrable (teorema 3), utiliza el teorema 1 del apéndice al capítulo 8, por lo que el lector no interesado puede pasarla por alto. Pero si ya ha leído la demostración del teorema 3, ésta no le costará nada ya que de hecho es prácticamente la misma.

Dado $\varepsilon > 0$ tómese $\delta > 0$ de tal modo que para todos los x, y de $[a, b]$

$$\text{si } |x - y| < \delta, \text{entonces } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b - a)}.$$

Consideremos ahora una partición cualquiera $P = \{t_0, ..., t_n\}$ con los $t_i - t_{i-1} < \delta$ y un x_i cualquiera dentro de (t_{i-1}, t_i). Tenemos entonces, según se vio en la demostración del teorema 3

$$(1) \qquad U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Pero también tenemos

(2) $$L(f, P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \leq U(f, P)$$

y

(3) $$L(f, P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(f, P).$$

La desigualdad buscada es consecuencia inmediata de (1), (2) y (3). ▮

La moraleja de este cuento es que todo lo que se asemeje a una buena aproximación de una integral lo es realmente, siempre que todas las longitudes $t_i - t_{i-1}$ de los intervalos de la partición sean suficientemente pequeñas. Hemos demostrado esto solamente para funciones continuas f, pero vale en realidad para cualquier función integrable. (Omitimos la demostración de esto porque es más bien intrincada y no muy instructiva.)

PROBLEMAS

1. Este problema viene a reforzar lo dicho en el párrafo anterior. Supóngase que f y g son funciones continuas en $[a, b]$. Para una partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ tomemos un conjunto de puntos x_i en $[t_{i-1}, t_i]$ y otro conjunto de puntos u_i en $[t_{i-1}, t_i]$. Consideremos la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(u_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Dese cuenta de que esto *no* es una suma de Riemann de fg para P. Demuestre no obstante que todas estas sumas distarán de $\int_a^b fg$ en menos de ε siempre que la partición P tenga todas las longitudes $t_i - t_{i-1}$ suficientemente pequeñas. Ayuda: Estimar la diferencia entre una tal suma y una suma de Riemann; será preciso hacer uso de la continuidad uniforme.

2. Este problema es parecido, pero algo más difícil, que el anterior. Supóngase que f y g son funciones no negativas continuas en $[a, b]$. Para una partición P, considere las sumas

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{f(x_i) + g(u_i)}\,(t_i - t_{i-1}).$$

Demuestre que estas sumas quedarán a una distancia menor que ε de $\int_a^b \sqrt{f+g}$ si todos los $t_i - t_{i-1}$ son suficientemente pequeños. Ayuda: Haga uso del hecho de que la función raíz cuadrada es uniformemente continua en un intervalo cerrado $[0, M]$.

3. Nos encontramos por fin preparados para emprender algo de envergadura (compare con el problema 13-26). Considere una curva c dada paramétricamente mediante dos funciones u y v en $[a, b]$. Para una partición $P = \{t_0, ..., t_n\}$ de $[a, b]$ definimos

$$\ell(c, P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[u(t_i) - u(t_{i-1})]^2 + [v(t_i) - v(t_{i-1})]^2};$$

esto representa la longitud de una curva poligonal inscrita (figura 2). Definimos la longitud de c como el extremo superior, si existe, de todos los $\ell(f, P)$. Demuestre que si u' y v' son continuas en $[a, b]$, entonces la longitud de c es

$$\int_a^b \sqrt{u'^2 + v'^2}.$$

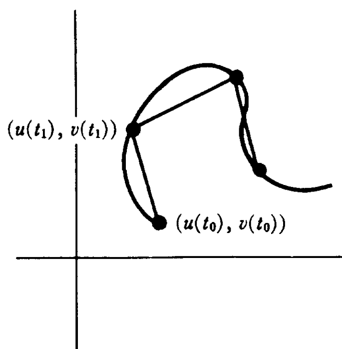


FIGURA 2

4. Sea f' continua en el intervalo $[\theta_0, \theta_1]$. Demostrar que la gráfica de f en coordenadas polares en este intervalo tiene la longitud

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{f^2 + f'^2}.$$

5. Aceptando la validez del teorema 1 para todas las funciones f integrables, demostrar que la desigualdad de Cauchy-Schwarz (problema 11-40) es una consecuencia de la desigualdad de Schwarz.

APÉNDICE 2. LA INTEGRAL COSMOPOLITA

En un principio hemos introducido la integral para hallar el área limitada por la gráfica de una función, pero su aplicabilidad se extiende a otras muchas situaciones. Por ejemplo, en el problema 11-25 se hizo uso de la integral para expresar el área de una región de índole muy distinta. Además, el problema 11-26 hizo ver que la integral puede ser utilizada también para expresar longitudes de curvas —si bien, según hemos visto en el apéndice anterior, para considerar el caso general haría falta mucho más trabajo. Esto puede haber sorprendido más, ya que, a primera vista, la integral parece ser un asunto esencialmente bidimensional. En realidad, la integral se presenta en no pocas fórmulas geométricas, como vamos a ver en este apéndice. Para deducir estas fórmulas daremos por sabidos algunos resultados de geometría elemental (y nos permitiremos algunas improvisaciones).

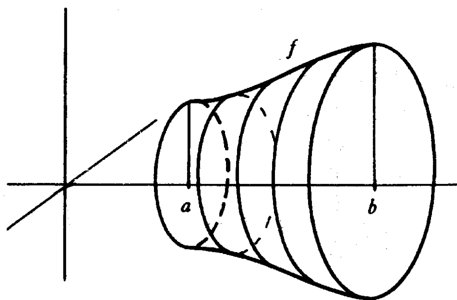


FIGURA 1

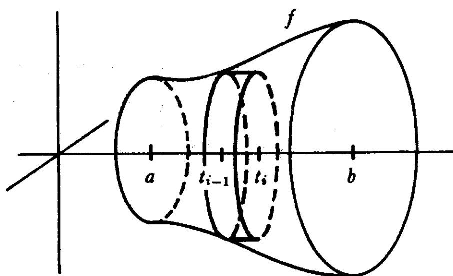


FIGURA 2

En lugar de volvernos a objetos bidimensionales, empezaremos tratando algunos de tres dimensiones. Existen cuerpos geométricos muy particulares cuyo volumen es expresable mediante integrales. El más sencillo de ellos V es un «volumen de revolución», obtenido al hacer girar alrededor del eje horizontal la región que queda por encima de $[a, b]$ y por debajo de la gráfica de $f \geq 0$, considerando el plano como inmerso en el espacio (figura 1). Si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición cualquiera de $[a, b]$ y se da a m_i y M_i respectivamente su significado usual, entonces

$$\pi m_i^2(t_i - t_{i-1})$$

es el volumen de un disco que queda dentro del sólido V (figura 2). Del mismo modo, $\pi M_i^2(t_i - t_{i-1})$ es el volumen de un disco que contiene la parte de V comprendida entre t_{i-1} y t_i. En consecuencia,

$$\pi \sum_{i=1}^{n} m_i^2(t_i - t_{i-1}) \leq \text{volumen } V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} M_i^2(t_i - t_{i-1}).$$

Pero las sumas de los miembros extremos de esta desigualdad son precisamente las sumas inferior y superior para f^2 en $[a, b]$:

$$\pi \cdot L(f^2, P) \leq \text{volumen } V \leq \pi \cdot U(f^2, P).$$

En consecuencia, el volumen de V tiene que venir dado por

$$\text{volumen } V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.$$

A este método de hallar volúmenes se le llama alusivamente «método del disco».

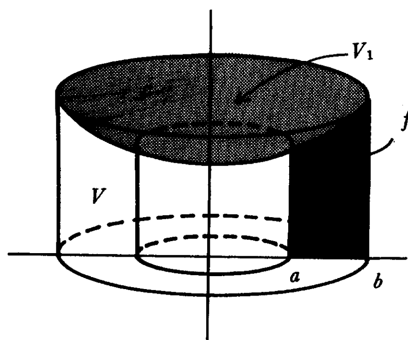


FIGURA 3

La figura 3 muestra un sólido más complicado V obtenido al hacer girar la región por debajo de la gráfica de f alrededor del eje *vertical* (V es el sólido que queda cuando partiendo del cilindro grande de radio b quitamos el cilindro pequeño de radio a y el sólido V_1 que descansa directamente sobre él). Suponemos en este caso $a \geq 0$ así como $f \geq 0$. Las figuras 4 y 5 muestran otras formas posibles para V.

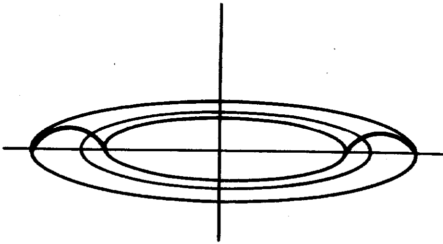


FIGURA 4

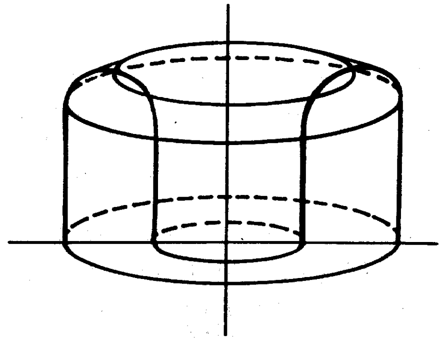


FIGURA 5

Para una partición $P = \{t_0, ..., t_n\}$ consideramos las «cáscaras» que se obtienen al hacer girar el rectángulo de base $[t_{i-1}, t_i]$ y altura m_i o M_i (figura 6). Al sumar los volúmenes de estas cáscaras obtenemos

$$\pi \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i^2 - t_{i-1}^2) \leq \text{volumen } V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i^2 - t_{i-1}^2),$$

lo cual podemos poner en la forma

$$\pi \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i + t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \leq \text{volumen } V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i + t_{i-1})(t_i - t_{i-1}).$$

Estas sumas no son ahora sumas inferiores o superiores de nada. Pero el problema 1 del apéndice anterior hace ver que cada suma

$$\sum_{i=1}^{n} m_i t_i(t_i - t_{i-1}) \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i t_{i-1}(t_i - t_{i-1})$$

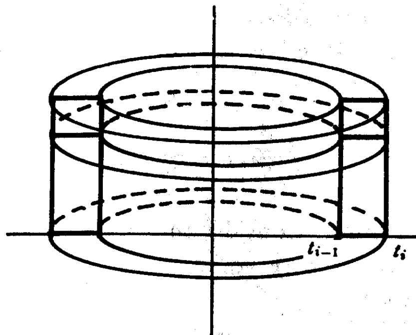


FIGURA 6

puede aproximarse tanto como se quiera a $\int_a^b xf(x)\,dx$ con sólo hacer las longitudes $t_i - t_{i-1}$ suficientemente pequeñas. Lo mismo vale para las sumas de la derecha, con lo que obtenemos que

$$\text{volumen } V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx;$$

esto es el llamado «método de la cáscara» para hallar volúmenes.

El área de ciertas regiones de superficie curva puede expresarse también en términos de integrales. Antes de meternos con regiones complicadas, puede venir bien un pequeño repaso de fórmulas geométricas elementales.

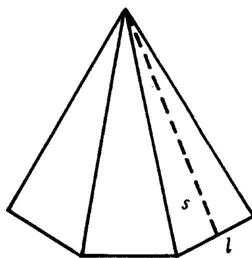


FIGURA 7

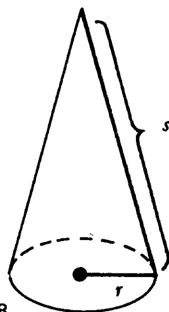


FIGURA 8

La figura 7 muestra una pirámide recta formada por triángulos de base l y altura s. La superficie total de las caras laterales de la pirámide es

$$\frac{1}{2}ps,$$

siendo p el perímetro de la base. Tomando como base un polígono regular de muchos lados vemos que la superficie lateral de un cono circular recto (figura 8) tiene que ser

$$\frac{1}{2}(2\pi r)s = \pi rs,$$

siendo s la longitud de la arista. Consideremos finalmente un tronco de cono de lado s y radios r_1 y r_2, tal como se ve en la figura 9(a). Completando el cono como en la figura 9(b) tenemos

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_1 + s}{r_2},$$

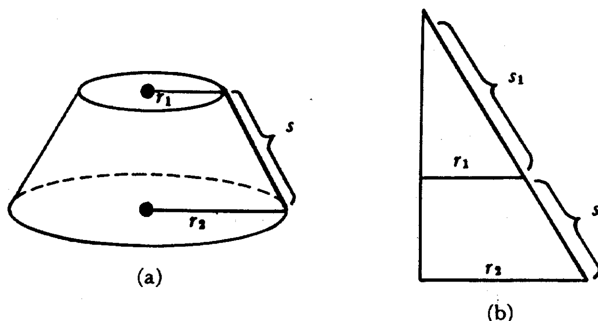


FIGURA 9

con lo que

$$s_1 = \frac{r_1 s}{r_2 - r_1}, \qquad s_1 + s = \frac{r_2 s}{r_2 - r_1}.$$

En consecuencia, la superficie lateral es

$$\pi r_2(s_1 + s) - \pi r_1 s_1 = \pi s\,\frac{r_2{}^2 - r_1{}^2}{r_2 - r_1} = \pi s(r_1 + r_2).$$

Consideremos ahora la superficie engendrada al hacer girar la gráfica de f alrededor del eje horizontal. Para una partición $P = \{t_0, ..., t_n\}$ podemos inscribir una serie de troncos de cono, como en la figura 10. El área lateral conjunta de estos troncos de cono será

$$\pi \sum_{i=1}^{n} [f(t_{i-1}) + f(t_i)]\sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + [f(t_i) - f(t_{i-1})]^2}$$

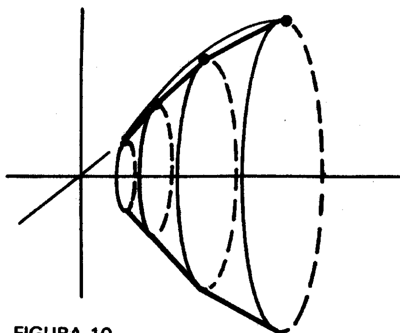


FIGURA 10

$$= \pi \sum_{i=1}^{n} [f(t_{i-1}) + f(t_i)] \sqrt{1 + \left(\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2} (t_i - t_{i-1}).$$

Según el teorema del valor medio, esto es

$$\pi \sum_{i=1}^{n} [f(t_{i-1}) + f(t_i)] \sqrt{1 + f'(x_i)^2} (t_i - t_{i-1})$$

para ciertos x_i dentro de (t_{i-1}, t_i). Recurriendo al problema 1 del apéndice anterior concluimos que el área de la superficie engendrada es

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Por el momento estas fórmulas tan impresionantes no nos servirán de mucho al no encontrarnos todavía preparados para el cálculo efectivo de integrales. Si bien el capítulo que sigue nos va a revelar el secreto fundamental que permite calcular integrales, no alcanzaremos un verdadero adiestramiento hasta que lleguemos al capítulo 18; los problemas de dicho capítulo contendrán numerosos ejemplos en que estas fórmulas serán de aplicación.

CAPÍTULO 14

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

Por las indicaciones dadas en el capítulo anterior, el lector puede haber adivinado ya el primer teorema de este capítulo. Sabemos que si f es integrable, entonces $F(x) = \int_a^x f$ es continua; es bastante natural que nos preguntemos qué ocurre si la función original f es continua. El resultado es que F es derivable (y su derivada es particularmente sencilla).

TEOREMA 1 (PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INFINITESIMAL)

Sea f integrable sobre $[a, b]$ y defínase F sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Si f es continua en c de $[a, b]$, entonces F es derivable en c, y

$$F'(c) = f(c).$$

(Si $c = a$ o b, entonces $F'(c)$ se entiende que representa la derivada por la derecha o por la izquierda de F.)

DEMOSTRACIÓN

Supondremos que c está en (a, b); el lector podrá suplir las fáciles modificaciones necesarias para $c = a$ o b. Por definición,

$$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}.$$

Supongamos primero que $h > 0$. Entonces

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f.$$

Definamos m_h y M_h como sigue (fig. 1):

$$\begin{aligned} m_h &= \inf \{f(x)\colon\ c \leq x \leq c+h\}, \\ M_h &= \sup \{f(x)\colon c \leq x \leq c+h\}. \end{aligned}$$

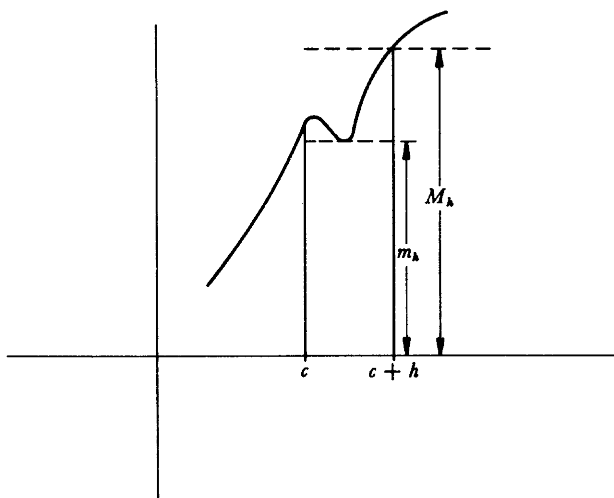


FIGURA 1

Del teorema 13-7 se sigue que

$$m_h \cdot h \leq \int_c^{c+h} f \leq M_h \cdot h.$$

Por lo tanto,

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

Si $h \leq 0$, solamente habrá que cambiar unos pocos detalles del razonamiento. Sea

$$\begin{aligned} m_h &= \inf \{f(x):\ c+h \leq x \leq c\}, \\ M_h &= \sup \{f(x):\ c+h \leq x \leq c\}. \end{aligned}$$

Entonces

$$m_h \cdot (-h) \leq \int_{c+h}^{c} f \leq M_h \cdot (-h).$$

Por ser

$$F(c+h) - F(c) = \int_{c}^{c+h} f = -\int_{c+h}^{c} f,$$

se obtiene

$$m_h \cdot h \geq F(c+h) - F(c) \geq M_h \cdot h.$$

Puesto que $h < 0$, la división por h invierte de nuevo la desigualdad, obteniéndose el mismo resultado que antes:

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

Esta igualdad se cumple para cualquier función integrable, sea o no continua. Sin embargo, puesto que f es continua en c,

$$\lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} M_h = f(c),$$

y esto demuestra que

$$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c). \blacksquare$$

Aunque el teorema 1 trata solamente de la función obtenida al variar el límite superior de integración, un sencillo artificio indica lo que ocurre cuando se varía el límite inferior. Si se define G por

$$G(x) = \int_x^b f,$$

entonces

$$G(x) = \int_a^b f - \int_a^x f.$$

En consecuencia, si f es continua en c, entonces

$$G'(c) = -f(c).$$

El signo menos que aparece aquí nos viene muy bien, permitiéndonos extender el teorema 1 al caso en que la función

$$F(x) = \int_a^x f$$

esté definida incluso para $x < a$. En este caso podemos escribir

$$F(x) = -\int_x^a f,$$

de modo que si $c < a$ tenemos

$$F'(c) = -(-f(c)) = f(c),$$

exactamente lo mismo que antes.

Obsérvese que en cualquier caso, la derivabilidad de F en c queda asegurada por la continuidad de f en c. Sin embargo, el teorema 1 es interesante en extremo cuando f es continua en todos los puntos de $[a, b]$. En este caso F es derivable en todos los puntos de $[a, b]$ y

$$F' = f.$$

En general, es extremadamente difícil decidir cuándo una función dada f es la derivada de alguna otra función; por esta razón son particularmente interesantes el teorema 11-7 y los problemas 11-54 y 11-55, por revelar ciertas propiedades

que debe poseer f. Sin embargo, si f es continua no existe problema, ya que según el teorema 1, f *es* la derivada de alguna función, a saber, la función

$$F(x) = \int_a^x f.$$

El teorema 1 tiene un corolario sencillo que con frecuencia reduce los cálculos de integrales a una trivialidad.

COROLARIO

Si f es continua sobre $[a, b]$ y $f = g'$ para alguna función g, entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Sea

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Entonces $F' = f = g'$ sobre $[a, b]$. En consecuencia, existe un número c tal que

$$F = g + c.$$

El número c puede calcularse fácilmente: obsérvese que

$$0 = F(a) = g(a) + c,$$

de modo que $c = -g(a)$; así pues,

$$F(x) = g(x) - g(a).$$

Esto se cumple, en particular, para $x = b$. Así pues,

$$\int_a^b f = F(b) = g(b) - g(a). \blacksquare$$

La demostración de este corolario tiende, a primera vista, a hacer que el corolario parezca inútil: después de todo, ¿para qué hace falta saber que

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

si g es, por ejemplo, $g(x) = \int_a^x f$? El caso es que por supuesto podría ser posible tener una función g completamente distinta con esta propiedad. Por ejemplo, si

$$g(x) = \frac{x^3}{3} \quad \text{y} \quad f(x) = x^2,$$

entonces $g'(x) = f(x)$, de modo que obtenemos, sin necesidad de calcular sumas inferiores y superiores:

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Se pueden tratar análogamente otras potencias; si n es un número natural y $g(x) = x^{n+1}/(n+1)$, entonces $g'(x) = x^n$, de modo que

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Para cualquier número natural n, la función $f(x) = x^{-n}$ no está acotada en ningún intervalo que contenga 0, pero si a y b son ambos positivos o ambos negativos, entonces

$$\int_a^b x^{-n}\,dx = \frac{b^{-n+1}}{-n+1} - \frac{a^{-n+1}}{-n+1}.$$

Naturalmente esta fórmula se cumple solamente para $n \neq -1$. *No conocemos ninguna expresión sencilla para*

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx.$$

El problema de calcular esta integral lo estudiamos más adelante, pero esto nos da una buena oportunidad para advertir contra un serio error posible. La conclusión del corolario 1 se confunde a menudo con la definición de integral —muchos estudiantes creen que $\int_a^b f$ se define por: «$g(b) - g(a)$, donde g es una

función cuya derivada es f». Esta «definición» es no solamente equivocada, sino inútil. Una razón es que una función puede ser integrable sin ser la derivada de otra función. Por ejemplo, si $f(x) = 0$ para $x \neq 1$ y $f(1) = 1$, entonces f es integrable, pero f no puede ser una derivada. (¿Por qué no?) Existe también otra razón mucho más importante: Si f es continua, entonces sabemos que $f = g'$ para alguna función g; pero sabemos esto *solamente por el teorema 1.* La función $f(x) = 1/x$ proporciona un ejemplo excelente: si $x > 0$, entonces $f(x) = g'(x)$, donde

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt,$$

y no conocemos ninguna función g con esta propiedad.

El corolario del teorema 1 es tan útil que es llamado con frecuencia el segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal. En este libro reservamos el nombre para un resultado algo más fuerte (que, sin embargo, en la práctica no es mucho más útil). Según acabamos de decir, una función f puede ser de la forma g' aunque f no sea continua. Si f es integrable, entonces se cumple todavía que

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

La demostración, sin embargo, debe ser del todo diferente —no podemos aplicar el teorema 1, de modo que deberemos volver a la definición de integrales.

TEOREMA 2
(SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INFINITESIMAL)

Si f es integrable sobre $[a, b]$ y $f = g'$ para alguna función g, entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición cualquiera de $[a, b]$. Según el teorema del valor medio existe un punto x_i en $[t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\begin{aligned} g(t_i) - g(t_{i-1}) &= g'(x_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= f(x_i)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned} m_i &= \inf \{f(x): \ t_{i-1} \le x \le t_i\}, \\ M_i &= \sup \{f(x): t_{i-1} \le x \le t_i\}, \end{aligned}$$

entonces evidentemente

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \le f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \le M_i(t_i - t_{i-1}),$$

es decir,

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \le g(t_i) - g(t_{i-1}) \le M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Sumando estas ecuaciones para $i = 1, \ldots, n$ obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \le g(b) - g(a) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

de manera que

$$L(f, P) \le g(b) - g(a) \le U(f, P)$$

para toda partición P. Pero esto significa que

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f. \ \blacksquare$$

Hemos utilizado ya el corolario del teorema 1 (o lo que equivale a lo mismo, el teorema 2) para hallar las integrales de unas cuantas funciones elementales:

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}, n \neq -1.$$

(a y b) ambos positivos o ambos negativos si $n < 0$.)
Según indicamos en el capítulo 13, esta integral no representa siempre el área

limitada por la gráfica de la función, el eje horizontal, y las verticales por $(a, 0)$ y $(b, 0)$. Por ejemplo, si $a < 0 < b$, entonces

$$\int_a^b x^3\,dx$$

no representa el área de la región indicada en la figura 2, la cual viene dada en vez por

$$-\left(\int_a^0 x^3\,dx\right) + \int_0^b x^3\,dx = -\left(\frac{0^4}{4} - \frac{a^4}{4}\right) + \left(\frac{b^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right)$$
$$= \frac{a^4}{4} + \frac{b^4}{4}.$$

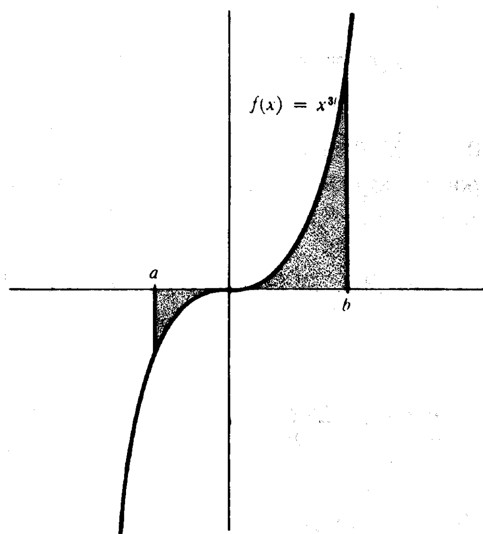


FIGURA 2

Debe tenerse un cuidado semejante al hallar las áreas de regiones que están limitadas por las gráficas de más de una función —problema que con frecuencia puede requerir mucha inventiva—. Supongamos, para dar primero un ejemplo, que deseamos hallar el área de la región, indicada en la figura 3, entre las gráficas de las funciones

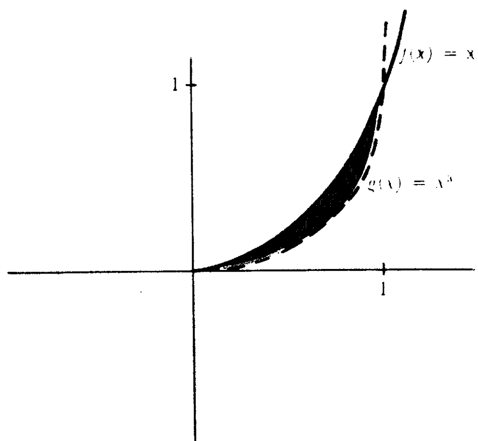


FIGURA 3

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^3$$

sobre el intervalo [0, 1]. Si $0 \leq x \leq 1$, entonces $0 \leq x^3 \leq x^2$, de modo que la gráfica de g queda por debajo de la de f. El área de la región que tiene interés para nosotros es, por lo tanto,

$$\text{área } R(f, 0, 1) - \text{área } R(g, 0, 1),$$

la cual es

$$\int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 x^3\,dx = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}.$$

Esta área podría haberse expresado por

$$\int_a^b (f - g).$$

Si $g(x) \leq f(x)$ para todo x de $[a, b]$, entonces esta integral da siempre el área limitada por f y g, *aunque f y g sean algunas veces negativas.* La manera más fácil de ver esto queda indicada en la figura 4. Si c es un número tal que $f + c$ y $g + c$ son no negativas sobre $[a, b]$, entonces la región R_1, limitada por f y g tiene la misma área que la región R_2, limitada por $f + c$ y $g + c$. En consecuencia,

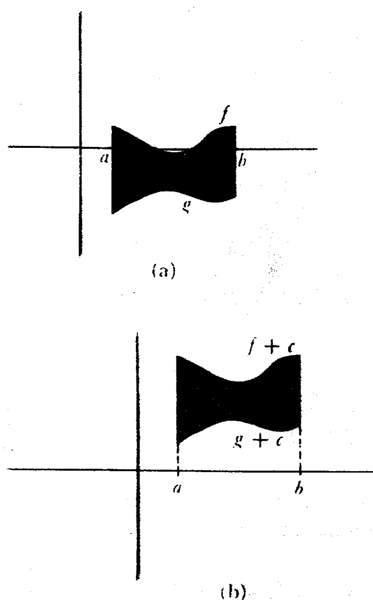


FIGURA 4

$$\begin{aligned} \text{área } R_1 = \text{área } R_2 &= \int_a^b (f+c) - \int_a^b (g+c) \\ &= \int_a^b [(f+c)-(g+c)] \\ &= \int_a^b (f-g). \end{aligned}$$

Esta observación es útil en el siguiente problema: Hallar el área de la región limitada por las gráficas de

$$f(x) = x^3 - x \quad \text{y} \quad g(x) = x^2.$$

Lo primero que necesitamos es determinar más precisamente esta región. Las gráficas de f y g se cortan cuando

$$\begin{aligned} & x^3 - x = x^2, \\ \text{o} \quad & x^3 - x^2 - x = 0, \\ \text{o} \quad & x(x^2 - x - 1) = 0, \\ \text{o} \quad & x = 0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Sobre el intervalo $([1-\sqrt{5}]/2,\ 0)$ tenemos $x^3-x\geq x^2$ y sobre el intervalo $(0,\ [1+\sqrt{5}]/2)$ tenemos $x^2\geq x^3-x$. Estas afirmaciones se desprenden de las gráficas (figura 5), pero también pueden ser comprobadas fácilmente como sigue. Puesto que $f(x)=g(x)$ solamente si $x=0$, $[1+\sqrt{5}]/2$, ó $[1-\sqrt{5}]/2$, la función $f-g$ no cambia de signo sobre los intervalos $([1-\sqrt{5}]/2, 0)$ y $(0, [1+\sqrt{5}]/2)$; basta por lo tanto observar, por ejemplo, que

$$\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3-\left(-\tfrac{1}{2}\right)-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{1}{8}>0,$$
$$1^3-1-1^2=-1<0,$$

para deducir que

$$\begin{aligned} f-g\geq 0 &\quad \text{sobre} \quad ([1-\sqrt{5}]/2,\ 0),\\ f-g\leq 0 &\quad \text{sobre} \quad (0,\ [1+\sqrt{5}]/2). \end{aligned}$$

El área de la región que nos ocupa es, pues,

$$\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0}(x^3-x-x^2)\,dx+\int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}[x^2-(x^3-x)]\,dx.$$

Según revela este ejemplo, uno de los mayores problemas que se encuentran al hallar las áreas de una región, puede ser la determinación exacta de la región. Existen, sin embargo, problemas más sustanciales de naturaleza lógica; hasta ahora hemos definido solamente las áreas de algunas regiones muy particulares, ¡que no incluyen siquiera algunas de las regiones cuyas áreas hemos calculado! Hemos supuesto sencillamente que el área tiene sentido para estas regiones, y que se cumplen ciertas propiedades razonables del «área». Estas observaciones no deben interpretarse como una sugerencia de que el lector haya de considerar que no vale la pena derrochar ingenio en el cálculo de áreas, sino que con ellas queremos indicar que existe un acceso mejor a la definición de área, si bien su lugar apropiado hay que buscarlo en el cálculo infinitesimal avanzado. El deseo de definir el área fue la motivación, lo mismo en este libro que históricamente, para la definición de la integral, pero la integral no suministra en realidad la manera mejor de *definir* áreas, si bien es con frecuencia el instrumento adecuado para *calcularlas*.

Puede desconcertar el enterarse de que las integrales no son adecuadas para el mismísimo objeto motivo de su invención, pero pronto veremos lo esenciales que son para otros fines. El uso más importante de las integrales ha sido ya des-

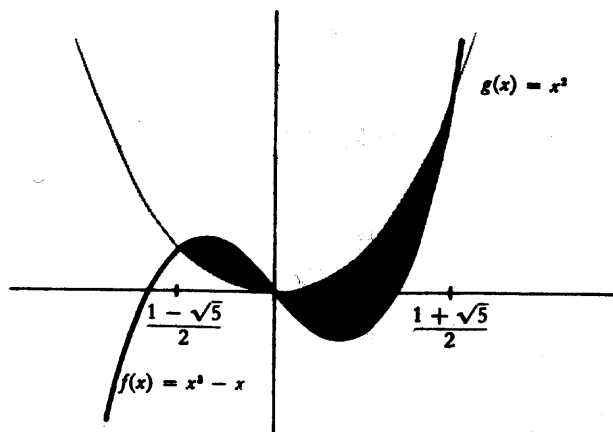


FIGURA 5

tacado: si f es continua, la integral suministra una función y tal que

$$y'(x) = f(x).$$

Esta ecuación es el ejemplo más sencillo de «ecuación diferencial» (una ecuación para una función y que encierra las derivadas de y). El teorema fundamental del cálculo infinitesimal dice que esta ecuación diferencial tiene una solución, si f es continua. En capítulos sucesivos, y en varios problemas, resolveremos ecuaciones más complicadas, pero la solución depende casi siempre de alguna manera de las integrales; para resolver una ecuación diferencial es necesario construir una nueva función, y la integral es una de las mejores maneras de hacer esto.

Puesto que las funciones derivables suministradas por el teorema fundamental del cálculo infinitesimal van a desempeñar un papel tan importante en nuestro trabajo posterior, es muy importante darse cuenta de que estas funciones se pueden combinar, al igual que las funciones más corrientes, para producir todavía otras funciones, cuyas derivadas pueden hallarse mediante la regla de la cadena.

Supóngase, por ejemplo, que

$$f(x) = \int_a^{x^3} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt.$$

Aunque la notación tiende a ocultar algo el hecho, f es la composición de las funciones

$$C(x) = x^3 \quad \text{y} \quad F(x) = \int_a^x \frac{1}{1 + \text{sen}^2 t}\, dt.$$

En efecto, $f(x) = F(C(x))$; en otras palabras, $f = F \circ C$. Por lo tanto, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(C(x)) \cdot C'(x) \\ &= F'(x^3) \cdot 3x^2 \\ &= \frac{1}{1 + \text{sen}^2 x^3} \cdot 3x^2. \end{aligned}$$

Si definimos en vez f por

$$f(x) = \int_{x^3}^a \frac{1}{1 + \text{sen}^2 t} dt,$$

entonces

$$f'(x) = -\frac{1}{1 + \text{sen}^2 x^3} \cdot 3x^2.$$

Si se define f como la composición *inversa,*

$$f(x) = \left(\int_a^x \frac{1}{1 + \text{sen}^2 t}\, dt\right)^3,$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= C'(F(x)) \cdot F'(x) \\ &= 3\left(\int_a^x \frac{1}{1 + \text{sen}^2 t}\, dt\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \text{sen}^2 x}. \end{aligned}$$

Análogamente, si

$$f(x) = \int_a^{\text{sen}\, x} \frac{1}{1 + \text{sen}^2 t}\, dt,$$

$$g(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{a} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt,$$

$$h(x) = \operatorname{sen}\left(\int_a^x \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt\right),$$

entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)} \cdot \cos x$$

$$g'(x) = \frac{-1}{1 + \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)} \cdot \cos x,$$

$$h'(x) = \cos\left(\int_a^x \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt\right) \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 x}.$$

La función de aspecto tan tremendo

$$f(x) = \int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t} dt\right)} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

es también una composición; en efecto, $f = F \circ F$. Por lo tanto

$$f'(x) = F'(F(x)) \cdot F'(x)$$

$$= \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2\left(\int_a^x \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t} dt\right)} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 x}.$$

Según revelan estos ejemplos, la expresión que aparece encima (o debajo) del signo integral indica la función que aparecerá a la *derecha* cuando f se escribe como una composición. Como ejemplo final, consideremos las composiciones triples

$$f(x) = \int_a^{\left(\int_a^{x^3} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t} dt\right)} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt, \quad g(x) = \int_a^{\left[\int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t} dt\right)} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t} dt\right]} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt,$$

que pueden escribirse

$$f = F \circ F \circ C \quad \text{y} \quad g = F \circ F \circ F.$$

Omitiendo las fases intermedias (que el lector puede escribir si todavía se siente inseguro), se obtiene

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2\left(\int_a^{x^3} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x^3} \cdot 3x^2,$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\left[\int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt\right)} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right]} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}.$$

Lo mismo que las derivaciones más sencillas del capítulo 10, estas manipulaciones deben resultar cada vez más fáciles con la práctica ofrecida por algunos de los problemas, e igual que los problemas del capítulo 10, estas derivaciones constituyen simplemente una manera de comprobar que el lector ha captado la regla de la cadena en el contexto algo menos familiar ofrecido por el teorema fundamental del cálculo infinitesimal.

Las potentes aplicaciones que se harán de la integral en los capítulos siguientes dependerán todas del teorema fundamental del cálculo infinitesimal, cuya demostración fue, sin embargo, tan fácil; el verdadero trabajo parece que haya consistido en la definición de la integral. En realidad, esto no es del todo cierto. Para aplicar el teorema 1 a una función continua necesitamos precisamente el teorema cuya demostración no ha sido dada todavía: Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$. **Aunque ya hemos ofrecido una demostración de ese resultado, hay un argumento más elemental que el lector puede preferir. Como muchas argumentaciones «elementales», es completamente falso, pero tiene la virtud de obligarnos a repasar la demostración del teorema 1.**

Si f es una función acotada cualquiera sobre $[a, b]$, entonces

$$\sup\{L(f, P)\} \quad \text{e} \quad \inf\{U(f, P)\}$$

existirán ambos, aunque f no sea integrable. Estos números reciben los nombres de **integral inferior** de f sobre $[a, b]$ y de **integral superior** de f sobre $[a, b]$, respectivamente, y serán designados por

$$\mathbf{L}\int_a^b f \quad \text{y} \quad \mathbf{U}\int_a^b f.$$

Las integrales inferior y superior tienen ambas varias propiedades poseídas por la integral. En particular, si $a < c < b$, entonces

$$\mathbf{L}\int_a^b f = \mathbf{L}\int_a^c f + \mathbf{L}\int_c^b f \quad \text{y} \quad \mathbf{U}\int_a^b f = \mathbf{U}\int_a^c f + \mathbf{U}\int_c^b f,$$

y si $m \leq f(x) \leq M$ para todo x de $[a, b]$, entonces

$$m(b-a) \leq \mathbf{L}\int_a^b f \leq \mathbf{U}\int_a^b f \leq M(b-a).$$

Las demostraciones de estos hechos se dejan como ejercicio, puesto que son muy parecidas a las demostraciones correspondientes para integrales. Los resultados para integrales constituyen en realidad un corolario de los resultados para integrales superior e inferior, ya que f es integrable precisamente cuando

$$\mathbf{L}\int_a^b f = \mathbf{U}\int_a^b f.$$

Demostraremos que una función continua f es integrable demostrando que esta igualdad se cumple siempre para funciones continuas. Es en realidad más fácil demostrar que

$$\mathbf{L}\int_a^x f = \mathbf{U}\int_a^x f$$

para todo x de $[a, b]$; el artificio consiste en observar que la mayor parte de la demostración del teorema 1 ¡no dependió ni siquiera del hecho de que f fuese integrable!

TEOREMA 13-3

Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN

Definamos las funciones L y U sobre $[a, b]$ por

$$L(x) = \mathbf{L}\int_a^x f \quad \text{y} \quad U(x) = \mathbf{U}\int_a^x f.$$

Supóngase x en (a, b). Si $h > 0$ y

$$m_h = \inf \{f(t): \ x \leq t \leq x + h\},$$
$$M_h = \sup \{f(t): x \leq t \leq x + h\},$$

entonces

$$m_h \cdot h \leq \mathbf{L} \int_x^{x+h} f \leq \mathbf{U} \int_x^{x+h} f \leq M_h \cdot h,$$

de modo que

$$m_h \cdot h \leq L(x + h) - L(x) \leq U(x + h) - U(x) \leq M_h \cdot h$$

o

$$m_h \leq \frac{L(x + h) - L(x)}{h} \leq \frac{U(x + h) - U(x)}{h} \leq M_h.$$

Si $h < 0$ y

$$m_h = \inf \{f(t): \ x + h \leq t \leq x\},$$
$$M_h = \sup \{f(t): x + h \leq t \leq x\},$$

se obtiene la misma desigualdad, exactamente igual que en la demostración del teorema 1.

Por ser f continua en x, tenemos

$$\lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} M_h = f(x),$$

y esto demuestra que

$$L'(x) = U'(x) = f(x) \qquad \text{para } x \text{ en } (a, b).$$

Esto significa que existe un número c tal que

$$U(x) = L(x) + c \qquad \text{para todo } x \text{ de } [a, b].$$

Puesto que

$$U(a) = L(a) = 0,$$

el número c debe ser igual a 0, de modo que

$$U(x) = L(x) \qquad \text{para todo } x \text{ de } [a, b].$$

En particular,

$$\mathbf{U}\int_a^b f = U(b) = L(b) = \mathbf{L}\int_a^b f,$$

y esto significa que f es integrable sobre $[a, b]$. ▮

PROBLEMAS

1. Hallar las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

(i) $F(x) = \displaystyle\int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3 t\, dt.$

(ii) $F(x) = \displaystyle\int_3^{\left(\int_1^x \operatorname{sen}^3 t\, dt\right)} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^6 t + t^2}\, dt.$

(iii) $F(x) = \displaystyle\int_{15}^x \left(\int_8^y \frac{1}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt\right) dy.$

(iv) $F(x) = \displaystyle\int_x^b \frac{1}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt.$

(v) $F(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{x}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt.$

(vi) $F(x) = \operatorname{sen}\left(\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t\, dt\right) dy\right).$

(vii) F^{-1}, donde $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$

(viii) F^{-1}, donde $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt.$

[Hallar $(F^{-1})'(x)$ en términos de $F^{-1}(x)$.]

2. Para cada una de las f siguientes, si $F(x) = \int_0^x f$, ¿en qué puntos x es $F'(x) = f(x)$? [Precaución: puede ocurrir que $F'(x) = f(x)$, aún no siendo f continua en x.]

(i) $f(x) = 0$ si $x \leq 1$, $f(x) = 1$ si $x > 1$.

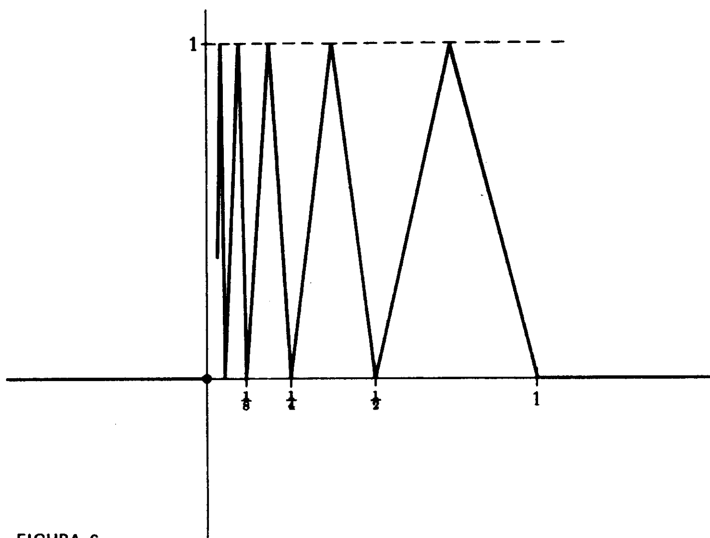


FIGURA 6

(ii) $f(x) = 0$ si $x < 1$, $f(x) = 1$ si $x \geq 1$.
(iii) $f(x) = 0$ si $x \neq 1$, $f(x) = 1$ si $x = 1$.
(iv) $f(x) = 0$ si x es irracional, $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$ fracción irreducible.
(v) $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f(x) = x$ si $x \geq 0$.
(vi) $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f(x) = 1/[1/x]$ si $x \geq 0$.
(vii) f es la función indicada en la figura 6.
(viii) $f(x) = 1$ si $x = 1/n$ para algún n de $\mathbf{N}$, $f(x) = 0$ en los demás casos.

3. Sea f integrable en $[a, b]$, c un punto de (a, b) y

$$F(x) = \int_a^x f, \; a \leq x \leq b.$$

Proporcionar una demostración o bien poner un contraejemplo para cada una de las proposiciones siguientes:
(a) Si f es derivable en c, entonces F es derivable en c.
(b) Si f es derivable en c, entonces F' es continua en c.
(c) Si f' es continua en c, entonces F' es continua en c.

4. Demostrar que los valores de las expresiones siguientes no dependen de x.

$$\text{(i)} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

(ii) $\displaystyle\int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$

5. Hallar $(f^{-1})'(0)$ si

(i) $f(x) = \displaystyle\int_0^x 1 + \operatorname{sen}(\operatorname{sen}\, t)\,dt.$

(ii) $f(x) = \displaystyle\int_1^x \operatorname{sen}(\operatorname{sen}\, t)\,dt.$

(No intente el lector calcular f explícitamente.)

6. Hallar una función g tal que

(i) $\displaystyle\int_0^x tg(t)\,dt = x + x^2.$

(ii) $\displaystyle\int_0^{x^2} tg(t)\,dt = x + x^2.$

(Tener en cuenta que g no se supone continua en 0.)

7. Hallar una función continua f que satisfaga

$$\int_0^x f = (f(x))^2 + C.$$

8. Supóngase que f y g son funciones derivables que satisfacen

$$\int_0^{f(x)} fg = g(f(x)).$$

***9.** Demostrar que $g(0) = 0$.
Supóngase que f es derivable con $f(0) = 0$ y $0 < f' \leq 1$. Demostrar que para todo $x \geq 0$ tenemos

$$\int_0^x f^3 \leq \left(\int_0^x f\right)^2.$$

***10.** Sea

$$f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

¿Es derivable en 0 la función $F(x) =$? Ayuda: Echar una ojeada a las páginas 243 y 244.

11. Utilizar el problema 13-24 para demostrar que

$$\text{(i)}\quad \frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \frac{1}{7}.$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{3}{8} \leq \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \leq \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

12. Hallar $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x xf(t)\,dt$. [La solución *no* es $xf(x)$; se debe practicar una manipulación evidente con la integral antes de tratar de hallar F'.]

13. Demostrar que si f es continua, entonces

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du.$$

Indicación: Derívense ambos miembros, haciendo uso del problema 12.

****14.** Aplicar el problema 13 para demostrar que

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2\,du = 2\int_0^x \left(\int_0^{u_2} \left(\int_0^{u_1} f(t)\,dt\right) du_1\right) du_2$$

15. Hallar una función f tal que $f'''(x) = 1/\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}$. (Este problema debe ser fácil; no se interprete mal la palabra «hallar».)

***16.** Se dice que una función f es **periódica,** con **período** a, si $f(x+a) = f(x)$ para todo x.

(a) Si f es periódica con período a e integrable sobre $[0, a]$, demostrar que

$$\int_0^a f = \int_b^{b+a} f \quad \text{para todo } b.$$

(b) Hallar una función f que no sea periódica, pero que lo sea f'. Indicación: Elegir una g periódica para la cual pueda asegurarse que $f(x) = \int_0^x g$ no sea periódica.

(c) Supóngase que f' es periódica con período a. Demostrar que f es periódica si y sólo si $f(a) = f(0)$.

17. Hallar $\int_0^b \sqrt[n]{x}\,dx$, encontrando simplemente una función f con $f'(x) = \sqrt[n]{x}$, y aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal. Cotejar después con el problema 13-22.

***18.** Aplicar el teorema fundamental del cálculo infinitesimal y el problema 13-22 para deducir el resultado enunciado en el problema 12-18.

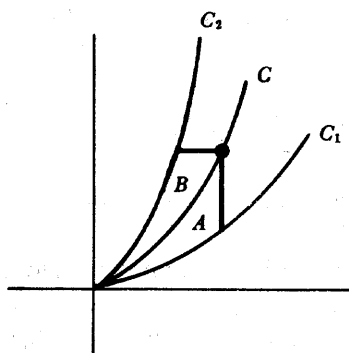


FIGURA 7

19. Sean C_1, C y C_2 curvas que pasan por el origen, tal como se indica en la figura 7. Cada uno de los puntos de C puede unirse a un punto de C_1 mediante un segmento vertical y a un punto de C_2 mediante un segmento horizontal. Diremos que C ***biseca*** a C_1 y C_2 si las regiones A y B tienen áreas iguales para todo punto de C.
    (a) Si C_1 es la gráfica de $f(x) = x^2$, $x \geq 0$ y C es la gráfica de $f(x) = 2x^2$, $x \geq 0$, hallar C_2 de tal modo que C biseque a C_1 y C_2.
    (b) De un modo más general, hallar C_2 si C_1 es la gráfica de $f(x) = x^m$ y C es la gráfica de $f(x) = cx^m$ para un cierto $c > 1$.

20. (a) Hallar las derivadas de $F(x) = \int_1^x 1/t\, dt$ y $G(x) = \int_b^{bx} 1/t\, dt$.
    (b) Dar ahora una nueva demostración para el problema 13-16.

*21. Aplicar el teorema fundamental del cálculo infinitesimal y el teorema de Darboux (problema 11-54) para dar otra demostración del teorema de los valores intermedios.

22. Demostrar que si h es continua, f y g son derivables y

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\, dt,$$

entonces $F'(x) = h(g(x)) \cdot g'(x) - h(f(x)) \cdot f'(x)$. Indicación: Inténtese reducir esto a los dos casos que se saben ya tratar, con una constante ya sea como límite inferior o como límite superior de integración.

23. Supóngase que f' es integrable en $[0, 1]$ y $f(0) = 0$. Demostrar que para todo x de $[0, 1]$ tenemos

$$|f(x)| \leq \sqrt{\int_0^1 |f'|^2}.$$

Demostrar que la hipótesis $f(0) = 0$ es necesaria. Ayuda: Problema 13-40.

***24.** (a) Supóngase $G' = g$ y $F' = f$. Demostrar que si la función y satisface la ecuación diferencial

(*) $g(y(x)) \cdot y'(x) = f(x)$ para todo x de algún intervalo,

entonces existe un número c tal que

(**) $G(y(x)) = F(x) + c$ para todo x de este intervalo.

(b) Demostrar, recíprocamente, que si y satisface (**), entonces y es una solución de (*).

(c) Hallar qué condición debe satisfacer y si

$$y'(x) = \frac{1 + x^2}{1 + y(x)}.$$

[En este caso $g(t) = 1 + t$ y $f(t) = 1 + t^2$.] Después «resolver» las ecuaciones resultantes para hallar todas las soluciones posibles y (ninguna de las soluciones tendrá **R** como dominio).

(d) Hallar qué condición debe satisfacer y si

$$y'(x) = \frac{-1}{1 + 5[y(x)]^4}.$$

(Recurriendo al problema 12-11 se verá que *existen* funciones que satisfacen la ecuación resultante.)

(e) Hallar todas las funciones y que satisfacen

$$y(x)y'(x) = -x.$$

Hallar la solución y que satisface $y(0) = -1$.

25. En el problema 10-17 hemos hallado que la derivada de Schwarz

$$\frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

se anulaba para $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$. Supongamos ahora que f es una función cualquiera cuya derivada de Schwarz se anula.

(a) f''^2/f'^3 es una función constante.

(b) f tiene la forma $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$. Ayuda: Considerar $u = f'$ y aplicar el problema anterior.

***26.** El límite $\lim_{N\to\infty}\int_a^N f$, si existe, se designa por $\int_a^\infty f$ (o $\int_a^\infty f(x)\,dx$), y se le da el nombre de «integral impropia».

(a) Determinar $\int_1^\infty x^r\,dx$, si $r < -1$.

(b) Aplicar el problema 13-16 para demostrar que $\int_1^\infty 1/x\,dx$ no existe. Indicación: ¿Qué se puede decir de $\int_1^{2^n} 1/x\,dx$?

(c) Supóngase que $f(x) \geq 0$ para $x \geq 0$ y que existe $\int_0^\infty f$. Demostrar que si $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para todo $x \geq 0$, entonces también existe $\int_0^\infty g$.

(d) Explicar por qué $\int_0^\infty 1/(1 + x^2)\,dx$ existe. Indicación: Separar esta integral en 1.

27. Decir si existen o no las siguientes integrales impropias:

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1 + x^3}}\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1 + x^{3/2}}\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x\sqrt{1 + x}}\,dx.$

***28.** La integral impropia $\int_{-\infty}^a f$ se define de la manera evidente, como $\lim_{N\to-\infty}\int_N^a f$. Pero otro tipo de integral impropia $\int_{-\infty}^\infty f$ se define de manera no evidente: es $\int_0^\infty f + \int_{-\infty}^0 f$, siempre que existan estas dos integrales impropias.

(a) Explicar por qué $\int_{-\infty}^\infty 1/(1 + x^2)\,dx$ existe.

(b) Explicar por qué no existe $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$. (Obsérvese, sin embargo, que $\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^N x\,dx$ *sí* existe.)

(c) Demostrar que si $\int_{-\infty}^{\infty} f$ existe, entonces existe $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f$ y es igual a $\int_{-\infty}^{\infty} f$. Demostrar, además, que $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N+1} f$ y $\lim_{N\to\infty} \int_{-N^2}^{N} f$ existen ambos y son iguales a $\int_{-\infty}^{\infty} f$. ¿Puede dar el lector una generalización razonable de estos hechos? (Si no es capaz de hacerlo encontrará bastante dificultad tratando estos casos particulares.)

***29.** Existe otro tipo de «integral impropia» en la cual el intervalo está acotado, pero la *función* no está acotada:

(a) Si $a > 0$, hallar $\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\epsilon}^{a} 1/\sqrt{x}\,dx$. Este límite se designa por $\int_{0}^{a} 1/\sqrt{x}\,dx$, aun cuando la función $f(x) = 1/\sqrt{x}$ no esté acotada sobre $[0, a]$, de cualquier manera que se defina $f(0)$.

(b) Hallar $\int_{0}^{a} x^r\,dx$ si $-1 < r < 0$.

(c) Aplicar el problema 13-16 para demostrar que $\int_{0}^{a} x^{-1}\,dx$ no tiene sentido, ni siquiera como límite.

(d) Inventar una definición razonable de $\int_{a}^{0} |x|^r\,dx$ para $a < 0$ y calcularla para $-1 < r < 0$.

(e) Inventar una definición razonable de $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2}\,dx$ como suma de dos límites, y demostrar que los límites existen. Indicación: ¿Por qué existe $\int_{-1}^{0} (1+x)^{-1/2}\,dx$? ¿Cómo es $(1+x)^{-1/2}$ comparado con $(1-x^2)^{-1/2}$ para $-1 < x < 0$?

30. (a) Si f es continua en $[0, 1]$, calcular $\lim_{x\to 0^+} x \int_{x}^{1} \frac{f(t)}{t}\,dt$.

(b) Si f es integrable en $[0, 1]$ y $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, calcular $\lim_{x\to 0^+} x \int_{x}^{1} \frac{f(t)}{t^2}\,dt$.

***31.** Es posible, finalmente, combinar las dos extensiones posibles del concepto de integral.

(a) Si $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para $0 \leq x \leq 1$ y $f(x) = 1/x^2$ para $x \geq 1$, hallar $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ (una vez decidido cuál debe ser el significado de esto).

(b) Demostrar que $\int_{0}^{\infty} x^r\,dx$ nunca tiene sentido. (Distinguir los casos $-1 < r < 0$ y $r < -1$. En uno de los casos el fallo está en 0 y en el otro en ∞; para $r = -1$ el fallo está en ambos sitios.)

CAPÍTULO

15

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las definiciones de las funciones sen y cos son considerablemente más útiles que lo que se pudiera sospechar. Por esta razón, este capítulo empieza con algunas definiciones informales e intuitivas, las cuales no deben ser examinadas con demasiado espíritu crítico, ya que van a ser sustituidas en seguida por las definiciones formales que realmente vamos a usar.

En geometría elemental, un ángulo es sencillamente la unión de dos semirrectas con un punto común inicial (figura 1).

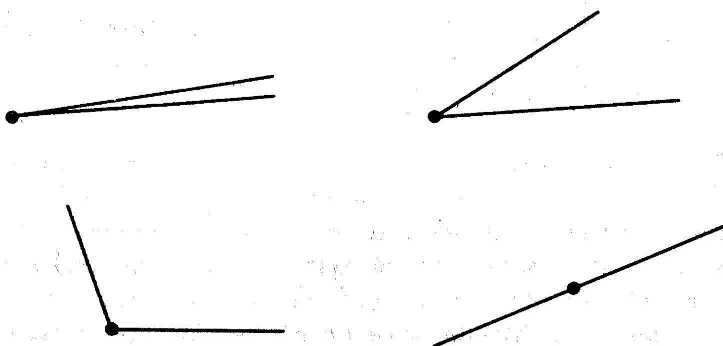


FIGURA 1

Más útiles para la trigonometría son los «ángulos dirigidos», los cuales pueden ser considerados como pares (l_1, l_2) de semirrectas con el mismo punto inicial, como en la representación de la figura 2.

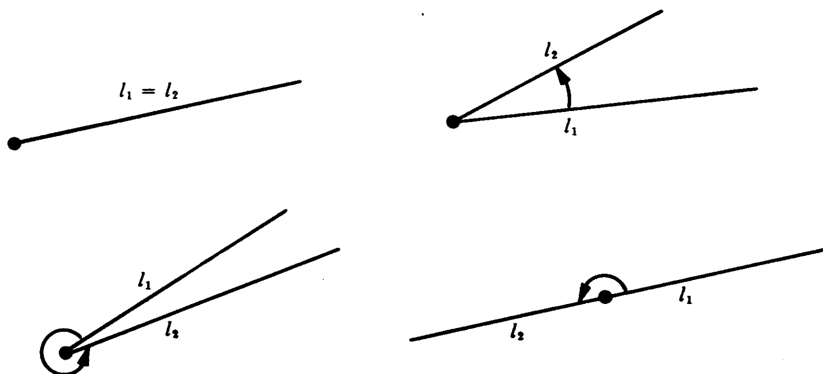


FIGURA 2

Si para l_1 elegimos siempre la mitad positiva del eje horizontal, un ángulo dirigido queda totalmente descrito mediante la segunda semirrecta (figura 3).

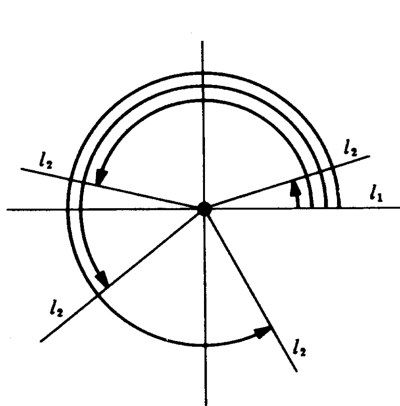


FIGURA 3

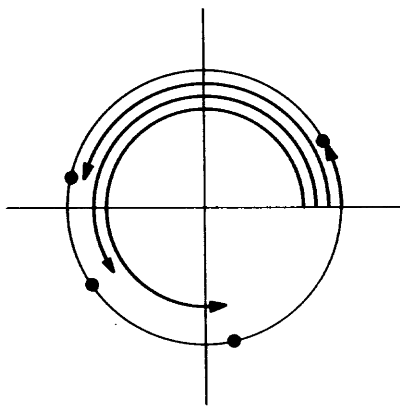


FIGURA 4

Puesto que cada semirrecta corta al círculo unidad exactamente una vez, un ángulo dirigido queda descrito, aún más sencillamente, mediante un punto sobre el círculo unidad (figura 4), es decir, mediante un punto (x, y) con $x^2 + y^2 = 1$. El seno y el coseno de un ángulo dirigido pueden ser definidos ahora como sigue (figura 5): Un ángulo dirigido queda determinado mediante un punto (x, y) con $x^2 + y^2 = 1$; el seno del ángulo se define como y, y el coseno como x.

A pesar de la aureola de precisión que rodea el párrafo anterior, no hemos terminado todavía con las definiciones de sen y cos. De hecho, apenas hemos em-

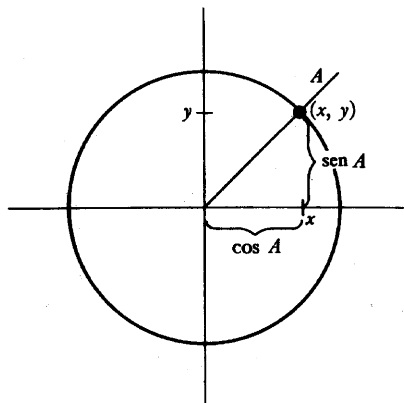


FIGURA 5

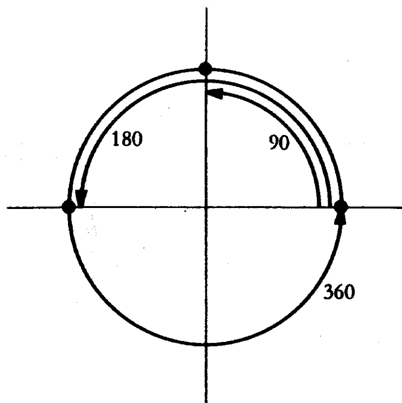


FIGURA 6

pezado. Lo que hemos hecho ha sido definir el seno y el coseno de un ángulo dirigido; lo que *queremos* definir es sen x y cos x para cada *número* x. El procedimiento corriente para hacer esto depende de asociar un ángulo a cada número. El método más antiguo consiste en «medir ángulos en grados». Un ángulo «todo alrededor» se asocia a 360, un ángulo de «mitad de vuelta» se asocia a 180, un ángulo de «un cuarto de vuelta» a 90, etc. (figura 6). El ángulo asociado de esta manera al número x recibe el nombre de «ángulo de x grados». El ángulo de 0 grados es el mismo que el ángulo de 360 grados, y esta ambigüedad se sigue extendiendo de intento, de manera que un ángulo de 90 grados es también un ángulo de $360 + 90$ grados, etc. Se puede ahora definir una función, que denotaremos por sen°, como sigue:

$$\text{sen}^\circ(x) = \text{seno del ángulo de } x \text{ grados.}$$

Este enfoque presenta dos dificultades. Aunque puede estar claro lo que entendemos por ángulo de 90 ó 45 grados, no está del todo claro qué cosa es un ángulo de, por ejemplo, $\sqrt{2}$ grados. Aun cuando se pudiera obviar esta dificultad, no es probable que este sistema, al depender como depende de la elección arbitraria de 360, conduzca a resultados elegantes; sería pura casualidad que la función sen° tuviera propiedades matemáticamente agradables.

La «medida en radianes» parece ofrecer el remedio para los dos defectos mencionados. Dado un número cualquiera x, elíjase un punto P sobre el círculo unidad tal que x sea la longitud del arco de círculo que empieza en $(1, 0)$ y que se dirige hacia P en sentido contrario al de las agujas de un reloj (figura 7). El ángulo diri-

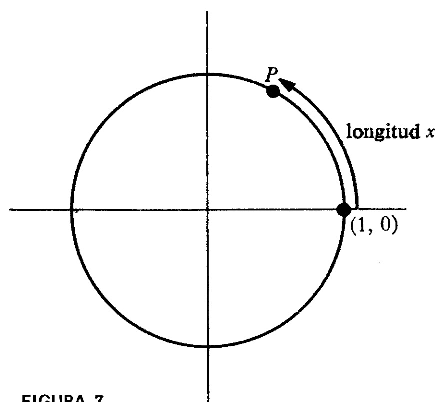


FIGURA 7

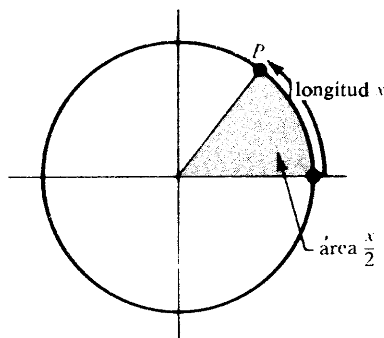


FIGURA 8

gido determinado por P recibe el nombre de «ángulo de x radianes». Al ser 2π la longitud total del círculo, el ángulo de x radianes y el ángulo de $2\pi + x$ radianes son idénticos. Una función sen^r puede ahora definirse como sigue :

$$\text{sen}^r(x) = \text{seno del ángulo de } x \text{ radianes.}$$

Puede adoptarse fácilmente este mismo método para definir sen°; puesto que queremos tener $\text{sen}^\circ\ 360 = \text{sen}^r\ 2\pi$, podemos definir

$$\text{sen}^\circ x = \text{sen}^r \frac{2\pi x}{360} = \text{sen}^r \frac{\pi x}{180}.$$

Pronto abandonaremos el superíndice r en sen^r, ya que sen^r (y no sen°) es la única función que nos interesa; antes de hacerlo, conviene hacer unas cuantas advertencias.

Las expresiones $\text{sen}^\circ\ x$ y $\text{sen}^r\ x$ se escriben a veces

$$\text{sen } x^\circ$$
$$\text{sen } x \text{ radianes,}$$

pero esta notación es completamente confusa; un número x es simplemente un número; no lleva ningún distintivo que indique que es «en grados» o «en radianes». Si se tiene duda acerca del significado de la notación «sen x» se suele preguntar:

«¿Está x en grados o en radianes?»

pero lo que se quiere decir es:

«¿Se trata de sen° o sen^{r}?»

Incluso para los matemáticos, adictos al rigor, estas observaciones serían dispensables, si no fuera por el hecho de que el no tomarlas en consideración conduce a soluciones incorrectas de ciertos problemas (en el problema 19 se da un ejemplo).

Aunque la función sen^{r} es la función que deseamos designar simplemente por sen (y utilizarla de aquí en adelante exclusivamente), la misma definición de sen^{r} encierra una dificultad. La definición propuesta depende del concepto de longitud de una curva. Aunque la longitud de una curva ha sido definida en varios problemas, es también fácil reformular la definición en términos de áreas. (En el problema 28 se esboza un tratamiento en términos de la longitud.)

Supongamos que x es la longitud del arco de círculo unidad desde (1, 0) hasta P; este arco contiene así $x/2\pi$ de la longitud total 2π de la circunferencia del círculo unidad. Designemos por S el «sector» indicado en la figura 8; S está limitado por el círculo unidad, el eje horizontal, y la semirrecta por (0, 0) y P. El área de S debería ser $x/2\pi$ veces el área interior al círculo unidad, la cual damos por supuesto que es π; así pues, S debe tener por área

$$\frac{x}{2\pi} \cdot \pi = \frac{x}{2}.$$

Podemos, por lo tanto, definir cos x y sen x como las coordenadas del punto P que determina un sector de área $x/2$.

Basados en estas observaciones, iniciamos la definición rigurosa de las funciones sen y cos. La primera definición identifica π como área del círculo unidad; más exactamente, como dos veces el área de un semicírculo (figura 9).

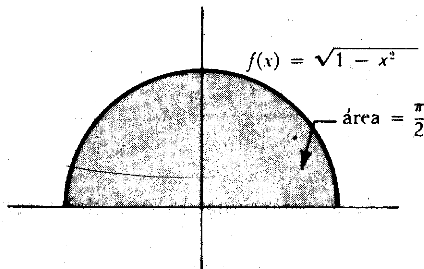


FIGURA 9

DEFINICIÓN

$$\pi = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

(Esta definición no se ofrece simplemente como ornato; para definir las funciones trigonométricas será necesario empezar definiendo sen x y cos x solamente para $0 \leq x \leq \pi$.)

La segunda definición está destinada a describir, para $-1 \leq x \leq 1$, el área $A(x)$ del sector limitado por el círculo unidad, el eje horizontal, y la semirrecta por $(x, \sqrt{1-x^2})$. Si $0 \leq x \leq 1$, esta área puede expresarse (figura 10) como la suma del área de un triángulo y el área de una región por debajo del círculo unidad:

$$\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\, dt.$$

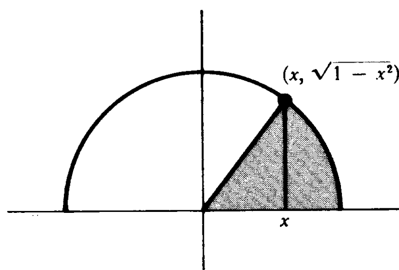


FIGURA 10

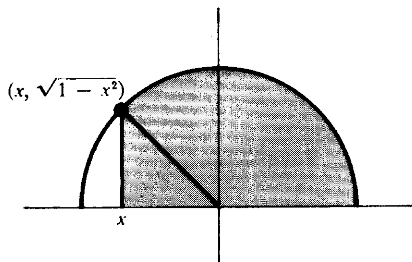


FIGURA 11

Se da el caso de que esta misma fórmula vale también para $-1 \leq x \leq 0$. En este caso (figura 11) el término

$$\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

es negativo, y representa el área del triángulo que debe ser restado del término

$$\int_x^1 \sqrt{1-t^2}\, dt.$$

DEFINICIÓN

Si $-1 \leq x \leq 1$, entonces

$$A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Obsérvese que si $-1 \leq x \leq 1$, entonces A es derivable en x y (aplicando el teorema fundamental del cálculo infinitesimal),

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{1}{2}\left[x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\right] - \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{-x^2+(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right] - \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1-2x^2-2(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

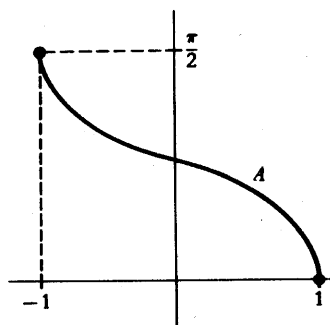


FIGURA 12

Obsérvese también (figura 12) que sobre el intervalo $[-1, 1]$ la función A decrece a partir de

$$A(-1) = 0 + \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

hasta $A(1) = 0$. Esto se sigue directamente de la definición de A, y también del hecho de que su derivada es negativa sobre $(-1, 1)$.

Para $0 \leq x \leq \pi$ queremos definir cos x y sen x como las coordenadas de un punto $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ sobre el círculo unidad que determina un sector cuya área es $x/2$ (figura 13). En otros términos:

DEFINICIÓN

Si $0 \leq x \leq \pi$, entonces **cos** x es el único número de $[-1, 1]$ tal que

$$A(\cos x) = \frac{x}{2};$$

y

$$\mathbf{sen}\ x = \sqrt{1 - (\cos x)^2}.$$

Esta definición requiere, en realidad, unas cuantas palabras de justificación. Para saber que *existe* un número y que satisface $A(y) = x/2$, utilizamos el hecho de que A es continua, y de que A toma los valores 0 y $\pi/2$. Este recurso tácito al teorema de los valores intermedios es crucial si queremos que sea precisa nuestra definición preliminar. Una vez hecha, y justificada, nuestra definición, podemos ahora proceder muy rápidamente.

TEOREMA 1

Si $0 < x < \pi$, entonces

$$\cos'(x) = -\operatorname{sen} x,$$
$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x.$$

DEMOSTRACIÓN

Si $B = 2A$, entonces la definición $A(\cos x) = x/2$ puede escribirse

$$B(\cos x) = x;$$

en otras palabras, cos es precisamente la inversa de B. Hemos calculado ya

$$A'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},$$

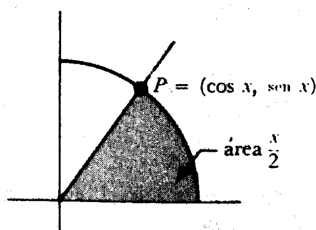


FIGURA 13

de lo cual deducimos que

$$B'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\cos'(x) &= (B^{-1})'(x) \\
&= \frac{1}{B'(B^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{-\dfrac{1}{\sqrt{1-[B^{-1}(x)]^2}}} \\
&= -\sqrt{1-(\cos x)^2} \\
&= -\operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Puesto que

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-(\cos x)^2},$$

obtenemos también

$$\operatorname{sen}'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\cos x \cdot \cos'(x)}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} = \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \cos x. \ \blacksquare$$

La información contenida en el teorema 1 puede ser utilizada para trazar las gráficas de sen y cos sobre el intervalo $[0, \pi]$. Puesto que

$$\cos'(x) = -\operatorname{sen} x < 0, \quad 0 < x < \pi,$$

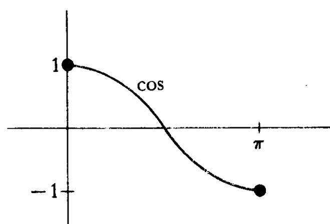


FIGURA 14

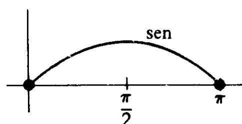


FIGURA 15

la función cos decrece desde $\cos 0 = 1$ hasta $\cos \pi = -1$ (figura 14). En consecuencia, $\cos y = 0$ para un y único de $[0, \pi]$. Para hallar y, observemos que la definición de cos,

$$A(\cos x) = \frac{x}{2},$$

significa que

$$A(0) = \frac{y}{2},$$

de modo que

$$y = 2\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt.$$

Es fácil ver que

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1 - t^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt,$$

de modo que podemos escribir también

$$y = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Tenemos ahora

$$\text{sen}'(x) = \cos x \begin{cases} > 0, & 0 < x < \pi/2 \\ < 0, & \pi/2 < x < \pi, \end{cases}$$

de modo que sen crece sobre $[0, \pi/2]$ desde sen $0 = 0$ hasta sen $\pi/2 = 1$, y después decrece sobre $[\pi/2, \pi]$ hasta sen $\pi = 0$ (figura 15).

Los valores de sen x y cos x cuando x no está en $[0, \pi]$ se calculan muy fácilmente mediante un proceso de yuxtaposición en dos fases:

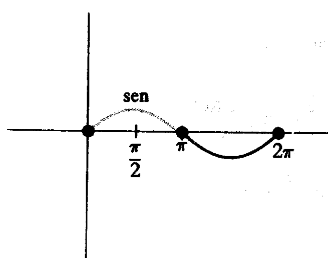
(1) Si $\pi \leq x \leq 2\pi$, entonces

$$\begin{aligned} \text{sen}\, x &= -\,\text{sen}(2\pi - x), \\ \cos x &= \cos(2\pi - x). \end{aligned}$$

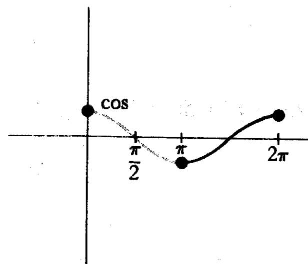
La figura 16 muestra las gráficas de sen y cos sobre $[0, 2\pi]$.

(2) Si $x = 2\pi k + x'$ para algún entero k y algún x' de $[0, 2\pi]$, entonces

$$\begin{aligned} \text{sen}\, x &= \text{sen}\, x', \\ \cos x &= \cos x', \end{aligned}$$



(a)



(b)

FIGURA 16

La figura 17 muestra las gráficas de sen y cos, definidas ahora sobre todo **R**.

Una vez extendidas las funciones sen y cos a todo **R**, debemos ahora comprobar que siguen cumpliéndose las propiedades básicas de estas funciones. Esto resulta fácil en la mayoría de los casos. Por ejemplo, está claro que la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

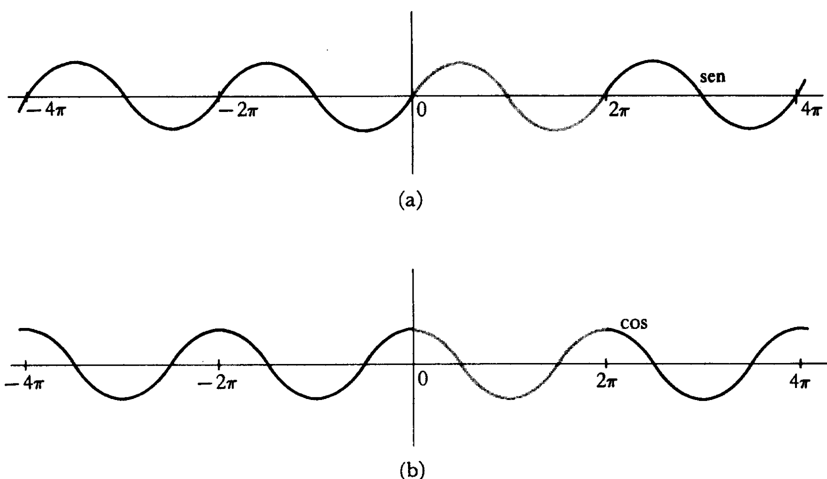


FIGURA 17

se cumple para todo x. No es tampoco difícil demostrar que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}'(x) &= \cos x, \\ \cos'(x) &= -\operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

si x no es múltiplo de π. Por ejemplo, si $\pi < x < 2\pi$, entonces

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x),$$

de modo que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}'(x) &= -\operatorname{sen}'(2\pi - x) \cdot (-1) \\ &= \cos(2\pi - x) \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

Si x es un múltiplo de π recurrimos a un artificio; basta solamente aplicar el teorema 11-7 para concluir que las mismas fórmulas se cumplen también en este caso.

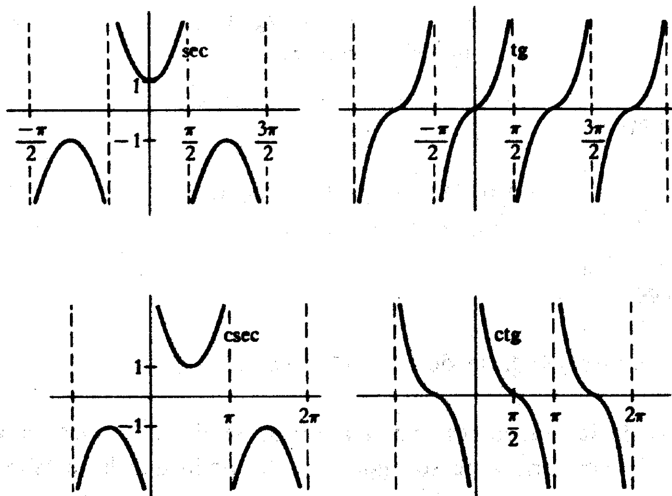


FIGURA 18

Las demás funciones trigonométricas corrientes no presentan absolutamente ninguna dificultad. Definimos

$$\left.\begin{aligned} \sec x &= \frac{1}{\cos x} \\ \tan x &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \end{aligned}\right\} x \neq k\pi + \pi/2,$$

$$\left.\begin{aligned} \csc x &= \frac{1}{\operatorname{sen} x} \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \end{aligned}\right\} x \neq k\pi.$$

Las gráficas se han dibujado en la figura 18. Sería conveniente que el lector tratara de convencerse de que es posible predecir los rasgos generales de estas gráficas a partir de las derivadas de estas funciones, que se dan en el próximo teorema (no es necesario aprender de memoria el enunciado del teorema ya que los resultados se pueden volver a deducir en cualquier momento).

TEOREMA 2

Si $x \neq k\pi + x/2$ entonces

$$\begin{aligned} \sec'(x) &= \sec x \ \ \text{tg}\ x, \\ \text{tg}'(x) &= \sec^2 x. \end{aligned}$$

Si $x \neq k\pi$, entonces

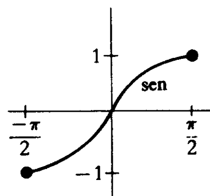
$$\begin{aligned} \text{cosec}'(x) &= -\csc x\ \text{ctg}\ x, \\ \text{ctg}'(x) &= -\text{cosec}^2 x. \end{aligned}$$

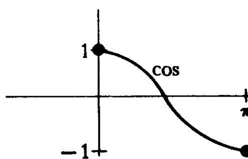
DEMOSTRACIÓN

Se deja para el lector. (Se trata de un simple cálculo.) ▮

Las inversas de las funciones trigonométricas se derivan también fácilmente. Las funciones trigonométricas no son uno-uno, de modo que hace falta restringirlas primero a intervalos convenientes; la mayor longitud posible que se puede obtener es π, y los intervalos que generalmente se eligen son (figura 19)

$$\begin{aligned} &[-\pi/2, \pi/2] \text{ para sen,} \\ &[0, \pi] \qquad\quad\ \text{ para cos,} \\ &(-\pi/2, \pi/2) \text{ para tg.} \end{aligned}$$





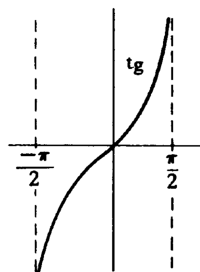


FIGURA 19

(Las inversas de las demás funciones trigonométricas son de tan raro uso que ni siquiera las vamos a estudiar aquí.)

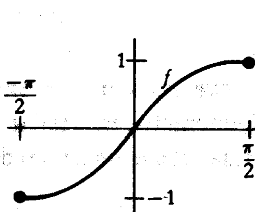
La inversa de la función

$$f(x) = \text{sen}\ x, \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$$

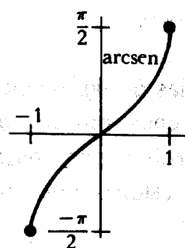
se designa por **arcsen** (figura 20); el dominio de arcsen es [—1, 1]. La notación sen^{-1} se evita porque arcsen no es la inversa de sen (la cual no es uno-uno), sino de la función restringida f; la notación sen^{-1} tiene además la desventaja de que $\text{sen}^{-1}(x)$ podría ser interpretado como $1/\text{sen}\ x$.

La inversa de la función

$$g(x) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$



(a)



(b)

FIGURA 20

se designa por **arccos** (figura 21); el dominio de arccos es [—1, 1].

La inversa de la función

$$h(x) = \text{tg}\ x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$$

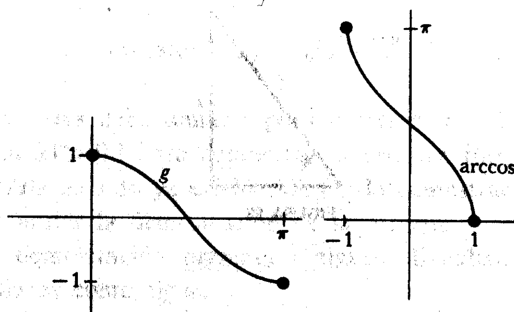


FIGURA 21

se designa por **arctg** (figura 22); **arctg** es uno de los ejemplos más sencillos de función derivable que está acotada a pesar de ser uno-uno sobre todo **R**.

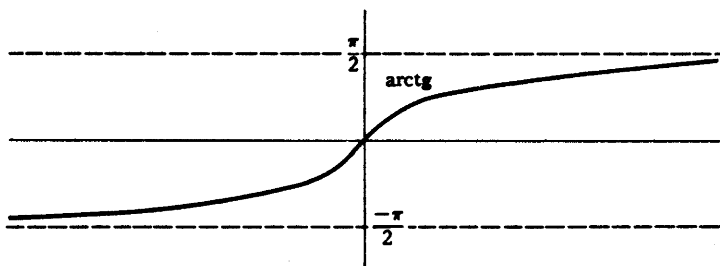


FIGURA 22

Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas son sorprendentemente sencillas, y no encierran en absoluto funciones trigonométricas. Hallar las derivadas es cosa sencilla, pero para expresarlas de forma conveniente tendremos que simplificar expresiones tales como

$$\cos(\text{arcsen } x),$$
$$\sec(\text{ arctg } x).$$

Un pequeño dibujo es la mejor manera de recordar las simplificaciones correctas. Por ejemplo, la figura 23 muestra un ángulo dirigido cuyo seno es x, el ángulo indicado es, pues, un ángulo de (arcsen x) radianes; en consecuencia cos(arcsen x) es la longitud del otro lado, a saber, $\sqrt{1-x^2}$. Sin embargo, en la demostración del próximo teorema no vamos a recurrir a estos dibujos.

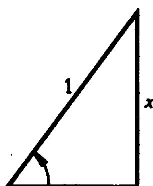


FIGURA 23

TEOREMA 3

Si $-1 < x < 1$, entonces

$$\text{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Además, para todo x se tiene

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsen}'(x) &= (f^{-1})'(x)\\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}'(\operatorname{arcsen} x)}\\ &= \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)}.\end{aligned}$$

Ahora bien

$$[\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)]^2 + [\cos(\operatorname{arcsen} x)]^2 = 1,$$

es decir,

$$x^2 + [\cos(\operatorname{arcsen} x)]^2 = 1;$$

por lo tanto,

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}.$$

[La raíz cuadrada positiva debe tomarse porque arcsen x está en $(-\pi/2, \pi/2)$, de modo que $\cos(\operatorname{arcsen} x) > 0$.] Esto demuestra la primera fórmula.

La segunda fórmula ha sido ya establecida (en la demostración del teorema 1). Es también posible imitar la demostración de la primera fórmula, ejercicio conveniente si aquella demostración presentara alguna dificultad. La demostración de la tercera fórmula es como sigue.

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}'(x) &= (h^{-1})'(x)\\ &= \frac{1}{h'(h^{-1}(x))}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\text{tg}'(\text{arctg } x)}$$
$$= \frac{1}{\sec^2(\text{arctg } x)}.$$

Dividiendo los dos miembros de la identidad

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$$

por $\cos^2 a$ se obtiene

$$\text{tg}^2 a + 1 = \sec^2 a.$$

Se sigue que

$$[\text{tg}(\text{arctg } x)]^2 + 1 = \sec^2(\text{arctg } x),$$

o

$$x^2 + 1 = \sec^2(\text{arctg } x),$$

con lo cual queda demostrada la tercera fórmula. ▮

La demostración tradicional de la fórmula $\text{sen}'(x) = \cos x$ (totalmente distinta de la dada aquí) se esboza en el problema 27 Esta demostración depende de establecer primero el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } h}{h} = 1,$$

y la «fórmula de la suma»

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \cos y + \cos x \text{ sen } y.$$

Ambas fórmulas pueden deducirse ahora fácilmente una vez conocidas las derivadas de sen y cos. La primera no es más que el caso particular $\text{sen}'(0) = \cos 0$. La segunda depende de una hermosa caracterización de las funciones sen y cos.

Para deducir este resultado necesitamos un lema cuya demostración encierra un hábil artificio; una demostración más directa será dada en la parte IV.

LEMA

Supongamos que f tenga derivada segunda por todas partes y que

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= 0, \\ f'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $f = 0$.

DEMOSTRACIÓN

Multiplicando los dos miembros de la primera ecuación por f' se obtiene

$$f'f'' + ff' = 0.$$

Así pues,

$$[(f')^2 + f^2]' = 2(f'f'' + ff') = 0,$$

de modo que $(f')^2 + f^2$ es una función constante. De $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$ se sigue que la constante es 0; así pues,

$$f'(x)^2 + f(x)^2 = 0 \quad \text{para todo } x.$$

Esto implica que

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo } x. \blacksquare$$

TEOREMA 4

Si f tiene derivada segunda por todas partes y

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= a, \end{aligned}$$

$$f'(0) = b,$$

entonces

$$f = b \cdot \text{sen} + a \cdot \cos.$$

[En particular, si $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, entonces $f = \text{sen}$; si $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$, entonces $f = \cos$.]

DEMOSTRACIÓN

Sea

$$g(x) = f(x) - b \,\text{sen}\, x - a \cos x.$$

Entonces

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - b \cos x + a \,\text{sen}\, x, \\ g''(x) &= f''(x) + b \,\text{sen}\, x + a \cos x. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} g'' + g &= 0, \\ g(0) &= 0, \\ g'(0) &= 0, \end{aligned}$$

lo que demuestra que

$$0 = g(x) = f(x) - b \,\text{sen}\, x - a \cos x, \quad \text{para todo } x. \blacksquare$$

TEOREMA 5

Si x e y son dos números cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned} \text{sen}(x + y) &= \text{sen}\, x \cos y + \cos x \,\text{sen}\, y, \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \text{sen}\, x \,\text{sen}\, y. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN

Para cualquier número particular y podemos definir una función f por

$$f(x) = \operatorname{sen}(x+y).$$

Entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x+y), \\ f''(x) &= -\operatorname{sen}(x+y). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} f''+f &= 0, \\ f(0) &= \operatorname{sen} y, \\ f'(0) &= \cos y. \end{aligned}$$

Se sigue del teorema 4 que

$$f = (\cos y)\cdot \operatorname{sen} + (\operatorname{sen} y)\cdot \cos;$$

es decir,

$$\operatorname{sen}(x+y) = \cos y \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y \cos x, \quad \text{para todo } x.$$

Puesto que para empezar se hubiese podido elegir cualquier número y, esto demuestra la primera fórmula para todo x y para todo y.

La segunda fórmula se demuestra de manera análoga. ∎

Como conclusión a este capítulo, y como preludio al capítulo 17, mencionaremos otra manera de abordar la definición de la función sen. Puesto que

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{para } -1 < x < 1,$$

se sigue del segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal que

$$\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} x - \operatorname{arcsen} 0 = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Esta ecuación podría haber sido tomada como *definición* de arcsen. Se seguiría inmediatamente que

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}};$$

la función sen podría ser definida entonces como $(\operatorname{arcsen})^{-1}$ y la fórmula para la derivada de una función inversa demostraría que

$$\operatorname{sen}'(x) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x},$$

lo cual podría ser definido como cos x. Eventualmente se podría demostrar que $A(\cos x) = x/2$, volviendo a obtener, al final mismo del desarrollo, la definición con la cual empezamos. A pesar de que buena parte de esta presentación procedería más rápidamente, la definición estaría totalmente inmotivada; la razón de las definiciones estaría clara para el autor; pero no para el estudiante que es a quien van dedicadas. Sin embargo, como veremos en el capítulo 17, a veces es muy razonable un enfoque de este tipo.

PROBLEMAS

1. Derivar cada una de las siguientes funciones.

(i) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x))$.
(ii) $f(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg}(\arccos x))$.
(iii) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} x)$.

(iv) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

2. Hallar los siguientes límites mediante la regla de l'Hôpital.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^3}$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^4}$.

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^2}$.

(iv) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4}$.

(v) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x + x^3/3}{x^3}$.

(vi) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$.

3. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

(a) Hallar $f'(0)$.
(b) Hallar $f''(0)$.

En este punto, es casi seguro que el lector tendrá que usar la regla de l'Hôpital, pero en el capítulo 23 sabremos hallar $f^{(k)}(0)$ para todo k, sin casi ningún trabajo.

4. Hallar la gráfica de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$.

(b) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. [Se puede obtener un esquema bastante aceptable de esta gráfica con sólo utilizar un dibujo de la gráfica de sen. Este problema se resuelve efectivamente sólo discurriendo, ya que determinar el signo de la derivada $f'(x) = \cos(x^2)\cdot 2x$ no es más fácil que determinar directamente el comportamiento de f. La fórmula para $f'(x)$ indica, sin embargo, un hecho importante: $f'(0) = 0$, lo cual debe ser verdad ya que f es par, y debe aparecer claramente en la gráfica.]

(c) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$. [Será probablemente instructivo dibujar primero las gráficas de $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $h(x) = \operatorname{sen} 2x$ cuidadosamente sobre el mismo par de ejes, desde 0 hasta 2π, e imaginar cómo tiene que ser la suma. Será fácil hallar cuántos puntos singulares tiene f sobre $[0, 2\pi]$ considerando la derivada de f. Se podrá entonces determinar la naturaleza de estos puntos singulares hallando el signo de f en cada punto; el esquema sugerirá probablemente la solución.]

(d) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$. (Determinar primero el comportamiento de f en $(-\pi/2, \pi/2)$; en los intervalos $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$ la gráfica de f tendrá exactamente el mismo aspecto, salvo cierta traslación. ¿Por qué?)

(e) $f(x) = \operatorname{sen} x - x$. (El material del apéndice al capítulo 11 servirá particularmente de ayuda para esta función.)

(f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

(La parte (d) debe capacitar al lector para determinar aproximadamente la localización de los ceros de f'. Obsérvese que f es par y continua en 0; considérese también la magnitud de f para x grande.)

(g) $f(x) = x \,\text{sen}\, x$.

*5. La *espiral hiperbólica* es la gráfica de la función $f(\theta) = a/\theta$ en coordenadas polares (capítulo 4, apéndice). Trazar esta curva poniendo atención particular a su comportamiento para valores de θ próximos a 0.

6. Demostrar la fórmula de la suma para cos.

7. (a) A partir de la fórmula de la suma para sen y cos, deducir fórmulas para sen $2x$, cos $2x$, sen $3x$ y cos $3x$.

(b) Utilizar estas fórmulas para hallar los valores siguientes de las funciones trigonométricas (deducidos generalmente mediante razonamientos geométricos en trigonometría elemental):

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

8. (a) Demostrar que A sen $(x + B)$ puede escribirse como a sen $x + b$ cos x con a y b adecuados. (Uno de los teoremas de este capítulo suministra una demostración de una línea. El lector debe también poder determinar qué son a y b.)

(b) Recíprocamente, dados a y b, hallar números A y B tales que a sen x + b cos $x = A$ sen $(x + B)$ para todo x.

(c) Utilizar la parte (b) para hallar la gráfica de $f(x) = \sqrt{3}$ sen x + cos x.

9. (a) Demostrar que

$$\text{tg}\,(x + y) = \frac{\text{tg}\, x + \text{tg}\, y}{1 - \text{tg}\, x\ \text{tg}\, y}$$

siempre que x, y y $x + y$ no sean de la forma $k\pi + \pi/2$. (Utilizar las fórmulas de la suma para sen y cos.)

(b) Demostrar que

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),$$

indicando las restricciones necesarias para x e y. Indicación: Sustituir x por $\operatorname{arctg} x$ e y por $\operatorname{arctg} y$ en la parte (a).

10. Demostrar que

$$\operatorname{arcsen} \alpha + \operatorname{arcsen} \beta = \operatorname{arcsen}(\alpha\sqrt{1-\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2}),$$

indicando las restricciones sobre α y β.

11. Demostrar que si m y n son números cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx &= \tfrac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],\\
\operatorname{sen} mx \cos nx &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x],\\
\cos mx \cos nx &= \tfrac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].
\end{aligned}$$

12. Demostrar que si m y n son números naturales, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = 0.$$

Estas relaciones son particularmente importantes en la teoría de las series de Fourier. Aunque sólo nos ocuparemos de este tema en las referencias bibliográficas, el próximo problema da una indicación de su importancia.

13. (a) Si f es integrable sobre $[-\pi, \pi]$, demostrar que el valor mínimo de

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - a\cos nx)^2 \, dx$$

se presenta cuando

$$a = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx,$$

y el valor mínimo de

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - a \operatorname{sen} nx)^2 \, dx$$

cuando

$$a = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx.$$

(En cada caso, sacar a del signo integral, obteniendo una expresión cuadrática en a.)

(b) Definir

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Demostrar que si c_i y d_i son números cualesquiera, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n \cos nx + d_n \operatorname{sen} nx \right] \right)^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx - 2\pi \left(\frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n c_n + b_n d_n \right) + \pi \left(\frac{c_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n^2 + d_n^2 \right)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + b_n^2 \right)$$

$$+ \pi \left(\left(\frac{c_0}{\sqrt{2}} - \frac{a_0}{\sqrt{2}} \right)^2 + \sum_{n=1}^{N} (c_n - a_n)^2 + (d_n - b_n)^2 \right),$$

demostrando así que la primera integral es mínima cuando $a_i = c_i$ y $b_i = d_i$. En otras palabras, entre todas las «combinaciones lineales» de las funciones $s_n(x) = \operatorname{sen} nx$ y $c_n(x) = \cos nx$ para $1 \leq n \leq N$, la función particular

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

constituye la «máxima aproximación» a f sobre $[-\pi, \pi]$.

14. (a) Hallar una fórmula para $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$ (obsérvese que con ello se obtiene también una fórmula para $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y$). Ayuda: Hallar primero una fórmula para $\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b)$. ¿Qué se consigue con esto?
(b) Hallar también una fórmula para $\cos x + \cos y$ y $\cos x - \cos y$.

15. (a) Partiendo de la fórmula para $\cos 2x$, deducir fórmulas para $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ en términos de $\cos 2x$.
(b) Demostrar que

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

para $0 \leq x \leq \pi/2$.
(c) Utilizar la parte (a) para hallar $\int_a^b \operatorname{sen}^2 x \, dx$ y $\int_a^b \cos^2 x \, dx$.
(d) Representar gráficamente $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

16. Hallar $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x)$ y $\cos(\operatorname{arctg} x)$ como expresiones que no encierren funciones trigonométricas. Indicación: $y = \operatorname{arctg} x$ significa que $x = \operatorname{tg} y = \operatorname{sen} y / \cos y = \operatorname{sen} y / \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$.

17. Si $x = \operatorname{tg} u/2$, expresar $\operatorname{sen} u$ y $\cos u$ en términos de x. (Aplicar el problema 16; las soluciones deben ser expresiones muy sencillas.)

18. (a) Demostrar que $\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \cos x$. (Hemos estado constantemente dibujando las gráficas de sen y cos como si esto fuera así.)
(b) ¿Qué es $\operatorname{arcsen}(\cos x)$ y $\operatorname{arccos}(\operatorname{sen} x)$?

19. (a) Hallar $\int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} \, dt$. Indicación: La solución no es 45.

(b) Hallar $\int_0^\infty \frac{1}{1 + t^2} \, dt$.

20. Hallar $\lim_{x \to \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

21. (a) Definir las funciones sen° y $\cos^\circ$ por $\operatorname{sen}^\circ(x) = \operatorname{sen}(\pi x/180)$ y $\cos^\circ(x) =$

$\cos(\pi x/180)$. Hallar $(\text{sen}°)'$ y $(\cos°)'$ en términos de estas mismas funciones.

(b) Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}°\, x}{x}$ y $\lim\limits_{x\to\infty} x\, \text{sen}°\, \dfrac{1}{x}$.

22. Demostrar que todo punto del círculo unidad es de la forma $(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$ para por lo menos un número θ (y por lo tanto para infinitos).

23. (a) Demostrar que π es la longitud máxima posible de un intervalo sobre el cual sen es uno-uno, y que un tal intervalo debe ser de la forma $[2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2]$ ó $[2k\pi + \pi/2, 2(k+1)\pi - \pi/2]$.

(b) Supóngase que hacemos $g(x) = \text{sen}\, x$ para x en $(2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2)$. ¿Qué es $(g^{-1})'$?

24. Sea $f(x) = \sec x$ para $0 \le x \le \pi$. Hallar el dominio de f^{-1} y hacer un esquema de su gráfica.

25. Demostrar que $|\text{sen}\, x - \text{sen}\, y| < |x - y|$ para todos los números x e y. Indicación: El mismo enunciado, con $<$ sustituido por $\le$, es una consecuencia muy directa de un teorema bien conocido; unas consideraciones suplementarias sencillas permiten entonces mejorar $\le$ con $<$.

*26. Es una prueba de intuición excelente predecir el valor de

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\, \text{sen}\, \lambda x\, dx.$$

Las funciones continuas son las más accesibles a la intuición, pero una vez obtenida la idea para una demostración, se puede establecer fácilmente el límite para cualquier f integrable.

(a) Demostrar que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \displaystyle\int_c^d \text{sen}\, \lambda x\, dx = 0$, calculando la integral explícitamente.

(b) Demostrar que si s es una función escalonada sobre $[a, b]$ (terminología del problema 13-27), entonces $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \displaystyle\int_a^b s(x)\, \text{sen}\, \lambda x\, dx = 0$.

(c) Finalmente, utilizar el problema 13-27 para demostrar que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\, \text{sen}\, \lambda x\, dx = 0$$

para cualquier función f que sea integrable sobre $[a, b]$.

Este resultado, lo mismo que el problema 12 desempeña un papel importante en la teoría de las series de Fourier; es conocido por lema de Riemann-Lebesgue.

27. Este problema esboza el tratamiento clásico de las funciones trigonométricas. El sector sombreado de la figura 24 tiene área $x/2$.

(a) Considerando los triángulos OAB y OCB demostrar que si $0 < x < \pi/4$, entonces

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos x}.$$

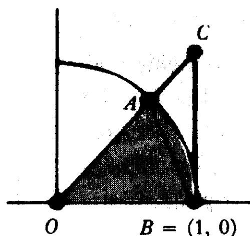


FIGURA 24

(b) Concluir que

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1,$$

y demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

(c) Utilizar este límite para hallar

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}.$$

(d) Utilizando las partes (b) y (c), y la fórmula de la suma para sen, hallar $\operatorname{sen}'(x)$, partiendo de la definición de derivada.

***28.** Este problema proporciona un tratamiento de las funciones trigonométricas en términos de longitud y hace uso del problema 13-26. Sea $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ para $-1 \leq x \leq 1$. Definimos $\mathcal{L}(x)$ como la longitud de f en $[x, 1]$.

(a) Demostrar que

$$\mathcal{L}(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt.$$

(Se trata aquí en realidad de una integral impropia, de acuerdo con la definición dada en el problema 14-29.)

(b) Demostrar que

$$\mathcal{L}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{para} \quad -1 < x < 1.$$

(c) Definamos π como $\mathcal{L}(-1)$. Para $0 \leq x \leq \pi$, definamos $\cos x$ poniendo $\mathcal{L}(\cos x) = x$ y definamos $\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$. Demostrar que $\cos'(x) = -\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen}'(x) = \cos x$ para $0 < x < \pi$.

***29.** En el texto se mencionó brevemente todavía otro desarrollo de las funciones trigonométricas: a partir de las funciones inversas definidas mediante integrales. Es conveniente empezar con arctg, puesto que esta función se define para todo x. Para hacer este problema, imagine el lector que no ha oído hablar nunca de funciones trigonométricas.

(a) Sea $\alpha(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-1}\,dt$. Demostrar que α es impar y creciente, y que $\lim_{x\to\infty} \alpha(x)$ y $\lim_{x\to\infty^-} \alpha(x)$ existen ambos, y son los negativos uno de otro. Si definimos $\pi = 2 \lim_{x\to\infty} \alpha(x)$, entonces α^{-1} está definido por $(-\pi/2, \pi/2)$.

(b) Demostrar que $(\alpha^{-1})'(x) = 1 + [\alpha^{-1}(x)]^2$.

(c) Para $x = k\pi + x'$ con $x' \neq \pi/2$ ó $-\pi/2$, definir $\operatorname{tg} x = \alpha^{-1}(x')$. Definir después $\cos x = 1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$, para x no de la forma $k\pi + \pi/2$ ó $k\pi - \pi/2$, y $\cos(k\pi \pm \pi/2) = 0$. Demostrar primero que $\cos'(x) = -\operatorname{tg} x \cos x$, y después que $\cos''(x) = -\cos x$ para todo x.

***30.** Si queremos suponer que ciertas ecuaciones diferenciales tienen soluciones, es posible otro enfoque de las funciones trigonométricas. Supongamos, en particular, que existe alguna función y_0 que no es siempre 0 y que satisface $y_0'' + y_0 = 0$.

(a) Demostrar que $y_0{}^2 + (y_0')^2$ es constante, y concluir que o bien $y_0(0) \neq 0$ ó $y_0'(0) \neq 0$.

(b) Demostrar que existe una función s que satisface $s'' + s = 0$ y $s(0) = 0$ y $s'(0) = 1$. Indicación: Pruébese con s de la forma $ay_0 + by_0'$.
Si definimos $\operatorname{sen} = s$ y $\cos = s'$, entonces casi todos los hechos acerca de funciones trigonométricas se convierten en triviales. Existe, sin embargo, un punto que requiere trabajo: obtener el número π. Esto se hace muy fácilmente utilizando un ejercicio del apéndice al capítulo 11:

(c) Utilizar el problema 7 del apéndice al capítulo 11 para demostrar que $\cos x$ no puede ser positivo para todo $x > 0$. Se sigue que existe un $x_0 > 0$

mínimo con $\cos x_0 = 0$, y podemos definir $\pi = 2x_0$.

(d) Demostrar que $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$. (Puesto que $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$, tenemos $\operatorname{sen} \pi/2 = \pm 1$; el problema consiste en decidir por qué $\operatorname{sen} \pi/2$ es positivo.)

(e) Hallar $\cos \pi$, $\operatorname{sen} \pi$, $\cos 2\pi$ y $\operatorname{sen} 2\pi$ (se pueden usar, naturalmente, las fórmulas de la suma, ya que éstas pueden deducirse una vez sabido que $\operatorname{sen}' = \cos$ y $\cos' = -\operatorname{sen}$).

(f) Demostrar que cos y sen son periódicas con período 2π.

31. (a) Después de todo el trabajo implicado en la definición de sen, sería desconcertante hallar que sen es en realidad una función racional. Demostrar que no lo es. (Hay una propiedad sencilla de sen que una función racional no puede poseer.)

(b) Demostrar que sen no está siquiera definida implícitamente mediante una ecuación algebraica; es decir, no existen funciones racionales $f_0, \dots, f_{n-1}$ tales que

$$(\operatorname{sen} x)^n + f_{n-1}(x)(\operatorname{sen} x)^{n-1} + \dots + f_0(x) = 0 \quad \text{para todo } x.$$

Indicación: Demostrar que $f_0 = 0$, de modo que $\operatorname{sen} x$ puede sacarse como factor común. El factor que queda es 0 excepto quizá para múltiplos de 2π. Pero esto implica que es 0 para todo x. (¿Por qué?) El lector está ahora preparado para una demostración por inducción.

*32. Supóngase que ϕ_1 y ϕ_2 satisfacen

$$\begin{aligned} \phi_1'' + g_1\phi_1 &= 0, \\ \phi_2'' + g_2\phi_2 &= 0, \end{aligned}$$

y que $g_2 > g_1$.

(a) Demostrar que

$$\phi_1''\phi_2 - \phi_2''\phi_1 - (g_2 - g_1)\phi_1\phi_2 = 0.$$

(b) Demostrar que si $\phi_1(x) > 0$ y $\phi_2(x) > 0$ para todo x de (a, b), entonces

$$\int_a^b [\phi_1''\phi_2 - \phi_2''\phi_1] > 0,$$

y concluir que

$$[\phi_1'(b)\phi_2(b) - \phi_1'(a)\phi_2(a)][\phi_1(b)\phi_2'(b) - \phi_1(a)\phi_2'(a)] > 0.$$

(c) Demostrar que en este caso no se puede tener $\phi_1(a) = \phi_1(b) = 0$. Indicación: Considerar el signo de $\phi_1'(a)$ y $\phi_1'(b)$.

(d) Demostrar que las ecuaciones $\phi_1(a) = \phi_1(b) = 0$ son también imposibles si $\phi_1 > 0$, $\phi_2 < 0$ ó $\phi_1 < 0$, $\phi_2 > 0$, ó $\phi_1 < 0$, $\phi_2 < 0$ sobre (a, b). (El lector debería poder hacer esto casi sin ningún trabajo adicional.)

El resultado neto de este problema puede enunciarse como sigue: si a y b son ceros consecutivos de ϕ_1, entonces ϕ_2 debe tener un 0 en algún punto entre a y b. Este resultado, en una forma ligeramente más general, es conocido como teorema de comparación de Sturm. Como ejemplo particular, cualquier solución de la ecuación diferencial

$$y'' + (x + 1)y = 0$$

debe tener ceros sobre el eje horizontal positivo a menos de π uno de otro.

33. (a) Aplicando la fórmula para sen x – sen y deducida en el problema 14, demostrar que

$$\operatorname{sen}(k + \tfrac{1}{2})x - \operatorname{sen}(k - \tfrac{1}{2})x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos kx.$$

(b) Concluir que

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})x}{2 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}.$$

Esta ecuación, lo mismo que otros dos resultados de esta serie de problemas, es muy importante para el estudio de las series de Fourier y hacemos también uso de ella en los problemas 18-55 y 22-19.

(c) Deducir, de manera análoga, la fórmula

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx = \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{n}{2}x\right)}{\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}.$$

(En el problema 26-14 se ofrece un procedimiento más natural para deducir estas fórmulas.)

(d) Aplicar las partes (b) y (c) para hallar $\int_0^b \operatorname{sen} x\,dx$ y $\int_0^b \cos x\,dx$ directamente a partir de la definición de integral.

* CAPÍTULO

16

π ES IRRACIONAL

Este corto capítulo, que se aparta de la corriente principal del libro, se incluye para demostrar que estamos ya en condiciones de entrar en matemática de cierta altura. Todo este capítulo se dedica a una demostración elemental de que π es irracional. Como ocurre con muchas demostraciones «elementales» de teoremas profundos, no es posible dar una motivación para muchos de los pasos de nuestra demostración; se puede, con todo, seguir la demostración paso por paso.

Dos observaciones deben hacerse antes de la demostración. La primera se refiere a la función

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!},$$

la cual satisface, evidentemente,

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!} \quad \text{para } 0 < x < 1.$$

Una propiedad importante de la función f_n queda revelada al considerar la expresión que se obtiene al desarrollar $x^n(1-x)^n$. La menor potencia de x que aparece será n y la mayor será $2n$. Así pues, f_n puede escribirse en la forma

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i,$$

donde los números c_i son enteros. De esta expresión es evidente que

$$f_n^{(k)}(0) = 0 \quad \text{si } k < n \text{ o } k > 2n.$$

Además,

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}[n!\, c_n + \text{términos en } x]$$

$$f_n^{(n+1)}(x) = \frac{1}{n!}[(n+1)!\, c_{n+1} + \text{términos en } x]$$

$$\vdots$$

$$f_n^{(2n)}(x) = \frac{1}{n!}[(2n)!\, c_{2n}].$$

Esto significa que

$$f_n^{(n)}(0) = c_n,$$
$$f_n^{(n+1)}(0) = (n+1)c_{n+1},$$
$$\vdots$$
$$f_n^{(2n)}(0) = (2n)(2n-1)\cdot \ldots \cdot (n+1)c_{2n},$$

donde los números de la derecha son todos enteros. Así pues,

$f_n^{(k)}(0)$ es un *entero* para todo k.

La relación

$$f_n(x) = f_n(1-x)$$

indica que

$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1-x);$$

por lo tanto,

$f_n^{(k)}(1)$ es también un *entero* para todo k.

La demostración de que π es irracional exige una observación más: si a es un número cualquiera, y $\varepsilon > 0$, entonces para n suficientemente grande tendremos

$$\frac{a^n}{n!} < \varepsilon.$$

Para demostrar esto, obsérvese que si $n \geq 2a$ entonces

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n!}.$$

Sea ahora n_0 un número natural cualquiera con $n_0 \geq 2a$. Entonces, cualquiera que sea el valor de

$$\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}$$

los valores sucesivos satisfacen

$$\begin{aligned}
\frac{a^{(n_0+1)}}{(n_0+1)!} &< \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!} \\
\frac{a^{(n_0+2)}}{(n_0+2)!} &< \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{(n_0+1)}}{(n_0+1)!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!} \\
&\vdots \\
\frac{a^{(n_0+k)}}{(n_0+k)!} &< \frac{1}{2^k} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!}.
\end{aligned}$$

Si k es tan grande que $\dfrac{a^{n_0}}{(n_0)!\,\varepsilon} < 2^k$, entonces

$$\frac{a^{(n_0+k)}}{(n_0+k)!} < \varepsilon,$$

lo cual es el resultado deseado. Una vez hechas estas observaciones, estamos preparados para el único teorema de este capítulo.

TEOREMA 1

El número π es irracional; en efecto, π^2 es irracional. (Obsérvese que la irracionalidad de π^2 implica la irracionalidad de π, pues si π fuese racional, entonces ciertamente lo sería también π^2.)

DEMOSTRACIÓN

Supóngase que π^2 fuese racional, de modo que

$$\pi^2 = \frac{a}{b}$$

para ciertos números positivos a y b. Sea

$$(1)\quad G(x) = b^n[\pi^{2n}f_n(x) - \pi^{2n-2}f_n''(x) + \pi^{2n-4}f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)].$$

Obsérvese que cada uno de los factores

$$b^n\pi^{2n-2k} = b^n(\pi^2)^{n-k} = b^n\left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} = a^{n-k}b^k$$

es entero. Puesto que $f_n^{(k)}(0)$ y $f_n^{(k)}(1)$ son enteros, esto demuestra que

$$G(0) \text{ y } G(1) \text{ son enteros.}$$

Derivando G dos veces se obtiene

$$(2)\quad G''(x) = b^n[\pi^{2n}f_n''(x) - \pi^{2n-2}f_n^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)].$$

El último término, $(-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)$ es cero. Así pues, sumando (1) y (2) se obtiene

$$(3)\quad G''(x) + \pi^2 G(x) = b^n\pi^{2n+2}f_n(x) = \pi^2 a^n f_n(x).$$

Sea ahora

$$H(x) = G'(x) \operatorname{sen} \pi x - \pi G(x) \cos \pi x.$$

Entonces

$$\begin{aligned} H'(x) &= \pi G'(x) \cos \pi x + G''(x) \operatorname{sen} \pi x - \pi G'(x) \cos \pi x + \pi^2 G(x) \operatorname{sen} \pi x \\ &= [G''(x) + \pi^2 G(x)] \operatorname{sen} \pi x \\ &= \pi^2 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x, \quad \text{según (3).} \end{aligned}$$

Según el segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal,

$$\begin{aligned} \pi^2 \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x \, dx &= H(1) - H(0) \\ &= G'(1) \operatorname{sen} \pi - \pi G(1) \cos \pi - G'(0) \operatorname{sen} 0 + \pi G(0) \cos 0 \\ &= \pi[G(1) + G(0)]. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\pi \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x \, dx \quad \text{es un } \textit{entero.}$$

Por otra parte, $0 < f_n(x) < 1/n!$ para $0 < x < 1$, de modo que

$$0 < \pi a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x < \frac{\pi a^n}{n!} \quad \text{para } 0 < x < 1.$$

En consecuencia,

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x \, dx < \frac{\pi a^n}{n!}.$$

Este razonamiento ha sido independiente por completo del valor de n. Ahora bien, si n es suficientemente grande, entonces

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x \, dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1.$$

Pero esto es absurdo, puesto que la integral es un entero, y no existe ningún entero entre 0 y 1. Así pues, nuestra suposición original debe haber sido incorrecta: π^2 es irracional. ▌

Hay que reconocer que esta demostración es misteriosa; quizá lo más mis-

terioso de todo sea la manera de entrar π en la demostración —parece casi como si hubiésemos demostrado que π es irracional sin haber dado nunca una definición de π. Un nuevo examen cuidadoso de la demostración demostrará que hay precisamente una propiedad de π que es esencial:

$$\text{sen}\,(\pi) = 0.$$

La demostración depende realmente de las propiedades de la función sen, y demuestra la irracionalidad del número x positivo más pequeño con sen $x = 0$. Se requieren en efecto muy pocas propiedades de sen, a saber:

$$\begin{aligned} \text{sen}' &= \cos, \\ \cos' &= -\,\text{sen}, \\ \text{sen}(0) &= 0, \\ \cos(0) &= 1. \end{aligned}$$

Incluso se puede simplificar esta lista; por lo que se refiere a la demostración, se podría haber definido cos como sen′. Las propiedades de sen requeridas en la demostración serían así

$$\begin{aligned} \text{sen}'' + \text{sen} &= 0, \\ \text{sen}(0) &= 0, \\ \text{sen}'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Por supuesto, esto no debe sorprender mucho, ya que, según hemos visto en el capítulo anterior, estas propiedades caracterizan por completo la función sen.

PROBLEMAS

1. (a) Demostrar que las áreas de los triángulos OAB y OAC de la figura 1 están relacionadas por la ecuación

$$\text{área } OAC = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 16(\text{área } OAB)^2}}{2}}.$$

Indicación: Resolver las ecuaciones $xy = 2\,(\text{área } OAB)$, $x^2 + y^2 = 1$, hallando el valor de y.

(b) Sea P_m el polígono regular de m lados inscrito en el círculo unidad. Si A_m es el área de P_m, demostrar que

$$A_{2m} = \frac{m}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - (2A_m/m)^2}}.$$

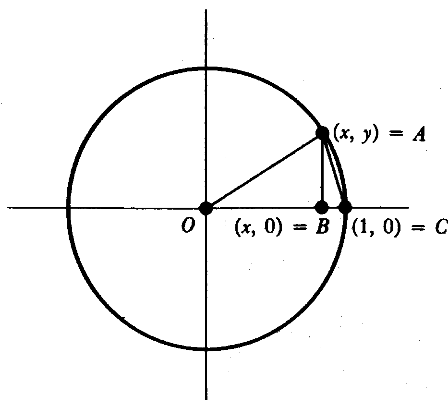


FIGURA 1

Este resultado permite obtener expresiones (cada vez más complicadas) para A_{2^n}, partiendo de $A_4 = 2$, y de este modo calcular π con tanta aproximación como se deseè (según el problema 8-11). Aunque daremos métodos mejores en el capítulo 19, una ligera variante de éste nos va a dar una expresión muy interesante para π:

2. (a) Utilizando el hecho de que

$$\frac{\text{área}(OAB)}{\text{área}(OAC)} = OB,$$

demostrar que si α_m es la distancia desde 0 a un lado de P_m, entonces

$$\frac{A_m}{A_{2m}} = \alpha_m.$$

(b) Demostrar que

$$\frac{2}{A_{2^k}} = \alpha_4 \cdot \alpha_8 \cdot \ . \ . \ . \ \cdot \alpha_{2^{k-1}}.$$

(c) Utilizando el hecho de que

$$\alpha_m = \cos\frac{\pi}{m},$$

y la fórmula $\cos x/2 = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$ (problema 15-15), demostrar que

$$\alpha_4 = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\alpha_8 = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

$$\alpha_{16} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}},$$

etc.

Junto con la parte (b), esto demuestra que $2/\pi$ puede escribirse como «producto infinito»

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ \ldots\ ;$$

propiamente hablando, esta ecuación significa que el producto de los primeros n factores puede hacerse tan próximo como se quiera a $2/\pi$, eligiendo n suficientemente grande. Este producto fue descubierto por Francois Viete en 1579, y no es más que una de las muchas expresiones fascinantes de π, algunas de las cuales mencionaremos más adelante.

CAPÍTULO

17

LAS FUNCIONES LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL

En el capítulo 15 la integral suministró una formulación rigurosa para una definición preliminar de las funciones sen y cos. En este capítulo la integral desempeña un papel más esencial. Para ciertas funciones incluso una definición preliminar presenta dificultades. Considérese, por ejemplo, la función

$$f(x) = 10^x.$$

Esta función se supone definida para todo x y que posee función inversa, definida para x positivo, la cual es el «logaritmo de base 10»,

$$f^{-1}(x) = \log_{10} x.$$

En álgebra, 10^x se suele definir solamente para x *racional*, mientras que la definición para x irracional se suele ignorar por completo. Una breve revisión de la definición para x racional no sólo explicará esta omisión, sino que recordará un principio importante en que se basa la definición de 10^x.

El símbolo 10^n se define en primer lugar para los números naturales n. Esta notación resulta en extremo conveniente, especialmente para multiplicar números muy grandes, ya que

$$10^n \cdot 10^m = 10^{n+m}.$$

La extensión de la definición de 10^x a x racionales está motivada por el deseo de conservar esta ecuación; esta necesidad nos obliga en realidad a la definición corriente. Puesto que queremos que se cumpla la ecuación

$$10^0 \cdot 10^n = 10^{0+n} = 10^n$$

debemos definir $10^0 = 1$; puesto que queremos que se cumpla la ecuación

$$10^{-n} \cdot 10^n = 10^0 = 1$$

debemos definir $10^{-n} = 1/10^n$; puesto que queremos que se cumpla la ecuación

$$\underbrace{10^{1/n} \cdot \ldots \cdot 10^{1/n}}_{n \text{ veces}} = 10^{\overbrace{1/n + \cdots + 1/n}^{}} = 10^1 = 10$$

debemos definir $10^{1/n} = \sqrt[n]{10}$ y puesto que queremos que se cumpla la ecuación

$$\underbrace{10^{1/n} \cdot \ldots \cdot 10^{1/n}}_{m \text{ veces}} = 10^{1/n + \cdots + 1/n} = 10^{m/n}$$

debemos definir $10^{m/n} = (\sqrt[n]{10})^m$.

Por desgracia, el programa llega en este punto a un callejón sin salida. Hemos sido guiados por el principio de que 10^x debe ser definido de modo a asegurar que $10^{x+y} = 10^x 10^y$; pero este principio no sugiere ninguna manera algebraica sencilla de definir 10^x para x irracionales. Por esta razón buscaremos procedimientos más elaborados de hallar una función f tal que

$$(*) \qquad f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{para todo } x \text{ e } y.$$

Por supuesto, nos interesa una función que no sea siempre 0, de modo que podríamos añadir la condición $f(1) \neq 0$. Si añadimos la condición más específica $f(1) = 10$, entonces (*) implicará que $f(x) = 10^x$ para x racionales, y 10^x podría ser *definido* como $f(x)$ para otros x; en general $f(x)$ será igual a $[f(1)]^x$ para x racionales.

Una manera de hallar una tal función nos viene sugerida si intentamos resolver un problema en apariencia más difícil: Hallar una función *derivable* f tal que

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y) \quad \text{para todo } x \text{ e } y,$$
$$f(1) = 10.$$

Suponiendo que tal función existe, podemos intentar hallar f' —el conocimiento de la derivada de f podría darnos la clave para la definición de la misma f. Ahora bien,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\cdot f(h) - f(x)}{h} \\ &= f(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h}. \end{aligned}$$

La solución depende, pues, de

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h};$$

supóngase por el momento que este límite existe, y desígnese por α. Entonces

$$f'(x) = \alpha\cdot f(x) \quad \text{para todo } x.$$

Aunque pudiera calcularse α, este procedimiento parece destinado al fracaso. La derivada de f ha sido expresada de nuevo en términos de f.

Si examinamos la función inversa $f^{-1} = \log_{10}$, toda la situación aparece con nuevas luces:

$$\begin{aligned} \log_{10}{}'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{\alpha\cdot f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\alpha x}. \end{aligned}$$

La derivada de f^{-1} es todo lo sencilla que se puede desear. Y, lo que todavía es más interesante, entre todas las integrales $\int_a^b x^n\,dx$ examinadas con anterioridad, la integral $\int_a^b x^{-1}\,dx$ es la única que no podemos calcular. Al ser $\log_{10} 1 = 0$ deberíamos tener

$$\frac{1}{\alpha}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \log_{10} x - \log_{10} 1 = \log_{10} x.$$

Esto nos lleva a definir $\log_{10} x$ como $(1/\alpha)\int_1^x t^{-1}\,dt$. La dificultad está en que α es desconocido. Una manera de obviar esta dificultad consiste en definir

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt,$$

y confiar en que esta integral sea el logaritmo en *alguna* base, la cual podría ser determinada más tarde. En todo caso, la función de esta manera definida es más razonable, desde un punto de vista matemático, que $\log_{10}$. La utilidad de $\log_{10}$ depende del importante papel del número 10 en la notación arábiga (y en último extremo del hecho de que tenemos 10 dedos), mientras que la función log nos da una notación para una integral extremadamente sencilla que no puede calcularse en términos de ninguna de las funciones por nosotros conocidas.

DEFINICIÓN

Si $x > 0$, entonces

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

La gráfica de log se indica en la figura 1. Obsérvese que si $x > 1$, entonces $\log x > 0$, y si $0 < x < 1$, entonces $\log x < 1$, ya que, según nuestros convenios,

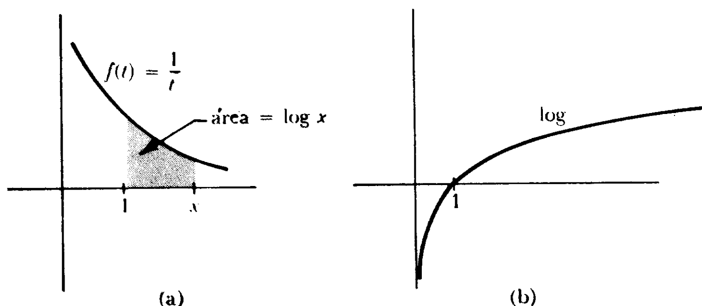


FIGURA 1

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt < 0.$$

Para $x \leq 0$, no puede definirse de esta manera un número $\log x$, puesto que $f(t) = 1/t$ no está acotada sobre $[x, 1]$.

La justificación de la notación «log» proviene del siguiente teorema.

TEOREMA 1

Si $x, y > 0$, entonces

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

DEMOSTRACIÓN

Obsérvese primero que $\log'(x) = 1/x$, según el teorema fundamental del cálculo infinitesimal. Elijamos ahora un número $y > 0$ y sea

$$f(x) = \log(xy).$$

Entonces

$$f'(x) = \log'(xy)\cdot y = \frac{1}{xy}\cdot y = \frac{1}{x}.$$

Así pues, $f' = \log'$. Esto significa que existe un número c tal que

$$f(x) = \log x + c \quad \text{para todo } x > 0,$$

es decir,

$$\log(xy) = \log x + c \quad \text{para todo } x > 0.$$

El número c puede calcularse observando que cuando $x = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned}\log(1\cdot y) &= \log 1 + c\\ &= c.\end{aligned}$$

Así pues,

$$\log(xy) = \log x + \log y \quad \text{para todo } x.$$

Puesto que esto se cumple para todo $y > 0$, el teorema queda demostrado. ▮

COROLARIO 1

Si n es un número natural y $x > 0$, entonces

$$\log(x^n) = n \log x.$$

DEMOSTRACIÓN

Se deja para el lector (aplíquese inducción). ▮

COROLARIO 2

Si $x, y > 0$, entonces

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y.$$

DEMOSTRACIÓN

Esto se sigue de las ecuaciones

$$\log x = \log\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = \log\left(\frac{x}{y}\right) + \log y. ▮$$

El teorema 1 nos da alguna información importante acerca de la gráfica de log. La función log es evidentemente creciente, pero puesto que $\log'(x) = 1/x$, la derivada se hace muy pequeña cuando x se hace grande, y en consecuencia log crece cada vez más despacio. No se ve claro inmediatamente si log es acotada o no acotada sobre **R**. Obsérvese, sin embargo, que para un número natural n,

$$\log(2^n) = n \log 2 \qquad (\text{y} \quad \log 2 > 0);$$

se sigue que log no está, en efecto, acotada superiormente. Análogamente,

$$\log\left(\frac{1}{2^n}\right) = \log 1 - \log 2^n = -n \log 2;$$

por lo tanto log no está acotada inferiormente sobre (0, 1). Al ser log continua, toma realmente todos los valores. Por lo tanto **R** es el dominio de la función $\log^{-1}$. Esta importante función tiene un nombre especial, lo adecuado del cual quedará pronto claro.

DEFINICIÓN

La «función exponencial», **exp**, se define como $\log^{-1}$.

La gráfica de exp se indica en la figura 2. Puesto que $\log x$ se define solamente para $x > 0$, tenemos siempre $\exp(x) > 0$. La derivada de la función exp se determina fácilmente.

TEOREMA 2

Para todos los números x,

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= (\log^{-1})'(x) = \frac{1}{\log'(\log^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{\dfrac{1}{\log^{-1}(x)}} \\ &= \log^{-1}(x) = \exp(x). \blacksquare\end{aligned}$$

Una segunda propiedad importante de exp es una consecuencia fácil del teorema 1.

TEOREMA 3

Si x e y son dos números cualesquiera, entonces

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

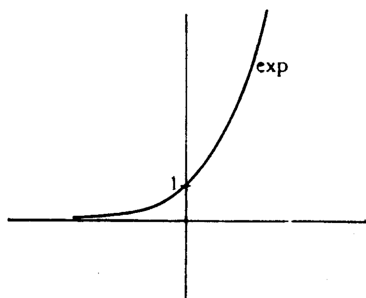


FIGURA 2

DEMOSTRACIÓN

Sea $x' = \exp(x)$ e $y' = \exp(y)$, de modo que

$$x = \log x',$$
$$y = \log y'.$$

Entonces

$$x + y = \log x' + \log y' = \log(x'y').$$

Esto significa que

$$\exp(x + y) = x'y' = \exp(x) \cdot \exp(y). \blacksquare$$

Este teorema, y la discusión del principio de este capítulo, sugieren que $\exp(1)$ es particularmente importante. Existe, en efecto, un símbolo especial para este número.

DEFINICIÓN

$$e = \exp(1).$$

Esta definición equivale a la ecuación

$$1 = \log e = \int_1^e \frac{1}{t}\, dt.$$

Según se indica en la figura 3,

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt < 1, \text{ puesto que } 1\cdot(2-1) \text{ es una suma superior para}$$
$$f(t) = 1/t \text{ sobre } [1, 2],$$

y

$$\int_1^4 \frac{1}{t}\,dt > 1, \text{ puesto que } \tfrac{1}{2}\cdot(2-1) + \tfrac{1}{4}\cdot(4-2) = 1 \text{ es una suma}$$
$$\text{inferior para } f(t) = 1/t \text{ sobre } [1, 4].$$

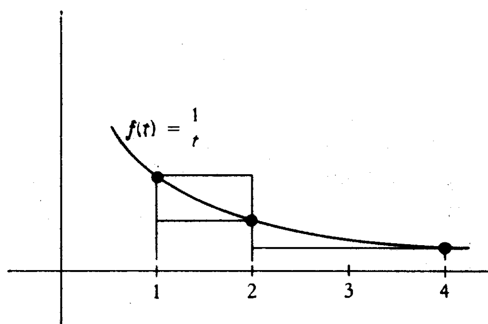


FIGURA 3

Así pues,

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt < \int_1^e \frac{1}{t}\,dt < \int_1^4 \frac{1}{t}\,dt,$$

lo cual demuestra que

$$2 < e < 4.$$

En el capítulo 19 encontraremos aproximaciones mejores para e, y demostraremos también que e es irracional (la demostración es mucho más fácil que la demostración de que π es irracional).

Según observamos al comienzo del capítulo, la ecuación

$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$$

implica que

$$\begin{aligned}\exp(x) &= [\exp(1)]^x\\ &= e^x, \text{ para todo } x \textit{ racional}.\end{aligned}$$

Al estar exp definida para todo x y $\exp(x) = e^x$ para x racionales, resulta consecuente con nuestro uso anterior de la notación exponencial *definir* e^x como $\exp(x)$ para todo x.

DEFINICIÓN

Para todo número x,

$$e^x = \exp(x).$$

Debe ahora aparecer clara la terminología «función exponencial». Hemos conseguido definir e^x para un exponente arbitrario x (incluso irracional). No hemos definido todavía a^x, si $a \neq e$, pero existe un principio razonable para guiarnos en el intento. Si x es *racional,* entonces

$$a^x = (e^{\log a})^x = e^{x\log a}.$$

Pero la última expresión está definida para *todo* x, de modo que podemos utilizarla para definir a^x.

DEFINICIÓN

Si $a > 0$, entonces, para cualquier número real x,

$$a^x = e^{x\log a}.$$

(Si $a = e$ esta definición está de acuerdo evidentemente con la anterior.)

La condición $a > 0$ es necesaria para que esté definido $\log a$. Esto no es excesivamente restrictivo, ya que, por ejemplo, no daríamos siquiera por definida una expresión tal como

$$(-1)^{1/2} \stackrel{?}{=} \sqrt{-1}$$

(Por supuesto, para ciertos x racionales, el símbolo a^x tendrá sentido según la antigua definición; por ejemplo,

$$(-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = -1.)$$

Nuestra definición de a^x fue pensada para asegurar que

$$(e^x)^y = e^{xy} \quad \text{para todo } x \text{ e } y.$$

Como podíamos esperar, esta ecuación resulta ser verdadera cuando se sustituye e por cualquier número $a > 0$. La demostración consiste en un moderadamente complicado descifre de terminología. Demostraremos al mismo tiempo las demás propiedades importantes de a^x.

TEOREMA 4

Si $a > 0$, entonces

$$(1) \quad (a^b)^c = a^{bc} \quad \text{para todo } b, c.$$

(Obsérvese que a^b será automáticamente positivo, de modo que $(a^b)^c$ estará definido);

$$(2) \quad a^1 = a \quad \text{y} \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{para todo } x, y.$$

(Obsérvese que (2) implica que esta definición de a^x concuerda con la antigua para x racionales.)

DEMOSTRACIÓN

$$(1) \quad (a^b)^c = e^{c \log a^b} = e^{c \log (e^{b \log a})} = e^{c(b \log a)} = e^{cb \log a} = a^{bc}.$$

(Cada uno de los pasos de esta cadena de igualdades está basado sobre nuestra última definición, o sobre el hecho de que $\exp = \log^{-1}$.)

$$(2) \quad a^1 = e^{1 \log a} = e^{\log a} = a,$$
$$a^{x+y} = e^{(x+y)\log a} = e^{x \log a + y \log a} = e^{x \log a} \cdot e^{y \log a} = a^x \cdot a^y. \ \blacksquare$$

La figura 4 muestra las gráficas de $f(x) = a^x$ para varios a diferentes. El comportamiento de la función depende de que sea $a < 1$, $a = 1$, o $a > 1$. Si $a = 1$, entonces $f(x) = 1^x = 1$. Supóngase $a > 1$. En este caso $\log a > 0$. Así pues,

si	$x < y$,
entonces	$x \log a < y \log a$,
de modo que	$e^{x \log a} < e^{y \log a}$,
es decir,	$a^x < a^y$.

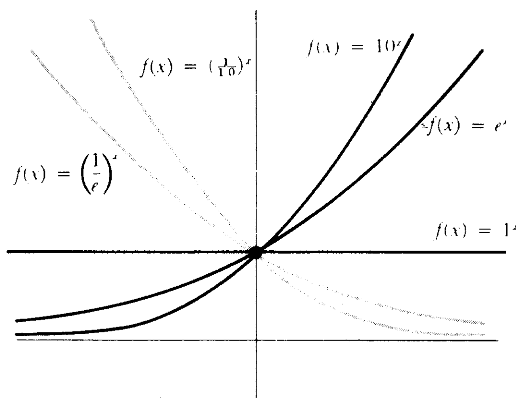


FIGURA 4

Así pues, la función $f(x) = a^x$ es creciente. Por otra parte, si $0 < a < 1$, de modo que $\log a < 0$, el mismo tipo de razonamiento indica que la función $f(x) = a^x$ es decreciente. En cualquier caso, si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces $f(x) = a^x$ es uno-uno. Puesto que exp toma todo valor positivo, es también fácil ver que a^x toma cualquier valor positivo. Así pues, la función inversa está definida para todos los números positivos y toma todos los valores. Si $f(x) = a^x$, entonces f^{-1} es la función designada generalmente por $\log_a$ (fig. 5).

Del mismo modo que a^x puede expresarse en términos de exp, así también $\log_a$ puede expresarse en términos de log. En efecto,

si	$y = \log_a x$,
entonces	$x = a^y = e^{y \log a}$,
de modo que	$\log x = y \log a$,
o	$y = \dfrac{\log x}{\log a}$.

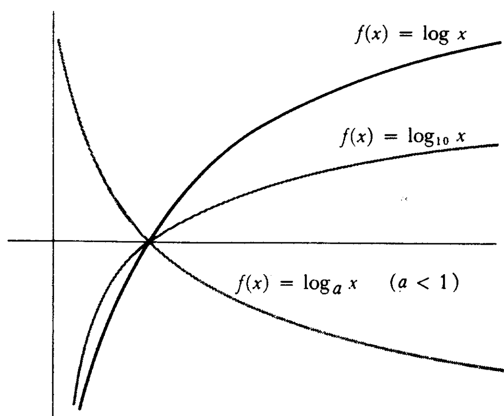


FIGURA 5

En otras palabras,

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Las derivadas de $f(x) = a^x$ y de $g(x) = \log_a x$ son ambas fáciles de hallar:

$$f(x) = e^{x \log a}, \text{ de modo que } f'(x) = \log a \cdot e^{x \log a} = \log a \cdot a^x,$$
$$g(x) = \frac{\log x}{\log a}, \text{ de modo que } g'(x) = \frac{1}{x \log a}.$$

Una función más complicada tal como

$$f(x) = g(x)^{h(x)}$$

es también fácil de derivar si se recuerda que, *por definición,*

$$f(x) = e^{h(x) \log g(x)};$$

se sigue de la regla de la cadena que

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{h(x) \log g(x)} \cdot \left[h'(x) \log g(x) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)} \right] \\ &= g(x)^{h(x)} \cdot \left[h'(x) \log g(x) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)} \right] \end{aligned}$$

No hace falta recordar esta fórmula —basta aplicar el principio en que se basa a cualquier caso específico que surja—; sin embargo, es conveniente recordar que el primer factor de la derivada será $g(x)^{h(x)}$.

Existe un caso especial de la fórmula anterior que vale la pena recordar. La función $f(x) = x^a$ fue definida anteriormente sólo para a racionales. Podemos ahora definir y hallar la derivada de la función $f(x) = x^a$ para cualquier número a; el resultado es precisamente el que podíamos esperar:

$$f(x) = x^a = e^{a \log x},$$

de modo que

$$f'(x) = \frac{a}{x} \cdot e^{a \log x} = \frac{a}{x} \cdot x^a = ax^{a-1}.$$

Las manipulaciones algebraicas con las funciones exponenciales se convertirán en una segunda naturaleza después de un poco de práctica —basta recordar que todas las reglas que deberían servir, sirven realmente—. Las propiedades básicas de exp siguen siendo las enunciadas en los teoremas 2 y 3:

$$\exp'(x) = \exp(x),$$
$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

En efecto, cada una de estas propiedades casi caracteriza la función exp. Naturalmente, exp no es la única función f que satisface $f' = f$, ya que si $f = ce^x$, entonces $f'(x) = ce^x = f(x)$; estas funciones son, sin embargo, las únicas con esta propiedad.

TEOREMA 5

Si f es derivable y

$$f'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x,$$

entonces existe un número c tal que

$$f(x) = ce^x \quad \text{para todo } x.$$

DEMOSTRACIÓN

Sea

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x}.$$

(Esto se puede hacer, puesto que $e^x \neq 0$ para todo x.) Entonces

$$g'(x) = \frac{e^x f'(x) - f(x)e^x}{(e^x)^2} = 0.$$

por lo tanto existe un número c tal que

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x} = c \text{ para todo } x. \blacksquare$$

La segunda propiedad básica de exp exige un estudio más complicado. La función exp no es evidentemente la única función f que satisface

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y).$$

En efecto, $f(x) = 0$ o cualquier función de la forma $f(x) = a^x$ satisface también esta ecuación. Pero la verdadera historia es mucho más compleja que esto —existen infinitas otras funciones que satisfacen esta propiedad, pero es imposible, sin recurrir a matemáticas más avanzadas, demostrar que exista siquiera una función distinta de las ya mencionadas. Ésta es la razón de que la definición de 10^x sea tan difícil: existen infinitas funciones f que satisfacen

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y),$$
$$f(1) = 10,$$

pero que *no* son la función $f(x) = 10^x$. Una cosa es, sin embargo, verdad: cualquier función *continua* f que satisface

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

debe ser de la forma $f(x) = a^x$ o $f(x) = 0$. (El problema **39** indica la manera de demostrar esto, y dice también algo acerca de funciones no continuas con esta propiedad.)

Además de las dos propiedades básicas enunciadas en los teoremas 2 y 3, la función exp tiene otra propiedad que es muy importante: exp «crece más rápidamente que cualquier polinomio». En otras palabras,

TEOREMA 6

Para cualquier número natural n,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

DEMOSTRACIÓN

La demostración consta de varias partes.

Parte 1. $e^x > x$ para todo x, y en consecuencia, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty$ (esto puede ser considerado como el caso $n = 0$).

Para demostrar este enunciado (que es evidente para $x \leq 0$) basta demostrar que

$$x > \log x \quad \text{para todo } x > 0.$$

Si $x < 1$ esto es evidente, puesto que $\log x < 0$. Si $x > 1$, entonces (fig. 6) $x - 1$ es una suma superior para $f(t) = 1/t$ sobre $[1, x]$, de modo que $\log x < x - 1 < x$.

Parte 2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

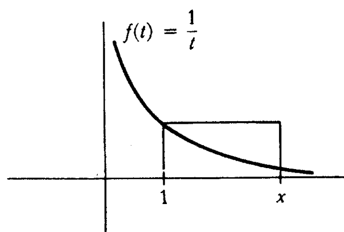


FIGURA 6

Para demostrar esto, obsérvese que

$$\frac{e^x}{x} = \frac{e^{x/2}\cdot e^{x/2}}{\dfrac{x}{2}\cdot 2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{x/2}}{\dfrac{x}{2}}\right)\cdot e^{x/2}.$$

Según la parte 1, la expresión encerrada entre paréntesis es mayor que 1, y $\lim_{x\to\infty} e^{x/2} = \infty$; esto indica que $\lim_{x\to\infty} e^x/x = \infty$.

Parte 3.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

Obsérvese que

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{(e^{x/n})^n}{\left(\frac{x}{n}\right)^n \cdot n^n} = \frac{1}{n^n} \cdot \left(\frac{e^{x/n}}{\frac{x}{n}}\right)^n.$$

La expresión dentro del paréntesis se hace arbitrariamente grande según la parte 2, de modo que la potencia n-ésima se hace arbitrariamente grande. ▌

Es ahora posible examinar cuidadosamente las siguientes funciones muy interesantes: $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$. Tenemos

$$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3}.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) < 0 \text{ para } x < 0,$$
$$f'(x) > 0 \text{ para } x > 0,$$

de modo que f es decreciente para x negativos y creciente para x positivos. Además, si $|x|$ es grande, entonces x^2 es grande, de modo que $-1/x^2$ está próximo a 0, de donde e^{-1/x^2} está próximo a 1 (fig. 7).

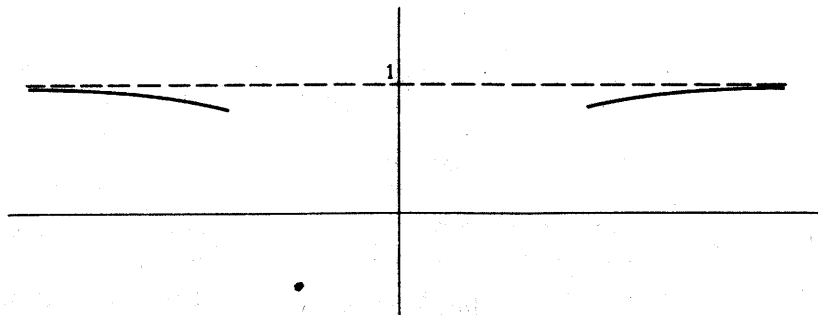


FIGURA 7

El comportamiento de f cerca de 0 es más interesante. Si x es pequeño, entonces $1/x^2$ es grande, de modo que e^{1/x^2} es grande, de donde $e^{-1/x^2} = 1/(e^{1/x^2})$ es pequeño. Este razonamiento, enunciado convenientemente con ε y δ, indica que

$$\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0.$$

Por lo tanto, si definimos

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

entonces la ~~función f es~~ continua (fig. 8). De hecho, f es en realidad derivable en 0:

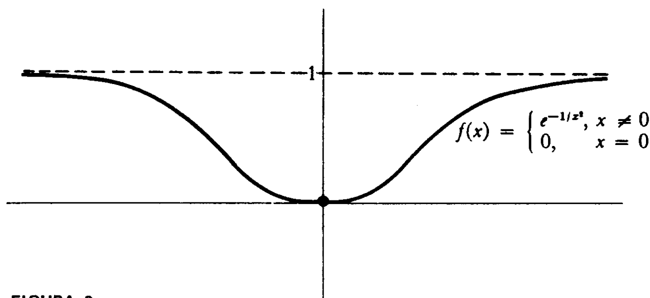


FIGURA 8

en efecto,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h}}{e^{(1/h)^2}} \\ &= \lim_{x\to \infty} \frac{x}{e^{(x^2)}}. \end{aligned}$$

Sabemos ya que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty;$$

con mayor razón es verdad que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{(x^2)}}{x} = \infty,$$

lo cual significa que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{(x^2)}} = 0.$$

Así pues,

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \cdot \dfrac{2}{x^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Podemos ahora calcular que

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{-1/h^2} \cdot \dfrac{2}{h^3}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot e^{-1/h^2}}{h^4} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot \dfrac{1}{h^4}}{e^{1/h^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^4}{e^{(x^2)}}; \end{aligned}$$

un razonamiento parecido al que acabamos de dar indica que $f''(0) = 0$. Así pues,

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \cdot \dfrac{-6}{x^4} + e^{-1/x^2} \cdot \dfrac{4}{x^6}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Este razonamiento puede proseguirse. Se puede efectivamente demostrar mediante inducción (problema 29) que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k. La función f es *extremadamente* llana en 0, y se aproxima a 0 tan rápidamente que puede enmascarar muchas irregularidades de otras funciones. Por ejemplo (fig. 9), supóngase que

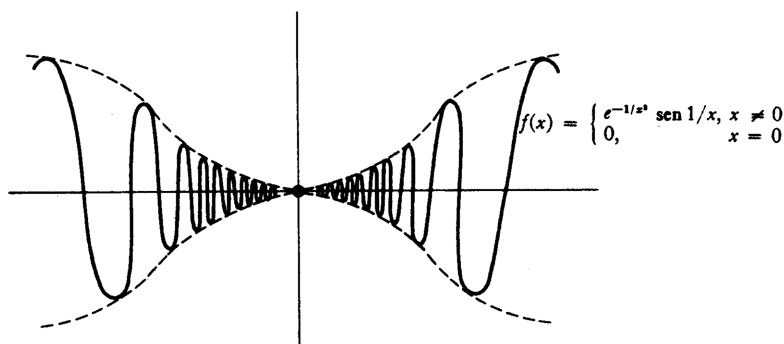


FIGURA 9

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \cdot \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Se puede demostrar (problema 42) que para esta función se cumple también que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k. Este ejemplo hace ver, quizá con más fuerza que cualquier otro, lo perversa que puede ser una función sin dejar de ser infinitamente derivable. En la parte IV investigaremos condiciones todavía más restrictivas para una función, las cuales finalmente excluirán los comportamientos de este tipo.

PROBLEMAS

1. Derivar cada una de las funciones siguientes (recordar que a^{b^c} designa siempre $a^{(b^c)}$).

(i) $f(x) = e^{e^{e^x}}$.
(ii) $f(x) = \log(1 + \log(1 + \log(1 + e^{1+e^{1+x}})))$.
(iii) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}$.
(iv) $f(x) = e^{\left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)}$.
(v) $f(x) = \operatorname{sen} x^{\operatorname{sen} x^{\operatorname{sen} x}}$.
(vi) $f(x) = \log_{(e^x)} \operatorname{sen} x$.
(vii) $f(x) = \left[\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)\right]^{\log(\operatorname{sen} e^x)}$

(viii) $f(x) = (\log(3 + e^4))^{e^{4x}} + (\text{arcsen}\, x)^{\log 3}$.
(ix) $f(x) = (\log x)^{\log x}$.
(x) $f(x) = x^x$.

2. (a) La derivada de $\log \circ f$ es f'/f.
Esta expresión recibe el nombre de *derivada logarítmica* de f. Resulta muchas veces más fácil de calcular que f', ya que los productos y potencias de la expresión de f al pasar a $\log \circ f$ se convierten en sumas y productos. Se puede después captar la derivada f' sin más que multiplicar por f; a este proceso se le da el nombre de *derivación logarítmica*.
(b) Aplicar la derivación logarítmica para obtener la derivada $f'(x)$ de cada una de las siguientes funciones:

(i) $f(x) = (1 + x)(1 + e^{x^2})$.

(ii) $f(x) = \dfrac{(3 - x)^{1/3}x^2}{(1 - x)(3 + x)^{2/3}}$.

(iii) $f(x) = (\text{sen}\, x)^{\cos x} + (\cos x)^{\text{sen}\, x}$.

(iv) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}(1 + x^3)}$.

3. Hallar

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt$$

(para $f > 0$ en $[a, b]$).

4. Hallar la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = e^{x+1}$.
(b) $f(x) = e^{\text{sen}\, x}$.
(c) $f(x) = e^x + e^{-x}$.
(d) $f(x) = e^x - e^{-x}$.
(Comparar las gráficas con las de exp y 1/exp.) [para (c) y (d)]
(e) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \dfrac{2}{e^{2x} + 1}$.

5. Hallar los siguientes límites mediante la regla de l'Hôpital:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^2}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - x^2/2 - x^3/6}{x^3}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^3}$.

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x) - x + x^2/2}{x^2}$.

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x) - x + x^2/2}{x^3}$.

(vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x) - x + x^2/2 - x^3/3}{x^3}$.

6. Las funciones

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1},$$

reciben los nombres de **seno hiperbólico, coseno hiperbólico** y **tangente hiperbólica,** respectivamente. Existen muchas analogías entre estas funciones

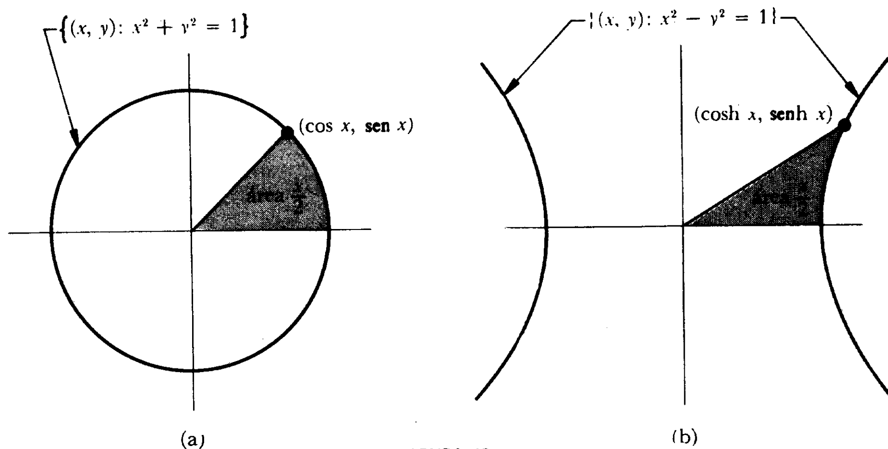


FIGURA 10

y las correspondientes funciones trigonométricas ordinarias. Una analogía queda ilustrada en la figura 10; una demostración de que la región indicada en la figura 10(b) tiene realmente área $x/2$ es mejor diferirla hasta el próximo capítulo, en el que vamos a desarrollar métodos para calcular integrales. Otras analogías se estudian en los tres problemas siguientes, pero para las analogías más profundas tendremos que esperar hasta el capítulo 26. El lector que no haya hecho ya el problema 2, conviene que halle las gráficas de las funciones senh, cosh, y tgh.

7. Demostrar que

(a) $\cosh^2 - \operatorname{senh}^2 = 1$.
(b) $\operatorname{tgh}^2 + 1/\cosh^2 = 1$.
(c) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$.
(d) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$.
(e) $\operatorname{senh}' = \cosh$.
(f) $\cosh' = \operatorname{senh}$.
(g) $\operatorname{tgh}' = \dfrac{1}{\cosh^2}$.

8. Las funciones senh y tgh son uno-uno; sus inversas, designadas por arg senh y arg tgh (el «argumento» del seno y de la tangente hiperbólicos), están definidas sobre $\mathbf{R}$ y $(-1, 1)$ respectivamente. Si se restringe cosh a $[0, \infty)$ tiene una inversa, designada por arg cosh, la cual está definida sobre $[1, \infty)$. Demostrar, utilizando la información del problema 7, que

(a) $\operatorname{senh}(\cosh^{-1} x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
(b) $\cosh(\operatorname{senh}^{-1} x) = \sqrt{1 + x^2}$.
(c) $(\operatorname{senh}^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
(d) $(\cosh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ para $x > 1$.
(e) $(\operatorname{tgh}^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ para $|x| < 1$.

9. (a) Hallar una fórmula explícita para senh^{-1}, $\cosh^{-1}$, y tgh^{-1} (despejando x en la ecuación $y = \operatorname{senh}^{-1} x$, para x en función de y, etc.).
(b) Hallar

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx,$$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \quad \text{para } a,\ b > 1 \quad \text{o} \quad a,\ b < 1,$$

$$\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,dx \quad \text{para } |a|,\ |b| < 1.$$

Comparar la solución de la tercera integral con la que se obtiene poniendo

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right].$$

10. Demostrar que

$$F(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt$$

no es acotada en $[2, \infty)$.

11. Sea f una función no decreciente en $[1, \infty)$ y definamos

$$F(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt, \qquad x \geq 1.$$

Demostrar que f es acotada en $[1, \infty)$ si y sólo si $F/\log$ es acotada en $[1, \infty)$.

12. Hallar

(a) $\lim_{x\to\infty} a^x$ para $0 < a < 1$. (Recuérdese la definición.)

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{(\log x)^n}$.

(c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\log x)^n}{x}$.

(d) $\lim_{x\to 0^+} x(\log x)^n$. Indicación: $x(\log x)^n = \dfrac{(-1)^n\left(\log \dfrac{1}{x}\right)^n}{\dfrac{1}{x}}$.

(e) $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

13. Hallar la gráfica de $f(x) = x^x$ para $x > 0$. [Utilizar el problema 12(e).]

14. (a) Hallar el valor mínimo de $f(x) = e^x/x^n$ para $x > 0$, y concluir que $f(x) > e^n/n^n$ para $x > n$.
(b) Utilizando la expresión $f'(x) = e^x(x - n)/x^{n+1}$, demostrar que $f'(x) > e^{n+1}/(n+1)^{n+1}$ para $x > n + 1$, y obtener así otra demostración de que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

15. Hallar la gráfica de $f(x) = e^x/x^n$.

16. (a) Hallar $\lim_{y\to 0} \log(1 + y)/y$. Se puede utilizar la regla de l'Hôpital pero sería ridículo.
(b) Hallar $\lim_{x\to\infty} x \log (1 + 1/x)$.
(c) Demostrar que $e = \lim_{x\to\infty} (1 + 1/x)^x$.
(d) Demostrar que $e^a = \lim_{x\to\infty} (1 + a/x)^x$. [Es posible deducir esto de la parte (c) con sólo un poco de habilidad algebraica.]
*(e) Demostrar que $\log b = \lim_{x\to\infty} x(b^{1/x} - 1)$.

17. Hallar la gráfica de $f(x) = (1 + 1/x)^x$ para $x > 0$. [Utilizar el problema 16(c).]

18. Si un banco da un a por ciento de interés anual, entonces una inversión inicial I produce $I(1 + a/100)$ en un año. Si el banco compone el interés (cuenta el interés producido como parte del capital para el cálculo del interés del año siguiente), entonces la inversión inicial se convierte en $I(1 + a/100)^n$ al cabo de n años. Supongamos ahora que el interés se da dos veces al año. La cantidad final después de n años no es, ¡atención! $I(1 + a/100)^{2n}$, sino sólo $I(1 + a/200)^{2n}$; aunque el interés se da doble número de veces, debe ser dividido por 2 en cada cálculo, ya que el interés es $a/2$ por medio año. Esta cantidad es mayor que $I(1 + a/100)^n$, pero no mucho mayor. Supóngase que el banco compone ahora el interés de manera continua, es decir, el banco considera lo que debería producir la inversión cuando se compone k veces por año y después toma la cota superior mínima de todos estos números. ¿Cuánto producirá una inversión inicial de una peseta en un año?

19. (a) Sea $f(x) = \log|x|$ para $x \neq 0$. Demostrar que $f'(x) = 1/x$ para $x \neq 0$.
(b) Si $f(x) \neq 0$ para todo x, demostrar que $(\log|f|)' = f'/f$.

20. Supóngase que en un cierto intervalo la función f satisface $f' = cf$ para un número c.

(a) Suponiendo que f no es nunca 0, aplicar el problema 19(b) para demostrar que $|f(x)| = le^{cx}$ para algún número $l(> 0)$. De donde se sigue que $f(x) = ke^{cx}$ para algún k.

(b) Demostrar que este resultado sigue siendo válido sin necesidad de suponer que f no sea nunca 0. Ayuda: Demostrar que f no puede ser cero en el extremo de un intervalo abierto en todo el cual f sea distinto de cero.

(c) Dar una demostración más sencilla de que es $f(x) = ke^{cx}$ para algún k considerando la función $g(x) = f(x)/e^{cx}$.

(d) Supóngase que es $f' = fg'$ para alguna función g. Demostrar que $f(x) = ke^{g(x)}$ para algún k.

***21.** Una sustancia radiactiva disminuye a un ritmo proporcional a la cantidad que de ella queda (puesto que todos los átomos tienen la misma probabilidad de desintegrarse, la desintegración total es proporcional al número de átomos remanentes). Si $A(t)$ es la cantidad en el tiempo t, esto significa que $A'(t) = cA(t)$ para algún c (el cual representa la probabilidad de que se desintegre un átomo).

(a) Hallar $A(t)$ en términos de la cantidad $A_0 = A(0)$ presente en el tiempo 0.

(b) Demostrar que existe un número τ (la «vida media» del elemento radiactivo) con la propiedad de que $A(t + \tau) = A(t)/2$.

***22.** *La ley del enfriamiento de Newton* afirma que un objeto se enfría en razón proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura ambiente. Hallar la temperatura $T(t)$ del objeto en el tiempo t, en términos de su temperatura T_0 en el tiempo 0, suponiendo que la temperatura del ambiente se mantiene constante, M. Indicación: Para resolver la ecuación diferencial que expresa la ley de Newton, recuérdese que $T' = (T - M)'$.

***23.** Demostrar que si $f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, entonces $f = 0$.

24. Hallar todas las funciones continuas f que satisfacen

(i) $\int_0^x f = e^x$.

(ii) $\int_0^{x^2} f = 1 - e^{2x^2}$.

25. Dada una función derivable f, hallar todas las funciones continuas g que satisfacen

$$\int_0^{f(x)} fg = g(f(x)) - 1.$$

***26.** Hallar todas las funciones f que satisfacen $f'(t) = f(t) + \int_0^1 f(t)\,dt$.

27. Hallar todas las funciones continuas f que satisfacen la ecuación

$$(f(x))^2 = \int_0^x f(t)\,\frac{t}{1+t^2}\,dt.$$

28. (a) Sean f y g funciones no negativas continuas en $[a, b]$, y sea $C > 0$. Supóngase que

$$f(x) \leq C + \int_a^x fg \qquad a \leq x \leq b.$$

Demostrar la *desigualdad de Gronwall:*

$$f(x) \leq Ce^{\int_a^x g}.$$

Indicación: Considerar la derivada de la función $h(x) = C + \int_a^x fg$.

(b) Aplicar un razonamiento de paso al límite para demostrar que este razonamiento sigue siendo válido si es $C = 0$.

(c) Supóngase que es $f'(x) = g(x)f(x)$ para alguna función continua g, y que es $f(0) = 0$. Entonces es $f = 0$ (comparar con el problema 20).

***29.** (a) Demostrar que

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \leq e^x \text{ para } x \geq 0.$$

Indicación: Aplíquese inducción sobre n, y compárense las derivadas.

(b) Dar una nueva demostración de que $\lim_{x\to\infty} e^x/x^n = \infty$.

30. Dar todavía otra demostración de este hecho, utilizando la forma adecuada de la regla de l'Hôpital. (Véase el problema 11-53).

31. (a) Calcular $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt$. (Antes de proceder al cálculo conviene hacer una estimación bien estudiada.)

(b) Calcular los límites siguientes

(i) $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} \int_x^{x+(1/x)} e^{t^2}\,dt.$

(ii) $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} \int_x^{x+(\log x/x)} e^{t^2}\,dt.$

(iii) $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} \int_x^{x+(\log x/2x)} e^{t^2}\,dt.$

32. Este problema delinea la introducción clásica de los logaritmos y de los exponenciales. Para empezar supondremos simplemente que la función $f(x) = a^x$, definida en forma elemental para los x racionales puede extenderse de algún modo a una función continua uno a uno que obedece en líneas generales a las mismas reglas algebraicas (para una demostración directa de esto véase el problema 21-29). La inversa de f se designará por $\log_a$.

(a) Demostrar, partiendo directamente de la definición, que

$$\log_a'(x) = \lim_{h\to 0} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}$$
$$= \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(\lim_{k\to 0} (1 + k)^{1/k}\right).$$

Así pues, el problema se reduce únicamente a la determinación de $\lim_{h\to 0} (1 + h)^{1/h}$. Si podemos demostrar que esto tiene un límite e, entonces $\log_e'(x) = \frac{1}{x} \log_e e = 1/x$, y en consecuencia $\exp = \log_e^{-1}$ tiene la derivada $\exp'(x) = \exp(x)$.

(b) Sea $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para números naturales n. Por aplicación del teorema del binomio, demostrar que

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Concluir que es $a_n < a_{n+1}$.

(c) Haciendo uso del hecho de ser $1/k! \leq 1/2^k$ para $k \geq 2$, demostrar que es $a_n < 3$ para todo n. Así pues, el conjunto de números $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ es acotado y tiene por lo tanto un extremo superior e. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ tenemos $e - a_n < \varepsilon$ para valores de n suficientemente grandes.

(d) Si $n \leq x \leq n + 1$, entonces

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Deducir de aquí que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Demostrar también que $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, y concluir que $\lim_{h\to 0}\,(1+h)^{1/h} = e$.

***33.** Un punto P se mueve a lo largo de un segmento rectilíneo AB de longitud 10^7 mientras que otro punto Q se mueve a lo largo de un rayo infinito (figura 11). La velocidad de P es siempre igual a la distancia desde P a B (en otras palabras, si $P(t)$ es la posición de P en el tiempo t, entonces $P'(t) = 10^7 - P(t)$), mientras que Q se mueve con velocidad constante $Q'(t) = 10^7$. La distancia recorrida por Q en el tiempo t se define como el *logaritmo neperiano* de la distancia desde P hasta B en el tiempo t. Así pues,

$$10^7 t = \ln\,[10^7 - P(t)].$$

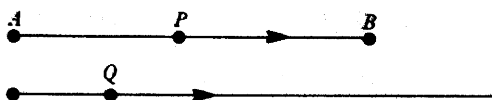


FIGURA 11

Esta fue la definición de logaritmo dada por Neper (1550-1617)* en su publicación de 1614, *Mirifici logarithmonum canonis description* (Descripción de las maravillosas leyes de los logaritmos); este trabajo fue hecho *antes* de inventarse el uso de los exponentes. Se eligió el número 10^7 porque las tablas de Neper (destinadas a cálculos astronómicos y de navegación), daban los logaritmos de senos de ángulos para los cuales las mejores tablas disponibles se extendían a siete decimales, y Neper quería evitar fracciones. Demostrar que

$$\ln\, x = 10^7 \log \frac{10^7}{x}.$$

Indicación: Utilizar el mismo artificio que en el problema 22 para despejar P en la ecuación.

***34.** (a) Trazar un esquema de la gráfica de $f(x) = (\log x)/x$ (poniendo atención particularmente al comportamiento cerca de 0 y de ∞).

* En la mayoría de los textos españoles, se da el nombre de logaritmo neperiano de x al logaritmo natural $\log x$. Debe quedar bien claro que la función log Nep, originariamente definida por Neper, es, según se indica, distinta de log.

(b) ¿Cuál de los números e^{π} o π^e es mayor?

(c) Demostrar que si $0 < x < 1$, ó $x = e$, entonces el único número y que satisface $x^y = y^x$ es $y = x$; pero si $x > 1$, $x \neq e$, entonces existe precisamente un número $y \neq x$ que satisface $x^y = y^x$; además, si $x < e$, entonces $y > e$, y si $x > e$, entonces $y < e$. [Interpretar este enunciado en términos de la gráfica de la parte (a).]

(d) Demostrar que si x e y son números naturales y $x^y = y^x$, entonces $x = y$ o $x = 2$, $y = 4$, ó $x = 4$, $y = 2$.

(e) Demostrar que el conjunto de los pares (x, y) con $x^y = y^x$ consiste en una curva y una recta que se cortan; hallar la intersección y dibujar un esquema aproximado.

**(f) Para $1 < x < e$ sea $g(x)$ el único número $> e$ con $x^{g(x)} = g(x)^x$. Demostrar que g es derivable. (Es conveniente considerar por separado las funciones,

$$f_1(x) = \frac{\log x}{x}, \quad 0 < x < e$$

$$f_2(x) = \frac{\log x}{x}, \quad e < x$$

y escribir g en términos de f_1 y f_2. Haciendo debidamente esta parte se debe poder demostrar que

$$g'(x) = \frac{[g(x)]^2}{1 - \log g(x)} \cdot \frac{1 - \log x}{x^2}.\Big)$$

*35. Este problema utiliza el material del apéndice al capítulo 11.

(a) Demostrar que exp es convexa y log es cóncava.

(b) Demostrar que si $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y todos los p_i son > 0, entonces

$$z_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{p_n} < p_1 z_1 + \cdots + p_n z_n.$$

(Utilizar el problema 9 del apéndice al capítulo 11.)

(c) Deducir otra demostración de que $G_n \leq A_n$ (problema 2-22).

36. (a) Sea f una función positiva en $[a, b]$ y sea P_n la partición de $[a, b]$ en n intervalos iguales. Aplicar el problema 2-22 para demostrar que

$$\frac{1}{b-a} L(\log f, P_n) \le \log\left(\frac{1}{b-a} L(f, P_n)\right).$$

(b) Aplicando el problema 13-12, concluir que para funciones continuas f se tiene

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f \le \log\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right).$$

(c) Aplicar el problema 13-28 para concluir que esta desigualdad se mantiene siempre que f sea positiva e integrable en $[a, b]$.

Este problema nos revela un artificio útil para obtener resultados acerca de integrales: resulta a veces más sencillo, y también suficiente, empezar considerando sólo funciones continuas. Sin embargo, este ejemplo particular se podría haber tratado de distinta manera.

37. En el problema 35 se deduce el resultado del problema 2-22 como caso particular de la desigualdad

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} p_i g(x_i)$$

para $p_i > 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y g convexa. Si g es cóncava, tenemos la desigualdad contraria

$$\sum_{i=1}^{n} p_i g(x_i) \le g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right).$$

(a) Aplicar esto con $g = \log$ para demostrar el resultado del problema 36 directamente para cualquier función integrable f.

(b) Formular un teorema general del cual el problema 36 sea un caso particular.

38. Supóngase que f satisface $f' = f$ y $f(x + y) = f(x)f(y)$ para todo x e y. Demostrar que $f = \exp$ o $f = 0$.

***39.** Demostrar que si f es continua y $f(x + y) = f(x)f(y)$ para todo x e y, entonces o bien $f = 0$ ó $f(x) = [f(1)]^x$ para todo x. Indicación: Demostrar que $f(x) = [f(1)]^x$ para x racionales, y después utilizar el problema 8-6. Este problema está íntimamente relacionado con el problema 8-7, y la información mencionada al final del problema 8-7 puede utilizarse para demostrar que existen funciones discontinuas f que satisfacen $f(x + y) = f(x)f(y)$.

***40.** Demostrar que si f es una función continua definida sobre los reales positivos, y $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todos los x e y positivos, entonces $f = 0$ ó $f(x) = f(e) \log x$ para todo $x > 0$. Indicación: Considérese $g(x) = f(e^x)$.

***41.** Demostrar que si $f(x) = e^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 0$, entonces $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k.

***42.** Demostrar que si $f(x) = e^{-1/x^2}$ sen $1/x$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. entonces $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k.

43. (a) Demostrar que si α es una raíz de la ecuación

$$(*) \quad a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

entonces la función $y(x) = e^{\alpha x}$ satisface la ecuación diferencial

$$(**) \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

*(b) Demostrar que si α es una raíz doble de (*), entonces $y(x) = xe^{\alpha x}$ satisface también (**). Indicación: Recordar que si α es una raíz doble de una ecuación polinómica $f(x) = 0$, entonces $f'(\alpha) = 0$.

*(c) Demostrar que si α es una raíz de orden r de (*), entonces $y(x) = x^k e^{\alpha x}$ es una solución para $0 \leq k \leq r - 1$.
Si (*) tiene como raíces n números reales (contando las multiplicidades), la parte (c) proporciona n soluciones $y_1, \ldots, y_n$ de (**).

(d) Demostrar que en este caso la función $c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$ satisface también (**).
Constituye un teorema el que en este caso son éstas las únicas soluciones de (**). El problema 20 y los dos problemas siguientes demuestran casos particulares de este teorema, y el caso general se considera en el problema 19-19. Veremos en el capítulo 26 lo que hay que hacer cuando (*) no tiene por raíces n números reales.

***44.** Supóngase que f satisface $f'' - f = 0$ y que $f(0) = f'(0) = 0$. Demostrar que $f = 0$ como sigue.

(a) Demostrar que $f^2 - (f')^2 = 0$.

(b) Demostrar que $f(x) \neq 0$ para todo x de algún intervalo (a, b). Demostrar que, o bien $f(x) = ce^x$, o bien $f(x) = ce^{-x}$ para todo x de (a, b), para alguna constante c.

**(c) Si $f(x_0) \neq 0$ para $x_0 > 0$, por ejemplo, entonces existiría un número a tal

que $0 \leq a < x_0$ y $f(a) = 0$, mientras que $f(x) \neq 0$ para $a < x < x_0$. ¿Por qué? Utilizar este hecho y la parte (b) para deducir una contradicción.

***45.** (a) Demostrar que si f satisface $f'' - f = 0$, entonces $f(x) = ae^x + be^{-x}$ para ciertos a y b. [Imaginar primero cómo deben ser a y b en términos de $f(0)$ y $f'(0)$, y utilizar después el problema 44.]

(b) Demostrar también que $f = a\,\text{senh} + b\cosh$ para ciertos (diferentes) a y b.

46. Hallar todas las funciones f que satisfacen

(a) $f^{(n)} = f^{(n-1)}$.
(b) $f^{(n)} = f^{(n-2)}$.

***47.** Este problema, compañero del problema 15-30, esboza un tratamiento de la función exponencial que empieza con la suposición de que la ecuación diferencial $f' = f$ tiene una solución distinta de 0.

(a) Supóngase que existe una función $f \neq 0$ con $f' = f$. Demostrar que $f(x) \neq 0$ para todo x considerando la función $g(x) = f(x_0 + x)f(x_0 - x)$, donde $f(x_0) \neq 0$.

(b) Demostrar que existe una función f que satisface $f' = f$ y $f(0) = 1$.

(c) Para esta f demostrar que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ considerando la función $g(x) = f(x + y)/f(x)$.

(d) Demostrar que f es uno-uno y que $(f^{-1})'(x) = 1/x$.

48. Sean f y g funciones continuas tales que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Diremos que *el crecimiento de f es de orden superior al de g* ($f \gg g$) si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty,$$

y diremos que *los crecimientos de f y g son del mismo orden* ($f \sim g$) si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{existe y es} \quad \neq 0,\ \infty.$$

Por ejemplo, $\exp \gg P$ para cualquier función polinómica P, y $P \gg \log^n$ para cualquier entero positivo n.

(a) Dadas f y g, con $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, ¿se tiene que cumplir necesariamente una de las tres condiciones $f \gg g$, $g \gg f$ o $f \sim g$?

(b) Si $f \gg g$, entonces $f + g \sim f$.

(c) Si

$$\frac{\log f}{\log g} \geq c > 1$$

para valores de x suficientemente grandes, entonces $f \gg g$.

(d) Si $f \gg g$ y $F(x) = \int_0^x f$, $G(x) = \int_0^x g$, ¿se sigue de ello necesariamente que $F \gg G$?

(e) Ordenar cada uno de los siguientes conjuntos de funciones de menor a mayor orden de crecimiento (por comodidad, indicamos cada función dando simplemente su valor en x.

(i) x^3, e^x, $x^3 + \log(x^3)$, $\log 4x$, $(\log x)^x$, x^x, $x + e^{-5x}$, $x^3 \log x$.
(ii) $x \log^2 x\ x$, e^{5x}, $\log(x^x)$, e^{x^2}, x^x, $x^{\log x}$, $(\log x)^x$.
(iii) e^x,x^e, x^x, e^{x^2}, 2^x, $e^{x/2}$, $(\log x)^{2x}$.

49. Supóngase que g_1, g_2, g_3, ..., son funciones continuas. Demostrar que existe una función continua f cuyo orden de crecimiento es mayor que el de cualquiera de las g_i.

50. Demostrar que $\log_{10} 2$ es irracional.

CAPÍTULO

18

INTEGRACIÓN EN TÉRMINOS ELEMENTALES

Todo cálculo de una derivada proporciona, según el segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal, una fórmula para integrales. Por ejemplo,

$$\text{si } F(x) = x(\log x) - x, \quad \text{entonces } F'(x) = \log x;$$

en consecuencia,

$$\int_a^b \log x \, dx = F(b) - F(a) = b(\log b) - b - [a(\log a) - a], \quad 0 < a, b.$$

Las fórmulas de este tipo se simplifican considerablemente si adoptamos la notación

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Podemos escribir entonces

$$\int_a^b \log x \, dx = x(\log x) - x \Big|_a^b.$$

Este cálculo de $\int_a^b \log x \, dx$ dependió del feliz hallazgo de que log es la derivada de la función $F(x) = x(\log x) - x$. En general, una función F que satisface $F' = f$ recibe el nombre de **primitiva** de f. Por supuesto, **una función continua f tiene siempre una primitiva,** a saber,

$$F(x) = \int_a^x f,$$

pero en este capítulo intentaremos hallar una primitiva que pueda expresarse en términos de funciones conocidas tales como sen, log, etc. Una función que puede expresarse de esta forma recibe el nombre de función elemental. Propiamente hablando,* una **función elemental** es una función que puede obtenerse mediante suma, multiplicación, división y composición a partir de las funciones racionales, las funciones trigonométricas y sus inversas y las funciones log y exp.

Desde el principio debemos decir que, en general, no es posible encontrar primitivas elementales. Por ejemplo, no existe ninguna función *elemental* F tal que

$$F'(x) = e^{-x^2} \quad \text{para todo } x$$

[no se trata meramente de un informe sobre el estado presente de ignorancia matemática; existe un teorema (difícil) que dice que una tal función no existe]. Y lo que es peor, no tendremos manera de saber si es o no posible hallar una primitiva elemental (el lector tendrá que confiar en que los problemas de este capítulo no contengan erratas). Al ser tan insegura la búsqueda de funciones elementales, el encontrarlas proporciona a menudo cierta satisfacción peculiar. Si observamos que la función

$$F(x) = x \ \text{arctg}\ x - \frac{\log(1 + x^2)}{2}$$

satisface

$$F'(x) = \text{arctg}\ x$$

(la manera de llegar a tal observación es totalmente otro asunto), de modo que

$$\int_a^b \text{arctg}\ x\, dx = x \ \text{arctg}\ x - \frac{\log(1 + x^2)}{2}\Bigg|_a^b,$$

entonces podemos tener la impresión de que «verdaderamente» hemos calculado $\int_a^b \text{arctg}\ x\, dx$.

* La definición que vamos a dar será precisa, pero en realidad no exacta, o por lo menos no del todo corriente. Por lo general las definiciones que se dan incluyen como funciones elementales a las funciones «algebraicas», es decir, a las funciones g que satisfacen una ecuación

$$(g(x))^n + f_{n-1}(x)(g(x))^{n-1} + \cdots + f_0(x) = 0,$$

donde las f son funciones racionales. Pero para nuestros fines podemos dejar de lado estas funciones.

Este capítulo consiste en algo más que en dar métodos para hallar primitivas elementales de funciones elementales dadas (proceso conocido simplemente por «integración»), junto con alguna notación, abreviaciones, y convenios destinados a facilitar este proceso. Esta preocupación por las funciones elementales se justifica mediante tres consideraciones:

(1) La integración constituye un tema clásico de cálculo infinitesimal, del cual todo el mundo debe estar algo enterado.
(2) En ocasiones puede ocurrir que sea preciso calcular una integral, en condiciones en que no sea posible consultar ninguna de las tablas corrientes de integrales [por ejemplo, puede ocurrir que el lector siga un curso (de física) en el cual se le exija saber integrar].
(3) Los «métodos» más útiles de integración son en realidad teoremas muy importantes (aplicables a todas las funciones, no solamente a las elementales).

Naturalmente, la razón crucial es la última. Aunque el lector piense olvidar cómo se integra (y es probable que la primera vez se le olviden algunos detalles), nunca deberá olvidar los métodos básicos.

Estos métodos básicos constituyen teoremas que nos permiten expresar primitivas de una función en términos de primitivas de otras funciones. Para empezar a integrar necesitaremos, por lo tanto, una lista de primitivas para *algunas* funciones; una tal lista puede obtenerse simplemente derivando algunas funciones bien conocidas. La lista que vamos a dar utiliza un símbolo corriente que requiere alguna explicación. El símbolo

$$\int f \quad \text{o} \quad \int f(x)\,dx$$

significa «una primitiva de f» o, más precisamente, «el conjunto de todas las primitivas de f». El símbolo $\int f$ será con frecuencia utilizado en el enunciado de teoremas, mientras que $\int f(x)\,dx$ es más útil en fórmulas tales como la siguiente:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}.$$

Esta «ecuación» significa que la función $F(x) = x^4/4$ satisface $F'(x) = x^3$. No puede ser interpretada literalmente porque el segundo miembro es un número y no una función, pero en este contexto vamos a tolerar estas discrepancias; lo que nos proponemos es convertir el proceso de integración en algo tan mecánico como sea

posible y para ello recurriremos a toda clase de artificios. Otra característica de la ecuación merece ser mencionada. Casi todos escriben

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C,$$

para destacar que las primitivas de $f(x) = x^3$ son precisamente las funciones de la forma $F(x) = x^3 + C$ para algún número C. Aunque es posible (problema 13) llegar a contradicciones si no se tiene en cuenta este punto, en la práctica no surgen tales dificultades, y la preocupación por esta constante no es más que un estorbo.

Un convenio importante acompaña esta notación: la letra que aparece a la derecha de la ecuación debe ser la misma letra que aparece después de «la letra d» en el primer miembro; así pues,

$$\int u^3\,du = \frac{u^4}{4},$$

$$\int tx\,dx = \frac{tx^2}{2},$$

$$\int tx\,dt = \frac{xt^2}{2}.$$

Una función $\int f(x)\,dx$, es decir, una primitiva de f, recibe con frecuencia el nombre de «integral indefinida» de f, mientras que $\int_a^b f(x)\,dx$ es llamada, por contraste, «integral definida». Esta sugestiva notación da buen resultado en la práctica, pero es importante no dejarse extraviar por ella. Aun a riesgo de cansar al lector, hacemos notar una vez más el siguiente hecho: la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *no* se define como «$F(b) - F(a)$, donde F es una integral indefinida de f» (si esta afirmación no le parece al lector reiterativa, será conveniente que vuelva a leer el capítulo 13).

Podemos comprobar las fórmulas de la siguiente corta tabla de integrales indefinidas, derivando simplemente las funciones indicadas a la derecha.

$$\int a\,dx = ax$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x$ $\left(\int \frac{1}{x}\,dx\right.$ se escribe a menudo por conveniencia $\int \frac{dx}{x}$; abreviaciones análogas se usan en los dos últimos ejemplos de esta tabla.)

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x$$

Dos fórmulas generales de la misma naturaleza son consecuencia de los teoremas acerca de derivación:

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$
$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx.$$

Estas ecuaciones deben interpretarse en el sentido de que una primitiva de $f + g$ puede obtenerse sumando una primitiva de f con una primitiva de g, mientras que una primitiva de $c \cdot f$ puede obtenerse multiplicando por c una primitiva de f.

Nótense las consecuencias de estas fórmulas para integrales definidas: Si f y g son continuas, entonces

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$
$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

Esto se sigue de las fórmulas anteriores, ya que cada integral definida puede escribirse como diferencia entre los valores en a y en b de una primitiva corres-

pondiente. La continuidad hace falta para saber que estas primitivas existen. (Por supuesto, las fórmulas se cumplen también cuando f y g son únicamente integrables, pero recuérdese la dificultad mucho mayor que ofrecen las demostraciones en este caso.)

La fórmula del producto para la derivada proporciona un teorema más interesante, que se expresará de varias maneras distintas.

TEOREMA 1
(INTEGRACIÓN POR PARTES)

Si f' y g' son continuas, entonces

$$\int fg' = fg - \int f'g,$$
$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

(Obsérvese que en la segunda ecuación $f(x)\,g(x)$ denota la *función* $f\cdot g$.)

DEMOSTRACIÓN

La fórmula

$$(fg)' = f'g + fg'$$

puede escribirse

$$fg' = (fg)' - f'g.$$

Así pues,

$$\int fg' = \int (fg)' - \int f'g,$$

y fg puede elegirse como una de las funciones denotadas por $\int (fg)'$. Esto demuestra la primera fórmula.

La segunda fórmula es simplemente otra expresión de la primera, y la tercera fórmula es consecuencia inmediata de cualquiera de las dos primeras. ▮

Según indican los siguientes ejemplos, la integración por partes es útil cuando la función a integrar puede considerarse como producto de una función f, cuya derivada es más sencilla que f, por otra función que se vea claramente que es de la forma g'.

$$\int \underset{\substack{\downarrow\downarrow\\ fg'}}{xe^x}\,dx = \underset{\substack{\downarrow\downarrow\\ fg}}{xe^x} - \int \underset{\substack{\downarrow\\ f'}}{1}\cdot \underset{\substack{\downarrow\\ g}}{e^x}\,dx$$

$$= xe^x - e^x.$$

$$\int \underset{\substack{\downarrow\\ f}}{x}\,\underset{\substack{\downarrow\\ g'}}{\operatorname{sen} x}\,dx = \underset{\substack{\downarrow\\ f}}{x}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ g}}{(-\cos x)} - \int \underset{\substack{\downarrow\\ f'}}{1}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ g}}{(-\cos x)}\,dx$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x.$$

Hay dos artificios especiales que a menudo dan buen resultado en la integración por partes. El primero consiste en considerar la función g' como igual a 1, lo cual siempre es posible.

$$\int \log x\,dx = \int \underset{\substack{\downarrow\\ g'}}{1}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ f}}{\log x}\,dx = \underset{\substack{\downarrow\\ g}}{x}\,\underset{\substack{\downarrow\\ f}}{\log x} - \int \underset{\substack{\downarrow\\ g}}{x}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ f'}}{(1/x)}\,dx$$

$$= x(\log x) - x.$$

El segundo artificio consiste en utilizar la integración por partes para hallar $\int h$ en términos, otra vez, de $\int h$, y después despejar $\int h$ en la ecuación resultante. Un ejemplo sencillo lo constituye el cálculo

$$\int \underset{\substack{\downarrow\\ g'}}{(1/x)}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ f}}{\log x}\,dx = \underset{\substack{\downarrow\\ g}}{\log x}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ f}}{\log x} - \int \underset{\substack{\downarrow\\ f'}}{(1/x)}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ g}}{\log x}\,dx,$$

lo cual implica que

$$2\int \frac{1}{x}\log x\,dx = (\log x)^2$$

o

$$\int \frac{1}{x} \log x \, dx = \frac{(\log x)^2}{2}.$$

Muchas veces hace falta un cálculo más complicado:

$$\begin{aligned}
\int \underset{\substack{\downarrow \\ f}}{e^x} \underset{\substack{\downarrow \\ g'}}{\operatorname{sen} x} \, dx &= \underset{\substack{\downarrow \\ f}}{e^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ g}}{(-\cos x)} - \int \underset{\substack{\downarrow \\ f'}}{e^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ g}}{(-\cos x)} \, dx \\
&= -e^x \cos x + \int \underset{\substack{\downarrow \\ u}}{e^x} \underset{\substack{\downarrow \\ v'}}{\cos x} \, dx \\
&= -e^x \cos x + [\underset{\substack{\downarrow \\ u}}{e^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ v}}{(\operatorname{sen} x)} - \int \underset{\substack{\downarrow \\ u'}}{e^x} \underset{\substack{\downarrow \\ v}}{(\operatorname{sen} x)} \, dx];
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)$$

o

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)}{2}.$$

Puesto que la integración por partes está basada en el reconocimiento de que una función es de la forma g', cuantas más funciones se sepan ya integrar, mayor será la probabilidad de éxito. Conviene con frecuencia hacer una integración preliminar antes de atacar el problema principal. Por ejemplo, podemos integrar por partes

$$\int (\log x)^2 \, dx = \int \underset{\substack{\downarrow \\ f}}{(\log x)} \underset{\substack{\downarrow \\ g'}}{(\log x)} \, dx$$

si recordamos que $\int \log x\,dx = (x \log x) - x$ (esta fórmula fue deducida a su vez mediante integración por partes); tenemos

$$\begin{aligned}
\int \underset{f}{\underset{\downarrow}{(\log x)}}\underset{g'}{\underset{\downarrow}{(\log x)}}\,dx &= \underset{f}{\underset{\downarrow}{(\log x)}}\underset{g}{\underset{\downarrow}{[x(\log x) - x]}} - \int \underset{f'}{\underset{\downarrow}{(1/x)}}\underset{g}{\underset{\downarrow}{[x(\log x) - x]}}\,dx \\
&= (\log x)[x(\log x) - x] - \int [\log x - 1]\,dx \\
&= (\log x)[x(\log x) - x] - \int \log x\,dx + \int 1\,dx \\
&= (\log x)[x(\log x) - x] - [x(\log x) - x] + x \\
&= x(\log x)^2 - 2x(\log x) + 2x.
\end{aligned}$$

El método más importante de integración es una consecuencia de la regla de la cadena. La aplicación de este método exige considerablemente más ingenio que la integración por partes, e incluso la explicación del método es más difícil. Desarrollaremos por lo tanto este método por etapas, enunciando primero el teorema para integrales definidas, y reservando para más adelante el tratamiento de las integrales indefinidas.

TEOREMA 2
(FÓRMULA DE SUSTITUCIÓN)

Si f y g' son continuas, entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) \cdot g'$$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx.$$

DEMOSTRACIÓN

Si F es una primitiva de f, entonces el primer miembro es $F(g(b)) - F(g(a))$. Por otra parte,

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g',$$

de modo que $F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g)\cdot g'$ y el segundo miembro es

$$(F \circ g)(a) - (F \circ g)(b) = F(g(b)) - F(g(a)). \blacksquare$$

Las aplicaciones más sencillas de la fórmula de sustitución consisten en reconocer que una función dada es de la forma $(f \circ g)g \cdot '$. Por ejemplo, la integración de

$$\int_a^b \operatorname{sen}^5 x \cos x \, dx \left(= \int_a^b (\operatorname{sen} x)^5 \cos x \, dx \right)$$

es facilitada por la aparición del factor $\cos x$, el cual será el factor $g'(x)$ para $f(x) = \operatorname{sen} x$; la expresión que queda, $(\operatorname{sen} x)^5$, puede escribirse como $(g(x))^5 = f(g(x))$, para $f(u) = u^5$. Así pues,

$$\begin{aligned} &\int_a^b \operatorname{sen}^5 x \cos x \, dx \qquad \begin{bmatrix} g(x) = \operatorname{sen} x \\ f(u) = u^5 \end{bmatrix} \\ &\quad = \int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du \\ &\quad = \int_{\operatorname{sen} a}^{\operatorname{sen} b} u^5 \, du = \frac{\operatorname{sen}^6 b}{6} - \frac{\operatorname{sen}^6 a}{6}. \end{aligned}$$

La integración de $\int_a^b \operatorname{tg} \; x \, dx$ puede ser tratada de manera análoga si escribimos

$$\int_a^b \operatorname{tg} \; x \, dx = - \int_a^b \frac{- \operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx.$$

En este caso el factor $-\operatorname{sen} x$ es $g'(x)$, donde $g(x) = \cos x$; el factor que queda $1/\cos x$ puede escribirse $f(\cos x)$ para $f(u) = 1/u$. De aquí que

$$\begin{aligned} &\int_a^b \operatorname{tg} \; x \, dx \qquad \begin{bmatrix} g(x) = \cos x \\ f(u) = \dfrac{1}{u} \end{bmatrix} \\ &\quad = - \int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = - \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du \\ &\quad = - \int_{\cos a}^{\cos b} \frac{1}{u}\, du = \log(\cos a) - \log(\cos b). \end{aligned}$$

Finalmente, para hallar

$$\int_a^b \frac{1}{x \log x}\, dx,$$

obsérvese que $1/x = g'(x)$, donde $g(x) = \log x$, y que $1/\log x = f(g(x))$ para $f(u) = 1/u$. Así pues,

$$\int_a^b \frac{1}{x \log x}\,dx \qquad \begin{bmatrix} g(x) = \log x \\ f(u) = \dfrac{1}{u} \end{bmatrix}$$

$$= \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

$$= \int_{\log a}^{\log b} \frac{1}{u}\,du = \log(\log b) - \log(\log a).$$

Afortunadamente, estas aplicaciones de la fórmula de sustitución pueden abreviarse considerablemente. Las etapas intermedias, que suponen escribir

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du,$$

pueden eliminarse fácilmente observando lo siguiente: Para pasar del primer miembro al segundo,

$$\text{sustituir}\begin{cases} g(x) \text{ por } u \\ g'(x)\,dx \text{ por } du \end{cases}$$

(y cambiar los límites de integración);

las sustituciones pueden hacerse directamente en la función original (lo cual justifica el nombre de este teorema). Por ejemplo,

$$\int_a^b \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx \left[\text{sustituir} \quad \begin{matrix} \operatorname{sen} x \text{ por } u \\ \cos x\,dx \text{ por } du \end{matrix}\right] = \int_{\operatorname{sen} a}^{\operatorname{sen} b} u^5\,du,$$

y análogamente

$$\int_a^b \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx \left[\text{sustituir} \quad \begin{matrix} \cos x \text{ por } u \\ -\operatorname{sen} x\,dx \text{ por } du \end{matrix}\right] = \int_{\cos a}^{\cos b} \frac{1}{u}\,du.$$

Este método se suele abreviar todavía más, diciendo sencillamente:

«Sea $u = g(x)$
$du = g'(x)\,dx$»

Así pues,

$$\int_a^b \frac{1}{x \log x}\,dx \begin{bmatrix} \text{sea } u = \log x \\ du = \frac{1}{x}\,dx \end{bmatrix} = \int_{\log a}^{\log b} \frac{1}{u}\,du.$$

En este capítulo nos interesamos por lo general por primitivas, más bien que por integrales definidas, pero si sabemos hallar $\int_a^b f(x)\,dx$ para todo a y b, entonces ciertamente sabremos hallar $\int f(x)\,dx$. Por ejemplo, puesto que

$$\int_a^b \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^6 b}{6} - \frac{\operatorname{sen}^6 a}{6},$$

se sigue que

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6}.$$

Análogamente,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\log x,$$
$$\int \frac{1}{x \log x}\,dx = \log(\log x).$$

Es totalmente antieconómico obtener primitivas mediante la fórmula de sustitución hallando primero integrales definidas. En vez de esto, pueden combinarse las dos etapas, dando lugar al siguiente proceso:

(1) Sea

$$u = g(x),$$
$$du = g'(x)\,dx;$$

(después de esta manipulación solamente debe aparecer la letra u, *no* la letra x).

(2) Hállese una primitiva (como expresión en u).

(3) Sustitúyase u de nuevo por $g(x)$.

Así pues, para hallar

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x \, dx,$$

(1) sea

$$u = \operatorname{sen} x,$$
$$du = \cos x \, dx,$$

de modo que obtenemos

$$\int u^5 \, du;$$

(2) calcúlese

$$\int u^5 \, du = \frac{u^6}{6};$$

(3) no se olvide sustituir otra vez u por sen x, de modo que

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6}.$$

Análogamente, si

$$u = \log x,$$
$$du = \frac{1}{x} \, dx,$$

entonces

$$\int \frac{1}{x \log x} \, dx \quad \text{se convierte en} \quad \int \frac{1}{u} \, du = \log u,$$

de modo que

$$\int \frac{1}{x \log x} \, dx = \log(\log x).$$

Para calcular

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx,$$

sea

$$u = 1 + x^2,$$
$$du = 2x\,dx;$$

el factor 2 que acaba de aparecer no causa ningún estorbo: la integral se convierte en

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\log u,$$

de modo que

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

(Este resultado puede combinarse con la integración por partes para dar lugar a una fórmula ya mencionada:

$$\begin{aligned}\int 1\cdot \operatorname{arctg} x\,dx &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx\\ &= x \operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2).)\end{aligned}$$

Estas aplicaciones de la fórmula de sustitución * corresponden a los tipos más directos y menos interesantes —una vez reconocido el factor $g'(x)$, el problema puede resultar tan sencillo que hasta sea posible resolverlo mentalmente. Los tres

* La fórmula de sustitución se considera a menúdo como

$$\int f(u)\,du = \int f(g(x))g'(x)\,dx, \quad u = g(x).$$

Esta fórmula no puede ser tomada literalmente (después de todo, $\int f(u)\,du$ debe significar una primitiva de f y $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ debe signficar una primitiva de $(f \circ g)\cdot g'$; ciertamente éstas no son iguales). Sin embargo, puede ser considerado como resumen simbólico del procedimiento que hemos desarrollado. Si usamos la notación de Leibniz, y un poco de cuento, la fórmula queda particularmente bonita:

$$\int f(u)\,du = \int f(u)\frac{du}{dx}\,dx.$$

problemas siguientes requieren solamente la información suministrada por la corta tabla de integrales indefinidas del comienzo de este capítulo y, por supuesto, la sustitución adecuada (el tercer problema ha sido algo disfrazado mediante un truco algebraico).

$$\int \sec^2 x \quad \operatorname{tg}^5 x \, dx,$$

$$\int (\cos x) e^{\operatorname{sen} x} \, dx,$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} \, dx.$$

Si el lector no ha conseguido hallar las sustituciones adecuadas, debería saber adivinarlas a partir de las soluciones, que son $(\operatorname{tg}^6 x)/6$, $e^{\operatorname{sen} x}$ y $\operatorname{arcsen} e^x$. Al principio estos problemas pueden parecer demasiado difíciles para hacerlos mentalmente, pero por lo menos cuando g es de la forma sencilla $g(x) = ax + b$ no se debe perder tiempo escribiendo la sustitución. Las siguientes integraciones deben estar todas claras. (El único detalle engorroso consiste en la debida colocación de la constante. ¿Cuál ha de ser la solución del segundo problema, $e^{3x}/3$ o $3e^{3x}$? Yo trato siempre estos problemas como sigue. Evidentemente $\int e^{3x} \, dx = e^{3x} \cdot$(algo). Si ahora derivo $F(x) = e^{3x}$, obtengo $F'(x) = 3e^{3x}$, de modo que este «algo» debe ser $\frac{1}{3}$, para eliminar el 3.)

$$\int \frac{dx}{x + 3} = \log(x + 3),$$

$$\int e^{3x} \, dx = \frac{e^{3x}}{3},$$

$$\int \cos 4x \, dx = \frac{\operatorname{sen} 4x}{4},$$

$$\int \operatorname{sen} (2x + 1) \, dx = \frac{-\cos (2x + 1)}{2},$$

$$\int \frac{dx}{1 + 4x^2} = \frac{\operatorname{arctg} 2x}{2}.$$

Aplicaciones más interesantes de la fórmula de sustitución se presentan cuando el factor $g'(x)$ *no* aparece. Existen dos tipos principales de sustituciones en que esto ocurre. Consideremos primero

$$\int \frac{1 + e^x}{1 - e^x}\, dx.$$

La destacada aparición de la expresión e^x sugiere la sustitución simplificadora

$$\begin{aligned} u &= e^x, \\ du &= e^x\, dx. \end{aligned}$$

Aunque no aparezca la expresión $e^x\, dx$, siempre puede ser intercalada:

$$\int \frac{1 + e^x}{1 - e^x}\, dx = \int \frac{1 + e^x}{1 - e^x} \cdot \frac{1}{e^x} \cdot e^x\, dx.$$

Obtenemos por lo tanto

$$\int \frac{1 + u}{1 - u} \cdot \frac{1}{u}\, du,$$

lo cual puede calcularse mediante el truco algebraico

$$\int \frac{1 + u}{1 - u} \cdot \frac{1}{u}\, du = \int \frac{2}{1 - u} + \frac{1}{u}\, du = -2 \log(1 - u) + \log u,$$

de modo que

$$\int \frac{1 + e^x}{1 - e^x}\, dx = -2 \log(1 - e^x) + \log e^x = -2 \log(1 - e^x) + x.$$

Existe otra manera, preferible, de tratar este problema, la cual no exige multiplicar y dividir por e^x. Si escribimos

$$\begin{aligned} u = e^x, \qquad x &= \log u, \\ dx &= \frac{1}{u}\, du, \end{aligned}$$

entonces

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx \text{ se convierte inmediatamente en } \int \frac{1+u}{1-u}\cdot\frac{1}{u}\,du.$$

La mayor parte de los problemas de sustitución resultan mucho más fáciles si se recurre a estos trucos de expresar x en función de u, y dx en función de du, en vez de hacer lo contrario. No es difícil ver por qué este truco da siempre buen resultado (siempre que la función que expresa u en términos de x sea uno-uno para todos los x que se consideren): Si aplicamos la sustitución

$$\begin{aligned} u = g(x), \qquad x &= g^{-1}(u) \\ dx &= (g^{-1})'(u)\,du \end{aligned}$$

a la integral

$$\int f(g(x))\,dx,$$

obtenemos

$$(1) \qquad \int f(u)(g^{-1})'(u)\,du.$$

Por otra parte, si aplicamos la sustitución directa

$$\begin{aligned} u &= g(x) \\ du &= g'(x)\,dx \end{aligned}$$

a la misma integral

$$\int f(g(x))\,dx = \int f(g(x))\cdot\frac{1}{g'(x)}\cdot g'(x)\,dx,$$

obtenemos

$$(2) \qquad \int f(u)\cdot\frac{1}{g'(g^{-1}(u))}\,du.$$

Las integrales (1) y (2) son idénticas, ya que $(g^{-1})'(u) = 1/g'(g^{-1}(u))$.

Para dar otro ejemplo concreto, consideremos

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx.$$

En este caso llegaremos hasta el extremo sustituyendo toda la expresión $\sqrt{e^x+1}$ por una letra. Así pues, elegimos la sustitución

$$u = \sqrt{e^x + 1},$$
$$u^2 = e^x + 1,$$
$$u^2 - 1 = e^x, \quad x = \log(u^2 - 1),$$
$$dx = \frac{2u}{u^2 - 1}\, du.$$

La integral se convierte entonces en

$$\int \frac{(u^2-1)^2}{u} \cdot \frac{2u}{u^2-1}\, du = 2\int u^2 - 1\, du = \frac{2u^3}{3} - 2u.$$

Así pues

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\, dx = \frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2} - 2(e^x+1)^{1/2}.$$

Otro ejemplo que ilustra el segundo tipo principal de sustitución que se puede presentar es la integral

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

En este caso, en lugar de sustituir una expresión complicada por otra más sencilla, sustituiremos x por sen u, ya que $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u} = \cos u$. Esto en realidad significa que estamos utilizando la sustitución $u = \operatorname{arcsen} x$, pero es la expresión de x en términos de u la que ayuda a hallar la expresión que ha de ponerse en vez de dx. Así pues,

$$\text{sea} \quad x = \operatorname{sen} u, \quad [u = \operatorname{arcsen} x]$$
$$dx = \cos u\, du;$$

entonces la integral se convierte en

$$\int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u} \cos u\, du = \int \cos^2 u\, du.$$

El cálculo de esta integral se basa en la ecuación

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

(véase más adelante en este capítulo el estudio de las funciones trigonométricas) de manera que

$$\int \cos^2 u \, du = \int \frac{1 + \cos 2u}{2} \, du = \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4},$$

y

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1 - x^2} \, dx &= \frac{\operatorname{arcsén} x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2 \operatorname{arcsen} x)}{4} \\
&= \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) \cdot \cos(\operatorname{arcsen} x) \\
&= \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2}.
\end{aligned}$$

La sustitución y la integración por partes son los dos únicos métodos fundamentales que el lector debe aprender; con ayuda de ellos es posible hallar las primitivas de un gran número de funciones. No obstante, según revelan nuestros ejemplos, el éxito depende muchas veces de algunos artificios adicionales. A continuación damos los más importantes. Aplicando éstos, el lector debe poder integrar todas las funciones de los problemas 1 a 9 (otros artificios interesantes se explican en algunos de los problemas restantes).

1. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Puesto que

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

y

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x,$$

obtenemos

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1,$$
$$\cos 2x = (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x,$$

o

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Estas fórmulas pueden utilizarse para integrar

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx,$$
$$\int \cos^n x\, dx,$$

si n es par. Poniendo

$$\frac{(1 - \cos 2x)}{2} \quad \text{o} \quad \frac{(1 + \cos 2x)}{2}$$

en vez de $\operatorname{sen}^2 x$ o $\cos^2 x$ se obtiene una suma de términos que encierran potencias inferiores de cos. Por ejemplo,

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1}{4}\, dx - \int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx$$

y

$$\int \cos^2 2x\, dx = \int \frac{1 + \cos 4x}{2}\, dx.$$

Si n es impar, $n = 2k + 1$, y entonces

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = \int \operatorname{sen} x(1 - \cos^2 x)^k\, dx;$$

la última expresión, una vez desarrollada, encierra términos de la forma $\operatorname{sen} x \cos^l x$,

todos los cuales se pueden integrar fácilmente. La integral de $\cos^n x$ se trata de manera análoga. Una integral de la forma

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx$$

se trata de la misma manera si n o m son impares. Si n y m son ambos pares, se utilizan las fórmulas de $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$.

Finalmente, una integral trigonométrica importante es

$$\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \sec x\, dx = \log(\sec x + \operatorname{tg} x).$$

Aunque existen varias maneras de «deducir» este resultado, mediante los métodos de que ya disponemos (problema 12), el más sencillo consiste en comprobar esta fórmula derivando el segundo miembro, y aprenderla de memoria.

2. FÓRMULAS DE REDUCCIÓN

Mediante la integración por partes se obtiene (problema 20).

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx,$$

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx,$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\, dx,$$

y muchas fórmulas análogas. Las dos primeras, aplicadas reiteradamente, proporcionan otro método para calcular las primitivas de sen^n o $\cos^n$. La tercera es muy importante para integrar una clase muy amplia de funciones, con la cual terminaremos este estudio.

3. FUNCIONES RACIONALES

Consideremos una función racional p/q donde

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$
$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0.$$

No hay inconveniente en suponer que $a_n = b_m = 1$. Además, podemos suponer que $n < m$, ya que de otro modo se puede expresar p/q como una función polinómica más una función racional que *es* de esa forma; mediante división (por ejemplo:

$$\frac{u^2}{u-1} = u + 1 + \frac{1}{u-1}\Big).$$

La integración de una función racional cualquiera se basa en dos hechos; el primero de ellos es consecuencia del «teorema fundamental del álgebra» (véase capítulo 25, teorema 2 y problema 25-3), pero el segundo no será demostrado en este libro.

TEOREMA

Toda función polinómica

$$q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$$

puede escribirse como producto

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1}\cdot \ldots \cdot (x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}\cdot \ldots \cdot (x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}$$

(donde $r_1 + \cdots + r_k + 2(s_1 + \cdots + s_l) = m$).

(en esta expresión, se pueden reunir dos factores idénticos, de manera que todos los $x - \alpha_i$ y $x^2 + \beta_i x + \gamma_i$ pueden suponerse distintos. Suponemos además que ninguno de los factores cuadráticos es descomponible. Esto significa que

$$\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0,$$

ya que de otro modo se podría descomponer

$$x^2 + \beta_i x + \gamma_i = \left[x - \left(\frac{-\beta_i + \sqrt{\beta_i^2 - 4\gamma_i}}{2}\right)\right]\cdot\left[x - \left(\frac{-\beta_i - \sqrt{\beta_i^2 - 4\gamma_i}}{2}\right)\right]$$

en factores lineales).

TEOREMA

Si $n < m$ y

$$\begin{aligned} p(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \\ q(x) &= x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 \\ &= (x-\alpha_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}, \end{aligned}$$

entonces $p(x)/q(x)$ puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \left[\frac{a_{1,1}}{(x-\alpha_1)} + \cdots + \frac{a_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}\right] + \cdots \\ &+ \left[\frac{a_{k,1}}{(x-\alpha_k)} + \cdots + \frac{a_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\right] \\ &+ \left[\frac{b_{1,1}x + c_{1,1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)} + \cdots + \frac{b_{1,s_1}x + c_{1,s_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}}\right] + \cdots \\ &+ \left[\frac{b_{l,1}x + c_{l,1}}{(x^2+\beta_l x+\gamma_l)} + \cdots + \frac{b_{l,s_l}x + c_{l,s_l}}{(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}}\right]. \end{aligned}$$

Esta expresión, conocida por «descomposición en fracciones simples» de $p(x)/q(x)$, es tan complicada que es más sencillo examinar el siguiente ejemplo, el cual ilustra esta expresión e indica la manera de hallarla. Según el teorema, se puede escribir

$$\begin{aligned} &\frac{2x^7 + 8x^6 + 13x^5 + 20x^4 + 15x^3 + 16x^2 + 7x + 10}{(x^2+x+1)^2(x^2+2x+2)(x-1)^2} \\ &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2} + \frac{ex+f}{(x^2+x+1)} + \frac{gx+h}{(x^2+x+1)^2}. \end{aligned}$$

Para hallar los números a, b, c, d, e, f, g y h, escríbase el segundo miembro como polinomio encima del denominador común $(x^2+x+1)^2(x^2+2x+3)(x-1)^2$; el numerador se convierte en

$$\begin{aligned} &a(x-1)(x^2+2x+2)(x^2+x+1)^2 + b(x^2+2x+2)(x^2+x+1)^2 \\ &+ (cx+d)(x-1)^2(x^2+x+1)^2 + (ex+f)(x-1)^2(x^2+2x+2)(x^2+x+1) \\ &+ (gx+h)(x-1)^2(x^2+2x+2). \end{aligned}$$

En realidad, desarrollando esto (!) obtenemos un polinomio de grado 8, cuyos coeficientes son combinaciones de $a, \dots, h$. Igualando estos coeficientes con los coeficientes de $2x^7 + 8x^6 + 13x^5 + 20x^4 + 15x^3 + 16x^2 + 7x + 10$ (el coeficiente de x^8 es 0) obtenemos ocho ecuaciones con las ocho incógnitas $a, \dots, h$. Después de cálculos laboriosos éstas pueden resolverse, obteniéndose

$$\begin{aligned} a &= 1, \quad b = 2, \quad c = 1, \quad d = 3, \\ e &= 0, \quad f = 0, \quad g = 0, \quad h = 1. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned} &\int \frac{2x^7 + 5x^6 + 13x^5 + 20x^4 + 21x^3 + 16x^2 + 7x + 4}{(x^2 + x + 1)^2(x^2 + 2x + 2)(x - 1)^2}\, dx \\ &= \int \frac{1}{(x-1)}\, dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}\, dx + \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\, dx + \int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\, dx. \end{aligned}$$

(En casos más sencillos los cálculos requeridos pueden ser en realidad más asequibles. He obtenido este ejemplo particular *partiendo* de la descomposición en fracciones simples y convirtiéndola en una fracción.)

Estamos ya en condiciones de hallar cada una de las integrales que aparecen en la expresión anterior; los cálculos harán ver todas las dificultades que surgen al integrar funciones racionales.

Las dos primeras integrales son sencillas:

$$\int \frac{1}{x-1}\, dx = \log(x-1),$$

$$\int \frac{2}{(x-1)^2}\, dx = \frac{-2}{x-1}.$$

La tercera integral se basa en «completar el cuadrado»:

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= (x + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2 + 1\right]. \end{aligned}$$

(Si hubiésemos obtenido $-\frac{3}{4}$ en vez de $\frac{3}{4}$ no hubiésemos podido tomar la raíz cuadrada, pero en este caso nuestro factor cuadrático de origen se hubiese podido descomponer en factores lineales.) Podemos escribir ahora

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1\right]^2}\,dx.$$

La sustitución

$$u = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}},$$
$$du = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\,dx,$$

cambia la integral en

$$\frac{4}{3}\int \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{(u^2+1)^2}\,du,$$

la cual se puede calcular mediante la tercera fórmula de reducción dada anteriormente.

Finalmente, para calcular

$$\int \frac{x+3}{(x^2+2x+2)}\,dx$$

escribimos

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx + \int \frac{2}{(x+1)^2+1}\,dx.$$

La primera integral del segundo miembro ha sido construida expresamente de manera que podamos calcularla mediante la sustitución

$$u = x^2+2x+3,$$
$$du = (2x+2)\,dx.$$

La segunda integral del segundo miembro, que es precisamente la diferencia de otras dos, es sencillamente 2 arctan $(x+1)$. Si la integral de origen fuese

$$\int \frac{x+3}{(x^2+2x+2)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^n}\,dx + \int \frac{2}{[(x+1)^2+1]^n}\,dx,$$

la primera integral del segundo miembro se calcularía todavía mediante la misma sustitución. La segunda integral se calcularía mediante una fórmula de reducción.

Este ejemplo probablemente habrá convencido al lector de que la integración de funciones racionales es únicamente una curiosidad teórica, especialmente porque es necesario hallar la descomposición en factores de $q(x)$ antes de que se pueda siquiera empezar. Esto es verdad sólo en parte. Hemos visto ya que en ocasiones surgen funciones racionales sencillas como en la integración

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx;$$

otro ejemplo importante es la integral

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{2}\log(x+1).$$

Además, si un problema ha sido reducido a la integración de una función racional, entonces es seguro que existe una primitiva elemental, aun cuando la dificultad o la imposibilidad de hallar los factores del denominador pudieran impedir que esta primitiva fuese expresada explícitamente.

PROBLEMAS

1. Este problema contiene algunas integrales que requieren algo más que manipulación algebraica, y en consecuencia ponen a prueba la habilidad del lector para descubrir trucos algebraicos, más bien que la comprensión de los procesos de integración. No obstante, cualquiera de estos trucos puede constituir un importante paso preliminar de un verdadero problema de integración. Además, el lector puede intuir cuáles son las integrales fáciles, de modo que puede ver en qué momento se encuentra a la vista el final de un proceso de integración. El capítulo de soluciones, si el lector recurre a él, solamente dará a conocer el tipo de cálculo que se debía haber utilizado.

(i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$.

(iii) $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{e^{4x}}\, dx$.

(iv) $\displaystyle\int \frac{a^x}{b^x}\, dx$.

(v) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$. (Las integrales trigonométricas son siempre muy delicadas, porque existen tantas identidades trigonométricas que un problema fácil puede parecer difícil.)

(vi) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

(vii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

(viii) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$.

(ix) $\displaystyle\int \frac{8x^2 + 6x + 4}{x+1}\, dx$.

(x) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\, dx$.

2. Las siguientes integrales requieren simples sustituciones, la mayor parte de las cuales deben poder hacerse mentalmente.

(i) $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} e^x\, dx$.

(ii) $\displaystyle\int x e^{-x^2}\, dx$.

(iii) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\, dx$. (En el texto esto se hizo por partes.)

(iv) $\displaystyle\int \frac{e^x\, dx}{e^{2x} + 2e^x + 1}$.

(v) $\displaystyle\int e^{e^x} e^x\, dx$.

(vi) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^4}}$.

(vii) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx.$

(viii) $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx.$

(ix) $\int \log(\cos x) \quad \text{tg} \quad x\, dx.$

(x) $\int \frac{\log(\log x)}{x \log x}\, dx.$

3. Integración por partes.

(i) $\int x^2 e^x\, dx.$

(ii) $\int x^3 e^{x^2}\, dx.$

(iii) $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx.$

(iv) $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx.$

(v) $\int (\log x)^3\, dx.$

(vi) $\int \frac{\log(\log x)}{x}\, dx.$

(vii) $\int \sec^3 x\, dx.$ (Ésta es una integral artificiosa e importante que se presenta a menudo. Si no se consigue calcularla, consúltense las soluciones.)

(viii) $\int \cos(\log x)\, dx.$

(ix) $\int \sqrt{x} \log x\, dx.$

(x) $\int x(\log x)^2\, dx.$

4. Las siguientes integraciones pueden hacerse todas mediante sustituciones de la forma $x = \operatorname{sen} u$, $x = \cos u$, etc. Para hacer algunas de éstas será necesario recordar que

$$\int \sec x \, dx = \log(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

así como la siguiente fórmula, que también puede comprobarse derivando:

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = -\log(\operatorname{cosec} x + \cot x).$$

Además, las derivadas de todas las funciones trigonométricas deben tenerse ahora a mano.

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (Esta integral es ya conocida del lector, pero aplíquese de todos modos la sustitución $x = \operatorname{sen} u$, para ver cómo sale.)

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. (Al ser $\operatorname{tg}^2 u + 1 = \sec^2 u$, habrá que aplicar la sustitución $x = \operatorname{tg} u$.)

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

(iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. (La solución será cierta función inversa a la que se dio poca importancia en el texto.)

(v) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

(vi) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

(vii) $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}\, dx$.

(viii) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\, dx$.

(Hará falta recordar los métodos de integración de las potencias de sen y cos.)

(ix) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\, dx$.

(x) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\, dx$.

5. Las siguientes integraciones suponen sustituciones de distintos tipos. Lo que no se puede sustituir es la agudeza de ingenio, pero existe una regla general a seguir: sustitúyase una expresión que aparezca con frecuencia o de modo prominente; si aparecen dos expresiones dificultosas, inténtese expre-

sarlas en términos de alguna expresión nueva. Y no se olvide que, por lo general resulta útil expresar x directamente en función de u, para hallar la expresión adecuada que ha de ponerse en vez de dx.

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$.

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

(iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. (La sustitución $u = e^x$ lleva a una integral que exige todavía otra sustitución; esto está bien, pero las dos sustituciones pueden hacerse a la vez.)

(v) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\operatorname{tg} x}$.

(vi) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$. (Otro caso en que una sustitución puede hacer el trabajo de dos.)

(vii) $\displaystyle\int \frac{4^x+1}{2^x+1}\,dx$.

(viii) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

(ix) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$. (En este caso lo indicado son dos sustituciones sucesivas; hay dos posibilidades evidentes para la primera sustitución, y cualquiera de ellas irá bien.)

*(x) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx$.

6. El problema anterior ha suministrado gratuitamente una selección al azar de funciones racionales para integrar. Damos aquí una selección más sistemática.

(i) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$.

(ii) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int \frac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3}\,dx.$

(iv) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}\,dx.$

(v) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+1}\,dx.$

(vi) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}\,dx.$

(vii) $\displaystyle\int \frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}\,dx.$

(viii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}.$

(ix) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$

(x) $\displaystyle\int \frac{3x}{(x^2+x+1)^3}\,dx.$

***7.** Miscelánea (sin restricciones). Las siguientes integraciones requieren todos los métodos de los problemas anteriores.

(i) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x \quad \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^3}.$

(iii) $\displaystyle\int \log\sqrt{1+x^2}\,dx.$

(iv) $\displaystyle\int x\log\sqrt{1+x^2}\,dx.$

(v) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx.$

(vi) $\int \operatorname{arcsen} \sqrt{x}\, dx.$

(vii) $\int \frac{x}{1 + \operatorname{sen} x}\, dx.$

(viii) $\int e^{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{x \cos^3 x - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx.$

(ix) $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx.$

(x) $\int \frac{dx}{x^6 + 1}$. (Para descomponer $x^6 + 1$, en factores, descompóngase primero $y^3 + 1$, aplicando el problema 1-1.)

Los dos problemas que siguen proporcionan una mayor práctica en la integración (a quien lo necesite y pueda soportar). El problema 8 requiere manipulaciones algebraicas y geométricas e integración por partes, mientras que el problema 9 se resuelve mediante sustituciones. (Por supuesto, serán necesarias en muchos casos más manipulaciones para resolver las integrales que resulten.)

8. Hallar las integrales siguientes:

(i) $\int \log(a^2 + x^2)\, dx.$

(ii) $\int \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx.$

(iii) $\int \frac{x + 1}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx.$

(iv) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx.$

(v) $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx.$

(vi) $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x}\, dx.$

*(vii) $\int x^2 \operatorname{arctg} x\, dx.$

(viii) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$.

(ix) $\int \sec^3 x \;\; \mathbf{tg}\; x\, dx$.

(x) $\int x \;\; \mathbf{tg}^2\, x\, dx$.

9. Hallar las integrales siguientes:

(i) $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$

(ii) $\int \sqrt{1 - \mathbf{sen}\, x}\, dx$.

(iii) $\int \mathbf{arctg}\;\; \sqrt{x}\, dx$.

(iv) $\int \mathbf{sen}\sqrt{x + 1}\, dx$.

(v) $\int \frac{\sqrt{x^3 - 2}}{x}\, dx$.

(vi) $\int \log(x + \sqrt{x^2 - 1})\, dx$.

(vii) $\int \log(x + \sqrt{x})\, dx$.

(viii) $\int \frac{dx}{x - x^{3/5}}$.

10. Si se ha hecho el problema 17-9, las integrales (ii) y (iii) del problema 4 serán muy conocidas. En general, la sustitución $x = \cosh u$ da con frecuencia resultado para integrales que encierran $\sqrt{x^2 - 1}$, mientras que $x = \operatorname{senh} u$ es lo indicado para integrales que encierran $\sqrt{x^2 + 1}$. Experiméntense estas sustituciones en las demás integrales del problema 4. (El método no es en realidad recomendable; es más fácil atenerse a las sustituciones trigonométricas.)

***11.** La sustitución más socorrida del mundo es, sin lugar a duda,

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \qquad x = 2 \operatorname{arctg} t,$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Según se vio en el problema 15-17, esta sustitución lleva a las expresiones

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Esta sustitución transforma así cualquier integral que encierre solamente sen y cos, combinadas mediante suma, multiplicación y división, en la integral de una función racional. Hallar

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$. (Compare la solución con la del problema 1(viii).)

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen}^2 x}$. (En este caso es mejor poner $t = \operatorname{tg} x$. ¿Por qué?)

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x}$. (Existe también otra manera de hacer esto, utilizando el problema 15-8).

(iv) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$. (Ejercicio destinado a convencer al lector de que esta sustitución debe utilizarse únicamente como último recurso.)

(v) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\operatorname{sen} x}$. (Un último recurso.)

***12.** Deducir la fórmula de $\int \sec x dx$ de las dos maneras siguientes:

(a) Escribiendo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{\cos x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right],\end{aligned}$$

expresión inspirada evidentemente en la descomposición en fracciones

simples. Obsérvese bien que $\int \cos x/(1 - \text{sen } x)\, dx = -\log(1 - \text{sen } x)$; el signo menos es muy importante. Y recuérdese que $\frac{1}{2} \log \alpha = \log \sqrt{\alpha}$. De ahí en adelante, sígase calculando, y confíese en el éxito.

(b) Mediante la sustitución $t = \text{tg } x/2$. Una vez más, hace falta una larga manipulación para poner la solución en la forma deseada; la expresión tg $x/2$ puede atacarse mediante el problema 15-9, o bien las dos soluciones pueden expresarse en términos de t. Existe otra expresión para $\int \sec x\, dx$, la cual es menos engorrosa que $\log(\sec x + \text{tg } x)$; aplicando el problema 15-9 obtenemos

$$\int \sec x \, dx = \log\left(\frac{1 + \text{tg } \frac{x}{2}}{1 - \text{tg } \frac{x}{2}}\right) = \log\left(\text{tg }\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Esta última expresión fue en realidad la primera en descubrirse, y fue debida, no al ingenio de un matemático, sino a un curioso incidente histórico: En 1599, Wright calculó tablas náuticas que equivalían a integrales definidas de sec. Al editarse las primeras tablas de logaritmos de tangentes, se observó inmediatamente la correspondencia entre las dos tablas (pero quedó sin explicación hasta la invención del cálculo infinitesimal).

13. La derivación de $\int e^x \text{ sen } x\, dx$ dada en el texto parece demostrar que la única primitiva de $f(x) = e^x \text{ sen } x$ es $F(x) = e^x(\text{sen } x - \cos x)/2$, mientras que $F(x) = e^x(\text{sen } x - \cos x)/2 + C$ es también una primitiva, cualquiera que sea C. ¿De dónde proviene C? (¿Cuál es el significado de la ecuación

$$\int e^x \text{ sen } x\, dx = e^x \text{ sen } x - e^x \cos x - \int e^x \text{ sen } x\, dx?)$$

14. Supóngase que f'' es continua y que

$$\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \text{sen } x\, dx = 2.$$

Sabiendo que es $f(\pi) = 1$, calcular $f(0)$.

15. (a) Hallar $\int \text{arcsen } x\, dx$, utilizando el mismo artificio que para log y arctg.

*(b) Generalizar este artificio: Hallar $\int f^{-1}(x)\,dx$ en términos de $\int f(x)\,dx$. Compárese con los problemas 12-18 y 14-18.

16. (a) Hallar $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$ de dos maneras diferentes: primero utilizando la fórmula de reducción, y después utilizando la fórmula de $\operatorname{sen}^2 x$.

(b) Combínense las dos soluciones para obtener una identidad trigonométrica impresionante.

17. Expresar $\int \log(\log x)\,dx$ en términos de $\int(\log x)^{-1}\,dx$. (Ninguna de las dos es expresable en términos de funciones elementales.)

18. Expresar $\int x^2 e^{-x^2}\,dx$ en términos de $\int e^{-x^2}\,dx$.

19. Demostrar que la función $f(x) = e^x/(e^{5x} + e^x + 1)$ tiene una primitiva elemental. (No se intente hallarla.)

20. Demostrar las fórmulas de reducción del texto. Para la tercera escribir

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^n}$$

y trabajar sobre la última integral. (Otra posibilidad consiste en aplicar la sustitución $x = \operatorname{tg} u$.)

21. Hallar una fórmula de reducción para

(a) $\int x^n e^x\,dx$.
(b) $\int (\log x)^n\,dx$.

*22. Demostrar que

$$\int_1^{\cosh x} \sqrt{t^2-1}\,dt = \frac{\cosh x \operatorname{senh} x}{2} - \frac{x}{2}.$$

(Véase en el problema 17-6 la importancia de este cálculo.)

23. Demostrar que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

(Esto está claro con una interpretación geométrica, pero también es un buen ejercicio en el manejo de los límites de integración cuando se hace una sustitución.)

24. **Demostrar que el área de un círculo de radio r es πr^2. (Naturalmente hace falta recordar que π está definido como el área del círculo unidad.)**

25. Sea ϕ una función integrable no negativa, tal que $\phi(x) = 0$ para $|x| \geq 1$ y tal que $\int_{-1}^{1} \phi = 1$. Para $h > 0$, sea

$$\phi_h(x) = \frac{1}{h}\phi(x/h).$$

(a) Demostrar que $\phi_h(x) = 0$ para $|x| \geq h$ y que $\int_{-h}^{h} \phi_h = 1$.

(b) Sea f integrable en [-1, 1] y continua en 0. Demostrar que

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \phi_h f = \lim_{h\to 0^+} \int_{-h}^{h} \phi_h f = f(0).$$

Ayuda: Aplicar un teorema de valor medio.

(c) Demostrar que

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2 + x^2}\, dx = \pi.$$

La parte final de este problema puede parecer a primera vista exactamente análoga a la parte (b), pero en realidad requiere un razonamiento más atento.

(d) Sea f integrable en [-1, 1] y continua en 0. Demostrar que

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2 + x^2} f(x)\, dx = \pi f(0).$$

Ayuda: Si h es pequeño, será $h/(h^2 + x^2)$ pequeño en la mayor parte de [-1, 1].

Los dos problemas que siguen hacen uso de la fórmula

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)^2\, d\theta,$$

deducida en el problema 13-25, para el área de una región delimitada por la gráfica de f en coordenadas polares.

26. Para cada una de las funciones que siguen, hallar el área limitada por la gráfica en coordenadas polares. (Es preciso poner atención al adecuado recorrido de θ so pena de obtener resultados absurdos.)

(i) $f(\theta) = a \operatorname{sen} \theta$.
(ii) $f(\theta) = 2 + \cos \theta$.
(iii) $f(\theta)^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.
(iv) $f(\theta) = a \cos 2\theta$.

27. En la figura 1 se ve la gráfica de f en coordenadas polares; así pues, la región OAB tiene por área $\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)^2\, d\theta$. Supongamos ahora que esta gráfica es también la gráfica ordinaria de una cierta función g. Entonces el área de OAB es también

$$\text{área } \Delta Ox_1B + \int_{x_1}^{x_0} g - \text{ área } \Delta Ox_0A.$$

Demostrar analíticamente que estos dos números efectivamente coinciden. Ayuda: La función g se halla determinada por las ecuaciones

$$x = f(\theta) \cos \theta, \qquad g(x) = f(\theta) \operatorname{sen} \theta.$$

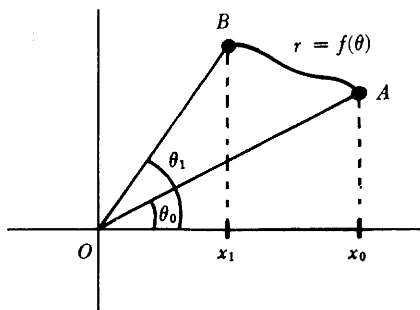


FIGURA 1

En los cuatro problemas que siguen se utilizan fórmulas deducidas en los problemas 3 y 4 del apéndice 1 al capítulo 13, para la longitud de una curva representada paramétricamente (como es en particular la gráfica de una función en coordenadas polares).

28. Sea c una curva representada paramétricamente por u y v en $[a, b]$ y sea h una función creciente con $h(\bar{a}) = a$ y $h(\bar{b}) = b$. Entonces las funciones $\bar{u} = u \circ h$, $\bar{v} = v \circ h$ en $[\bar{a}, \bar{b}]$ proporcionan una representación paramétrica de otra curva $\bar{c}$; está claro que $\bar{c}$ tiene que ser la misma curva c, sólo que con una distinta pauta de recorrido.

(a) Demostrar directamente, partiendo de la definición de longitud, que la longitud de c en $[a, b]$ es igual a la longitud de $\bar{c}$ en $[\bar{a}, \bar{b}]$.
(b) Suponiendo derivables todas las funciones que haga falta, demostrar que las longitudes son iguales aplicando la fórmula de la longitud como integral con la sustitución adecuada.

29. Hallar la longitud de las siguientes curvas, descritas todas ellas como gráficas de funciones, salvo la (iii) que está representada gráficamente

(i) $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}, \qquad 0 \leq x \leq 1.$

(ii) $f(x) = x^3 + \frac{1}{12x}, \qquad 1 \leq x \leq 2.$

(iii) $x = a^3 \cos^3 t, \qquad y = a^3 \operatorname{sen}^3 t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$
(iv) $f(x) = \log(\cos x), \qquad 0 \leq x \leq \pi/6.$
(v) $f(x) = \log x, \qquad 1 \leq x \leq e.$
(vi) $f(x) = \operatorname{arcsen} e^x, \qquad -\log 2 \leq x \leq 0.$

30. Para las funciones que siguen, hallar la longitud de la gráfica en coordenadas polares.
(i) $f(\theta) = a \cos \theta.$
(ii) $f(\theta) = a(1 - \cos \theta).$
(iii) $f(\theta) = a \operatorname{sen}^2 \theta/2.$
(iv) $f(\theta) = \theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$
(v) $f(\theta) = 3 \sec \theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi/3.$

31. En el apéndice al capítulo 12 hemos descrito la cicloide, cuya representación paramétrica es

$$x = u(t) = a(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = v(t) = a(1 - \cos t).$$

(a) Hallar la longitud de un arco de cicloide. [Solución: $8a$].
(b) Recordar que la cicloide es la gráfica de $v \circ u^{-1}$. Hallar el área encerrada por un arco de cicloide aplicando la sustitución adecuada en $\int f$ y calculando la integral resultante. [Solución: $3\pi a^2$].

En los problemas 32 a 44 se utiliza material del apéndice 2 al capítulo 13.

32. (a) Hallar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje horizontal el área delimitada por las gráficas de $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$.
(b) Hallar el volumen del sólido obtenido al hacer girar la misma área alrededor del eje vertical.

33. Hallar el volumen de una esfera de radio r.

34. Al hacer girar la elipse formada por todos los puntos (x, y) con $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ alrededor del eje horizontal se obtiene un «elipsoide de revolución» (figura 2). Hallar el volumen del sólido encerrado.

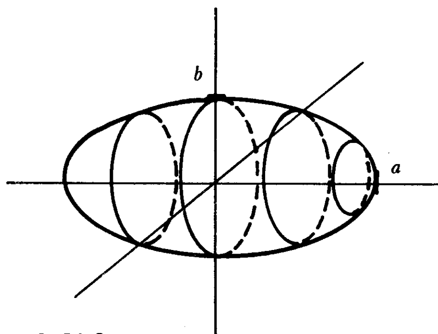


FIGURA 2

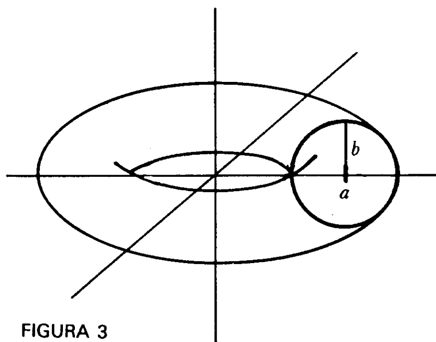


FIGURA 3

35. Hallar el volumen del «toro» (figura 3), que se obtiene al hacer girar el círculo $(x - a)^2 + y^2 = b^2$ $(a > b)$ alrededor del eje vertical.

36. Se abre un agujero cilíndrico de radio a, a través del centro de una esfera de radio $2a$ (figura 4). Hallar el volumen del sólido restante.

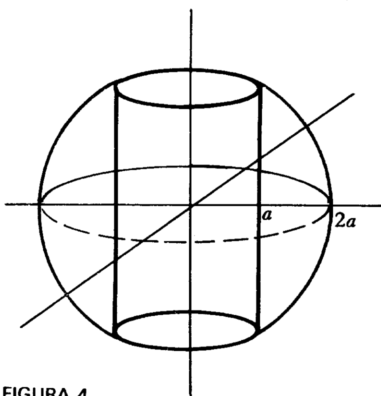


FIGURA 4

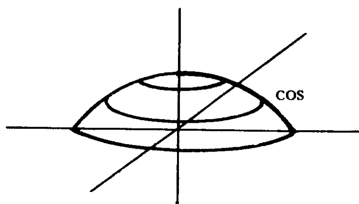


FIGURA 5

37. (a) **Hallar por el método de la cáscara, el volumen del sólido indicado en la figura 5.**

(b) Se puede calcular también este volumen por el método del disco. Plantear la integral que habría que calcular en este caso; obsérvese que es más complicada. Esto suscita una cuestión que se examina en el si-

guiente problema.

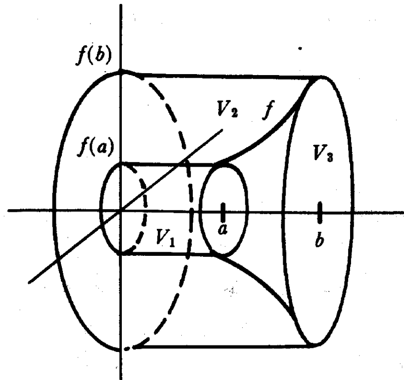


FIGURA 6

38. La figura 6 muestra un cilindro de altura b y radio $f(b)$, dividido en tres sólidos, uno de los cuales, V_1, es un cilindro de altura a y radio $f(a)$. Si f es uno a uno, la comparación de los métodos del disco y de la cáscara para calcular volúmenes nos lleva a admitir que

$$\pi b f(b)^2 - \pi a f(a)^2 - \pi \int_a^b f(x)^2\, dx = \text{volumen } V_2$$
$$= 2\pi \int_{f(a)}^{f(b)} y f^{-1}(y)\, dy.$$

Demostrar esto analíticamente aplicando la fórmula para $\int f^{-1}$ del problema 15.

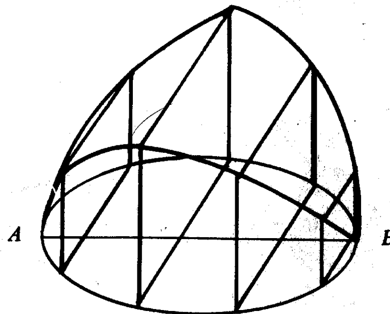


FIGURA 7

39. (a) La figura 7 muestra un cuerpo con base circular de radio a. Todo pla-

no perpendicular al diámetro AB corta al cuerpo según un cuadrado. Expresar el volumen del cuerpo en forma de integral y calcularlo.

(b) El mismo problema si todo plano corta al cuerpo según un triángulo equilátero.

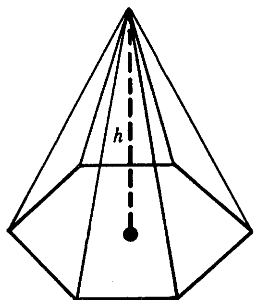


FIGURA 8

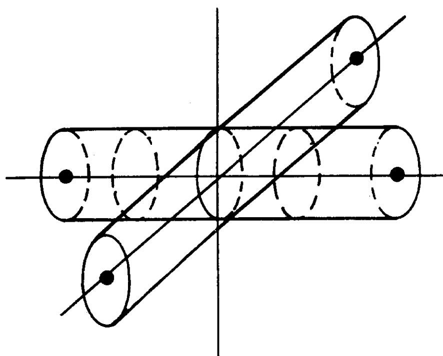


FIGURA 9

40. Hallar el volumen de una pirámide (figura 8) en función de la altura h y del área A de la base.

41. Hallar el volumen del cuerpo que resulta de la intersección de los dos cilindros de la figura 9. Ayuda: Hallar la intersección de este cuerpo con cada plano horizontal.

42. (a) Demostrar que el área de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

(b) De un modo más general, demostrar que el área de la parte de la esfera que se indica en la figura 10 es $2\pi rh$. (Obsérvese que esto depende sólo de h y no de la posición de los planos).

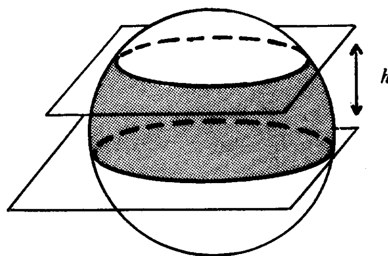


FIGURA 10

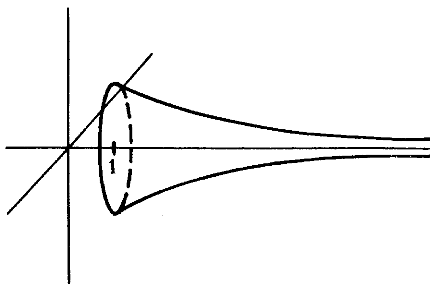


FIGURA 11

43. (a) Hallar el área del elipsoide de revolución del problema 34.
(b) Hallar el área del toro del problema 35.

44. Se hace girar la gráfica de $f(x) = 1/x$, $x \geq 1$ alrededor del eje horizontal (figura 11).
(a) Hallar el volumen de la «trompeta infinita» que así se delimita.
(b) Demostrar que el área superficial es infinita.
(c) Supongamos que la trompeta se llena con un volumen de pintura igual al obtenido en (a). Al parecer, de este modo habríamos revestido una superficie infinita con una cantidad finita de pintura. ¿Cómo puede ser esto posible?

45. Generalizar el problema 14-14 mediante inducción e integración por partes:

$$\int_0^x \frac{f(u)(x-u)^n}{n!}\,du = \int_0^x \left(\int_0^{u_n} \left(\cdots \left(\int_0^{u_1} f(t)\,dt \right) du_1 \right) \cdots \right) du_n.$$

46. Si f' es continua sobre $[a, b]$, aplíquese integración por partes para demostrar el lema de Riemann-Lebesgue para f:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(t) \operatorname{sen}(\lambda t)\,dt = 0.$$

Este resultado no es más que un caso particular del problema 15-26, pero puede utilizarse para demostrar el caso general (de manera muy parecida a como en el problema 15-26 se dedujo el lema de Riemann-Lebesgue del caso particular en que la función f era una función escalonada).

47. En el problema 13-24 se introdujo el Teorema del Valor Medio para Integrales. El «Segundo Teorema del Valor Medio para Integrales» establece lo siguiente: Supóngase que f es integrable en $[a, b]$ y que ϕ es o bien no decreciente o bien no creciente en $[a, b]$. Existe entonces un número ξ en $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx = \phi(a) \int_a^{\xi} f(x)\,dx + \phi(b) \int_{\xi}^b f(x)\,dx.$$

Supondremos en este problema que f es continua y que ϕ es derivable con derivada continua ϕ'.
(a) Demostrar que si el resultado es válido para una ϕ no creciente, también lo es entonces para una ϕ no decreciente.
(b) Demostrar que si el resultado es válido para una ϕ no creciente que sa-

tisface $\phi(b) = 0$, entonces también es válido para todas las ϕ no crecientes.

Podemos suponer así que es ϕ no creciente y $\phi(b) = 0$. En este caso tenemos que demostrar que

$$\int_a^b f(x)\phi(x) = \phi(a) \int_a^\xi f(x)\, dx.$$

(c) Demostrar esto mediante integración por partes.

(d) Demostrar que es necesaria la hipótesis de ser ϕ o bien no decreciente o bien no creciente.

A partir de este caso particular del Segundo Teorema del Valor Medio para Integrales se podría deducir el caso general mediante algunos razonamientos de aproximación, lo mismo que en el caso del Lema de Riemann-Lebesgue. Pero existe una manera más instructiva de hacerlo que queda bosquejada en el siguiente problema.

48. Dados $a_1, ..., a_n$ y $b_1, ..., b_n$, sea $s_k = a_1 + ... a_k$. Demostrar que

$$(*) \qquad a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n.$$

Esta fórmula, llamativamente sencilla, recibe a veces el nombre de «fórmula de Abel para la sumación por partes». Se la puede considerar como un análogo para las sumas de la fórmula de integración por partes

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx,$$

particularmente si utilizamos las sumas de Riemann (capítulo 13, apéndice 1). Efectivamente, para una partición $P = \{t_0, ..., t_n\}$ de $[a, b]$, el primer miembro es aproximadamente

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} f'(t_k)g(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}),$$

mientras que el segundo miembro es aproximadamente

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)g'(t_k)(t_k - t_{k-1})$$

lo cual aproximadamente es

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\frac{g(t_k) - g(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\,(t_k - t_{k-1})$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) + \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[g(t_{k-1}) - g(t_k)]$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) + \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(a)] \cdot [g(t_{k-1}) - g(t_k)]$$

$$+ f(a) \sum_{k=1}^{n} g(t_{k-1}) - g(t_k).$$

Puesto que la suma que aparece en el último término es $g(a) - g(b)$, todo esto se convierte en

$$(2) \qquad [f(b) - f(a)]g(b) + \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(a)] \cdot [g(t_{k-1}) - g(t_k)].$$

Si ponemos

$$a_k = f'(t_k)(t_k - t_{k-1}), \qquad b_k = g(t_{k-1})$$

entonces

$$(1) \quad \text{es} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

lo cual es el primer miembro de (*), mientras que

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} f'(t_i)(t_i - t_{i-1}) \text{ es aproximadamente } \sum_{i=1}^{k} f(t_i) - f(t_{i-1}) = f(t_k) - f(a),$$

así que

$$(2) \quad \text{es aproximadamente} \quad s_n b_n + \sum_{k=1}^{n} s_k(b_k - b_{k-1}),$$

lo cual es el segundo miembro de (*).

Con este estudio no hemos pretendido sugerir que la fórmula de Abel pueda en realidad deducirse de la fórmula de integración por partes o viceversa. Pero, según veremos, la fórmula de Abel puede utilizarse muchas veces como sustituto de la integración por partes en situaciones en que las funciones que intervienen no son derivables.

(b) Supóngase que $\{b_n\}$ es no creciente, con $b_n \geq 0$ para todo n, y que

$$m \leq a_1 + \cdots + a_n \leq M$$

para todo n. Demostrar el lema de Abel:

$$b_1 m \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq b_1 M.$$

(Y además,

$$b_k m \leq a_k b_k + \cdots + a_n b_n \leq b_k M,$$

fórmula que tiene la apariencia de ser más general, pero en realidad no lo es.)

(c) Sea f integrable en $[a, b]$ y sea ϕ no creciente en $[a, b]$ con $\phi(b) = 0$. Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$ y x_i un punto de $[t_{i+1}, t_i]$. Demostrar que la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\phi(x_i)(t_i - t_{i-1})$$

está entre la más pequeña y la mayor de las sumas

$$\phi(a) \sum_{i=1}^{k} f(x_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Concluir que

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\, dx$$

se encuentra entre el mínimo y el máximo de

$$\phi(a) \int_a^x f(t)\, dt,$$

y que por lo tanto es igual a $\phi(a) \int_a^\xi f(t)\, dt$ para un cierto ξ de $[a, b]$.

49. (a) Demostrar que las dos integrales impropias siguientes son las dos convergentes

(i) $\int_0^1 \operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{x}\right) dx.$

(ii) $\int_0^1 \operatorname{sen}^2\left(x + \frac{1}{x}\right) dx.$

(b) Decir cuál de las integrales impropias que siguen es convergente.

(i) $\int_1^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx.$

(ii) $\int_1^\infty \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right) dx.$

50. (a) Calcular la integral (impropia) $\int_0^1 \log x\, dx.$

(b) Demostrar que la integral impropia $\int_0^\pi \log(\operatorname{sen} x)\, dx$ es convergente.

(c) Utilizar la sustitución $x = 2u$ para demostrar que

$$\int_0^\pi \log(\operatorname{sen} x)\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen} x)\, dx + 2\int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\, dx + \pi \log 2.$$

(d) Calcular $\int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\, dx.$

(e) Utilizando la relación $\cos x = \operatorname{sen}(\pi/2 - x)$, calcular $\int_0^{\pi} \log(\operatorname{sen} x)\, dx$.

51. Demostrar la siguiente versión de la integración por partes para integrales impropias:

$$\int_a^{\infty} u'(x)v(x)\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^{\infty} - \int_a^{\infty} u(x)v'(x)\, dx.$$

El primer símbolo del segundo miembro significa, por supuesto,

$$\lim_{x\to\infty} u(x)v(x) - u(a)v(a).$$

***52.** Una de las funciones más importantes del análisis es la función gamma,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\, dt.$$

(a) Demostrar que la integral impropia $\Gamma(x)$ está definida si $x > 0$.

(b) Aplicar la integración por partes (más precisamente, la versión del problema anterior para la integral impropia) para demostrar que

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

(c) Demostrar que $\Gamma(1) = 1$, y deducir que $\Gamma(n) = (n - 1)!$ para cualquier número natural n.
La función gamma ofrece así un ejemplo sencillo de función continua que «interpola» los valores de $n!$ para números naturales x. Existen, por supuesto, infinidad de funciones continuas f con $f(n) = (n - 1)!$; existen incluso infinidad de funciones continuas f con $f(x + 1) = xf(x)$ para todo $x > 0$. Sin embargo, la función gamma tiene la importante propiedad adicional de que $\log \circ \Gamma$ es convexa, condición que expresa la suavidad extrema de esta función. Un hermoso teorema debido a Harald Bohr y Johannes Mollerup afirma que Γ es la única función f con $\log \circ f$ convexa, $f(1) = 1$ y $f(x + 1) = xf(x)$. Véase una referencia en la bibliografía.

***53.** (a) Utilizar la fórmula de reducción para $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ para demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx.$$

(b Demostrar ahora que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ .\ .\ .\ .\ \cdot\frac{2n}{2n+1},$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ .\ .\ .\ .\ \cdot\frac{2n-1}{2n},$$

y deducir que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ .\ .\ .\ .\ \cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\,\frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx}.$$

(c) Demostrar que el cociente de las dos integrales de esta expresión está comprendido entre 1 y $1 + 1/2n$, partiendo de las desigualdades

$$0 < \operatorname{sen}^{2n+1} x \leq \operatorname{sen}^{2n} x \leq \operatorname{sen}^{2n-1} x \quad \text{para} \, 0 < x < \pi/2.$$

Este resultado, que demuestra que los productos

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ .\ .\ .\ .\ \cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

pueden aproximarse tanto como se quiera a $\pi/2$, se suele escribir a menudo como producto infinito, conocido por producto de Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ .\ .\ .\ .\ .$$

(d) Demostrar también que los productos

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ .\ .\ .\ .\ \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ .\ .\ .\ .\ \cdot(2n-1)}$$

pueden aproximarse tanto como se quiera a $\sqrt{\pi}$. (Este hecho se aplica en el próximo problema y en el problema 26-19).

****54.** Es un hecho sorprendente que las integrales impropias $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ pueden

a menudo calcularse en casos en que no es posible calcular las integrales ordinarias $\int_a^b f(x)\,dx$. No existe ninguna fórmula elemental para $\int_a^b e^{-x^2}\,dx$, pero podemos hallar el valor preciso de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$. Existen muchas maneras de calcular esta integral, pero la mayor parte de ellas exigen algunas técnicas avanzadas; el siguiente método supone bastante trabajo, pero no hace uso de hechos que el lector no conozca ya.

(a) Demostrar que

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}.$$

(Esto puede hacerse mediante fórmulas de reducción, o mediante sustituciones adecuadas, combinadas con el problema anterior.)

(b) Demostrar, utilizando la derivada, que

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \qquad \text{para } 0 \leq x \leq 1.$$

$$e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \text{para } 0 \leq x.$$

(c) Integrar las potencias n-ésimas de estas desigualdades entre 0 y 1 y entre 0 e ∞, respectivamente. Utilizar después la sustitución $y = \sqrt{n}x$ para demostrar que

$$\sqrt{n}\,\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\,dy \leq \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy \leq \frac{\pi}{2}\sqrt{n}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}.$$

(d) Utilizar ahora el problema 53(d) para demostrar que

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**55. (a) Aplicar la integración por partes para demostrar que

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} + \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx,$$

y deducir que $\int_0^\infty (\operatorname{sen} x)/x\,dx$ existe. (Utilizar el primer miembro para investigar el límite cuando $a \to 0^+$ y el segundo miembro para el límite cuando $b \to \infty$.)

(b) Utilizar el problema 15-33 para demostrar que

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{\operatorname{sen}\dfrac{t}{2}}\,dt = \pi$$

para todo número natural n.

(c) Demostrar que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\pi \operatorname{sen}(\lambda+\tfrac{1}{2})t \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{t}{2}}\right] dt = 0.$$

Indicación: El término entre corchetes está acotado según el problema 15-2 (vi); se aplica entonces el lema de Riemann-Lebesgue.

(d) Utilizar la sustitución $u = (\lambda + \frac{1}{2})t$ y la parte (b) para demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

56. Conocido el valor de $\int_0^\infty (\operatorname{sen} x)/x\,dx$ por el problema 55, calcular

$$\int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx$$

mediante integración por partes. (La fórmula de sen $2x$ desempeñará un papel importante, al igual que en el problema 50.)

***57.** **(a)** Utilizar la sustitución $u = t^x$ para demostrar que

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-u^{1/x}}\,dx.$$

(b) Hallar $\Gamma(\frac{1}{2})$.

***58.** (a) Supóngase que $\dfrac{f(x)}{x}$ es integrable en todo intervalo $[a, b]$ para $0 < a < b$, y que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = B$. Demostrar que para todos los α, $\beta > 0$ tenemos

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,dx = (A - B)\log\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ayuda: Estimar $\displaystyle\int_\varepsilon^N \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,dx$ mediante dos sustituciones distintas.

(b) Supóngase ahora que $\displaystyle\int_a^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$ converge para todo $a > 0$ y que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$. Demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,dx = A\log\frac{\beta}{\alpha}.$$

(c) Calcular las integrales siguientes

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)}{x}\,dx.$

Dijimos en el capítulo 13, más bien alegremente, que las integrales se pueden calcular con toda la aproximación que se quiera obteniendo sumas inferiores y superiores. Pero a un matemático aplicado, más interesado en llevar a efecto los cál-

culos que en hacer elucubraciones sobre los mismos, es posible que no le haga demasiado feliz la perspectiva de tener que calcular sumas inferiores con tres decimales exactos, pongamos por caso (grado de aproximación que fácilmente puede resultar necesario en ciertas circunstancias). Los tres problemas que siguen hacen ver de qué manera es posible hacer más eficientes los cálculos empleando métodos más refinados.

Para empezar hay que decir que incluso puede no resultar práctico proceder al cálculo de sumas superiores e inferiores, ya que puede no ser posible calcular las cantidades m_i y M_i para cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Mucho más razonable es tomar puntos x_i en $[t_{i-1}, t_i]$ y considerar $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$. Esto representa la suma de las áreas de ciertos rectángulos que recubren parcialmente la gráfica de f (véase la figura 1 del apéndice 1 al capítulo 13). Pero obtendremos mucho mejor resultado si tomamos en su lugar los trapecios indicados en la figura 12.

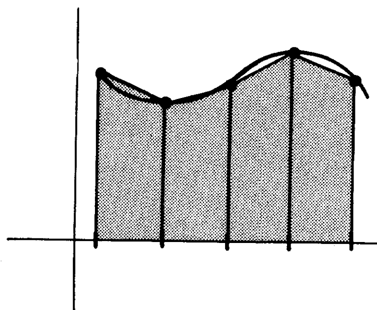


FIGURA 12

Supóngase en particular que dividimos $[a, b]$ en n intervalos iguales por medio de los puntos

$$t_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right) = a + ih.$$

Entonces el trapecio de base $[t_{i-1}, t_i]$ tiene el área

$$\frac{f(t_{i-1}) + f(t_i)}{2} \cdot (t_i - t_{i-1})$$

y la suma de todas estas áreas es sencillamente

$$\Sigma_n = h\left[\frac{f(t_1)+f(a)}{2}+\frac{f(t_2)+f(t_1)}{2}+\cdots+\frac{f(b)+f(t_{n-1})}{2}\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)+f(b)\right], \qquad h=\frac{b-a}{n}.$$

Este método de aproximar una integral recibe el nombre de *regla del trapecio*. Obsérvese que para obtener Σ_{2n} a partir de Σ_n no es necesario volver a calcular los $f(t_i)$ antiguos; su contribución a Σ_{2n} es precisamente $\frac{1}{2}\Sigma_n$. Lo mejor en la práctica es ir calculando Σ_2, Σ_4, Σ_8, ... para obtener aproximaciones de $\int_a^b f$. En el problema que sigue vamos a estimar $\int_a^b f - \Sigma_n$.

59. (a) Supóngase que f'' es continua. Sea P_i la función lineal que coincide con f en t_{i-1} y en t_i. Demostrar aplicando el problema 11-43, que si n_i y N_i son el mínimo y el máximo de f'' en $[t_{i-1}, t_i]$ e

$$I = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x-t_{i-1})(x-t_i)\,dx,$$

entonces

$$\frac{n_i I}{2} \geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f-P_i) \geq \frac{N_i I}{2}.$$

(b) Calcular I para obtener

$$\frac{n_i h^3}{12} \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f-P_i) \leq \frac{N_i h^3}{12}.$$

(c) Concluir que existe un cierto c de $[a, b]$ con

$$\int_a^b f = \Sigma_n - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c).$$

Observar que el «error» $(b-a)^3 f''/12n^2$ varía con $1/n^2$ (mientras que el error que se obtiene con las sumas ordinarias varía con $1/n$).

Es posible obtener resultados todavía más exactos aproximando f mediante funciones cuadráticas en lugar de funciones lineales. Vamos a considerar primero lo que ocurre cuando se divide el intervalo $[a, b]$ en dos intervalos iguales (figura 13).

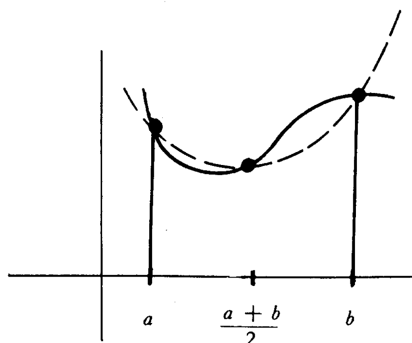


FIGURA 13

60. (a) Supóngase primero que es $a = 0$ y $b = 2$. Sea P la función polinómica de segundo grado que coincide con f en 0, 1 y 2 (problema 3-6). Demostrar que

$$\int_0^2 P = \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + f(2)].$$

(b) Deducir que en el caso general

$$\int_a^b P = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

(c) Naturalmente $\int_a^b P = \int_a^b f$ cuando f es un polinomio cuadrático. Pero, sorprendentemente, esta misma relación es válida cuando f es un polinomio cúbico. Demostrar esto utilizando el problema 11-43; tener en cuenta que f''' es constante.

El problema anterior hace ver que no hacen falta nuevos cálculos para obtener $\int_a^b Q$ cuando Q es un polinomio cúbico que coincide con f en a, b y $\frac{a+b}{2}$: se sigue teniendo

$$\int_a^b Q = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Pero queda un margen mucho mayor para la elección de Q, de lo cual podemos sacar provecho:

61. (a) Demostrar que existe un polinomio cúbico Q que satisface

$$Q(a) = f(a), \qquad Q(b) = f(b), \qquad Q\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$Q'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Ayuda: Está claro que es $Q(x) = P(x) + A(x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$ para cierto A.

(b) Demostrar que para todo x tenemos

$$f(x) - Q(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$$

para un cierto ξ de $[a, b]$. Ayuda: Imitar la demostración del problema 11-43.

(c) Deducir que si es $f^{(4)}$ continua, entonces

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(c)$$

para cierto c de $[a, b]$.

(d) Partir ahora $[a, b]$ en $2n$ intervalos por medio de los puntos

$$t_i = a + ih, \qquad h = \frac{b-a}{2n}.$$

Demostrar la *regla de Simpson*:

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{n}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{n} f(t_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(t_{2i}) + f(b)\right)$$
$$- \frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\bar{c})$$

para un cierto $\bar{c}$ de $[a, b]$.

PARTE 4
SUCESIONES INFINITAS Y SERIES INFINITAS

Una de las series más notables del
análisis algebraico es la siguiente:

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{m(m-1) \cdots [m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdots \cdots n}x^n$$
$$+ \cdots$$

Cuando m *es un entero positivo,*
la suma de la serie,
que entonces es finita, puede expresarse,
según se sabe, por $(1 + x)^m$.
Cuando m *no es entero,*
la serie va hacia el infinito, y
convergerá o divergerá según que
las cantidades
m *y* x *tengan unos valores u otros.*
En este caso, se escribe la misma igualdad

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1}x$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \cdots \textit{etc.}$$

... Se supone que
la igualdad numérica se cumplirá
siempre que la serie sea convergente,
pero esto todavía no ha sido demostrado.

NIELS HENRIK ABEL

CAPÍTULO

19

APROXIMACIÓN MEDIANTE FUNCIONES POLINÓMICAS

En cierto sentido, las «Funciones elementales» no son nada elementales. Si p es una función polinómica,

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

entonces $p(x)$ puede calcularse fácilmente cualquiera que sea el número x. Esto no se cumple en absoluto para funciones como sen, log o exp. Por ahora, para hallar $\log x = \int_1^x 1/t\,dt$ de modo aproximado, debemos calcular algunas sumas superiores o inferiores, y asegurarnos de que el error cometido al aceptar una tal suma como $\log x$ no es excesivamente grande. El cálculo de $e^x = \log^{-1}(x)$ sería todavía más difícil: tendríamos que calcular $\log a$ para muchos valores de a hasta encontrar un número a tal que $\log a$ fuera aproximadamente x: entonces a sería aproximadamente e^x.

En este capítulo obtendremos importantes resultados teóricos que reducirán el cálculo de $f(x)$, para muchas funciones f, al cálculo de funciones polinómicas. El método consiste en hallar funciones polinómicas que se aproximen estrechamente a f. Para encontrar un polinomio apropiado, conviene antes examinar las mismas funciones polinómicas con más detenimiento.

Supongamos que

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

Es interesante, y para nuestros fines muy importante, observar que los coeficientes a_i pueden expresarse en términos del valor de p y de sus distintas derivadas en 0. Para empezar observemos que

$$p(0) = a_0.$$

Al derivar la expresión original de $p(x)$ se obtiene

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}.$$

Por lo tanto,

$$p'(0) = p^{(1)}(0) = a_1.$$

Al derivar de nuevo obtenemos

$$p''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3x + \cdots + n(n-1) \cdot a_nx^{n-2}.$$

Por lo tanto,

$$p''(0) = p^{(2)}(0) = 2a_2.$$

En general, tendremos

$$p^{(k)}(0) = k!a_k \quad \text{o} \quad a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}.$$

Si convenimos en definir $0! = 1$, y recordamos la notación $p^{(0)} = p$, entonces esta fórmula se cumple también para $k = 0$.

Si hubiésemos empezado con una función p escrita como un «polinomio en $(x-a)$»,

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n,$$

entonces un razonamiento parecido demostraría que

$$a_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}.$$

Supongamos ahora que f es una función (no necesariamente un polinomio) tal que

$$f^{(1)}(a), \ldots, f^{(n)}(a)$$

existen todas. Sea

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

y definamos

$$P_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n.$$

El polinomio $P_{n,a}$ recibe el nombre de **polinomio de Taylor de grado** n **para** f **en** a. (En rigor, deberíamos usar una expresión todavía más complicada, tal como $P_{n,a,f}$, para indicar la dependencia de f; habrá ocasiones en que será conveniente utilizar esta notación más precisa.) Se ha definido el polinomio de Taylor de modo que

$$P_{n,a}{}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \text{ para } 0 \leq k \leq n;$$

de hecho, es evidentemente el único polinomio *de grado* $\leq n$ con esta propiedad.

Aunque los coeficientes de $P_{n,a,f}$ parecen depender de f de manera bastante complicada, las funciones elementales más importantes tienen polinomios de Taylor muy sencillos. Consideremos en primer lugar la función sen. Tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(0) &= 0, \\ \operatorname{sen}'(0) &= \cos 0 = 1, \\ \operatorname{sen}''(0) &= -\operatorname{sen} 0 = 0, \\ \operatorname{sen}'''(0) &= -\cos 0 = -1, \\ \operatorname{sen}^{(4)}(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0. \end{aligned}$$

De aquí en adelante, las derivadas se repiten con un ciclo de 4. Los números

$$a_k = \frac{\operatorname{sen}^{(k)}(0)}{k!}$$

son

$$0,\, 1,\, 0,\, -\frac{1}{3!},\, 0,\, \frac{1}{5!},\, 0,\, -\frac{1}{7!},\, 0,\, \frac{1}{9!},\, \cdots .$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor $P_{2n+1,0}$ de grado $2n+1$ para sen en 0 es

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(Por supuesto, $P_{2n+1,0} = P_{2n+2,0}$.)

El polinomio de Taylor $P_{2n,0}$ de grado $2n$ para cos en 0 es (los cálculos se dejan para el lector)

$$P_{2n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

El polinomio de Taylor para exp es particularmente fácil de calcular. Puesto que $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ para todo k, el polinomio de Taylor de grado n en 0 es

$$P_{n,0}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

El polinomio de Taylor para log debe calcularse en algún punto $a \neq 0$, ya que log no está ni siquiera definido en 0. Se suele elegir $a = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \log'(x) &= \frac{1}{x}, & \log'(1) &= 1; \\ \log''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & \log''(1) &= -1; \\ \log'''(x) &= \frac{2}{x^3}, & \log'''(1) &= 2; \end{aligned}$$

en general

$$\log^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}, \quad \log^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!.$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de grado n para log en 1 es

$$P_{n,1}(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}.$$

Muchas veces es más conveniente considerar la función $f(x) = \log(1+x)$. En este caso podemos elegir $a = 0$. Tenemos

$$f^{(k)}(x) = \log^{(k)}(1+x),$$

de modo que

$$f^{(k)}(0) = \log^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

Por lo tanto el polinomio de Taylor de grado n para f en 0 es

$$P_{n,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

Existe otra función elemental cuyo polinomio de Taylor es importante: arctan. Los cálculos de las derivadas empiezan

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \operatorname{arctg}'(0) = 1;$$

$$\operatorname{arctg}''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad \operatorname{arctg}''(0) = 0;$$

$$\operatorname{arctg}'''(x) = \frac{(1+x^2)^2\cdot(-2) + 2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}, \qquad \operatorname{arctg}'''(0) = -2.$$

Es evidente que este cálculo a base de emplear la fuerza bruta no puede dar buen resultado. Sin embargo, los polinomios de Taylor de arctan serán fáciles de hallar una vez que hayamos examinado más detenidamente las propiedades de los polinomios de Taylor —aunque el polinomio de Taylor $P_{n,a,f}$ se definió simplemente como el que tiene las primeras n derivadas en a coincidentes con las de f, la conexión entre f y $P_{n,a,f}$ resultará ser en realidad mucho más profunda.

Se pone de manifiesto la mayor conexión entre f y los polinomios de Taylor para f al observar el polinomio de Taylor de grado 1, que es

$$P_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Obsérvese que

$$\frac{f(x) - P_{1,a}(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

Ahora bien, según la definición de $f'(a)$ tenemos

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{1,a}(x)}{x - a} = 0.$$

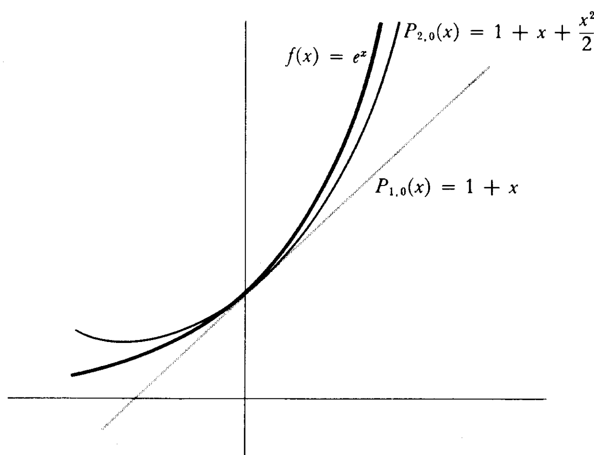


FIGURA 1

En otras palabras, cuando x tiende hacia a, la diferencia $f(x) - P_{1,a}(x)$ no sólo se hace pequeña, sino que en realidad se hace pequeña incluso en comparación con $x - a$. La figura 1 muestra la gráfica de $f(x) = e^x$ y de

$$P_{1,0}(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x,$$

que es el polinomio de Taylor de grado 1 para f en 0. El diagrama muestra también la gráfica de

$$P_{2,0}(x) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

que es el polinomio de Taylor de grado 2 para f en 0. Cuando x tiende hacia 0, la diferencia $f(x) - P_{2,0}(x)$ parece hacerse pequeña incluso más de prisa que la diferencia $f(x) - P_{1,0}(x)$. Esta afirmación, tal como ha sido expresada, no es muy

precisa, pero ahora estamos en condiciones de darle un significado definido. Acabamos de observar que, en general,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{1,a}(x)}{x-a}=0.$$

Para $f(x)=e^x$ y $a=0$ esto significa que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-P_{1,0}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x}=0,$$

Por otra parte, aplicando sencillamente dos veces la regla de l'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=1\neq 0.$$

Así pues, aunque $f(x)-P_{1,0}(x)$ se hace pequeño en comparación con x, cuando x tiende a 0 *no* se hace pequeño en comparación con x^2. Para $P_{2,0}(x)$ la situación es muy distinta; el término adicional $x^2/2$ ofrece precisamente la adecuada compensación:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2}=0.$$

Este resultado se cumple en general — si existen $f'(a)$ y $f''(a)$; entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{2,a}(x)}{(x-a)^2}=0;$$

de hecho, la afirmación análoga para $P_{n,a}$ se cumple también.

TEOREMA 1

Supongamos que f es una función para la cual

$$f'(a),\ \ldots\ ,f^{(n)}(a)$$

existen todas. Sea

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

y definamos

$$P_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x - a) + \cdots + a_n(x - a)^n.$$

Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN

Al escribir $P_{n,a}(x)$ explícitamente, obtenemos

$$\frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = \frac{f(x) - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x - a)^i}{(x - a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Será conveniente introducir las nuevas funciones

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x - a)^i \quad \text{y} \quad g(x) = (x - a)^n;$$

debemos demostrar ahora que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - Q(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Obsérvese que

$$Q^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad k \leq n - 1,$$
$$g^{(k)}(x) = n!(x - a)^{n-k}/(n - k)!$$

Así pues,

$$\lim_{x\to a} [f(x) - Q(x)] = f(a) - Q(a) = 0,$$
$$\lim_{x\to a} [f'(x) - Q'(x)] = f'(a) - Q'(a) = 0,$$
$$\vdots$$
$$\lim_{x\to a} [f^{(n-2)}(x) - Q^{(n-2)}(x)] = f^{(n-2)}(a) - Q^{(n-2)}(a) = 0,$$

y

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} g'(x) = \cdots = \lim_{x\to a} g^{(n-2)}(x) = 0.$$

Podemos aplicar, por lo tanto, la regla de l'Hôpital $n-1$ veces para obtener

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - Q^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}.$$

Puesto que Q es un polinomio de grado $n-1$, su derivada de orden $n-1$ es una constante; en efecto, $Q^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a)$. Así pues,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)},$$

y este último límite es $f^{(n)}(a)/n!$ según la definición de $f^{(n)}(a)$. ▌

Una sencilla consecuencia del teorema 1 nos permite perfeccionar la prueba de los máximos y mínimos locales desarrollada en el capítulo 11. Si a es un punto singular de f, entonces, según el teorema 11-5, la función f tiene un mínimo local en a si $f''(a) > 0$, y un máximo local en a si $f''(a) < 0$. Si $f''(a) = 0$ no fue posible obtener ninguna conclusión, pero se puede pensar que el signo de $f'''(a)$ podría dar mayor información; y si $f'''(a) = 0$, entonces el signo de $f^{(4)}(a)$ podría ser significativo. Con más generalidad aún, podemos preguntarnos qué ocurre cuando

$$(*)\quad \begin{aligned} &f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,\\ &f^{(n)}(a) \neq 0.\end{aligned}$$

La situación en este caso puede adivinarse examinando las funciones

$$f(x) = (x-a)^n,$$
$$g(x) = -(x-a)^n,$$

que satisfacen (*). Obsérvese (fig. 2) que si n es impar, entonces a no es ni máximo local ni mínimo local para f o g. Por otra parte, si n es par, entonces f, con una derivada n-ésima positiva, tiene un mínimo local en a, mientras que g, con una derivada n-ésima negativa, tiene un máximo local en a. Entre todas las funciones que satisfacen (*), éstas son las más sencillas disponibles; no obstante, indican exactamente la situación general. De hecho, el meollo de toda la demostración que sigue consiste en que cualquier función que satisface (*) se parece mucho a una de estas funciones, en un sentido precisado por el teorema 1.

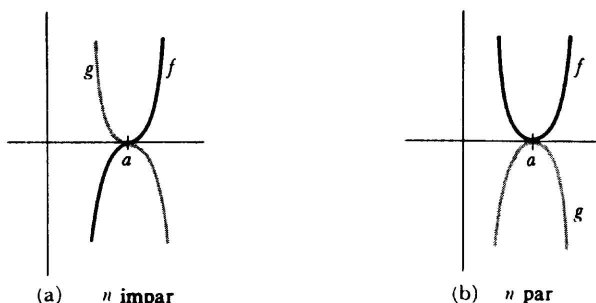


FIGURA 2

TEOREMA 2

Supóngase que

$$f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$
$$f^{(n)}(a) \neq 0.$$

(1) Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en a.
(2) Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en a.
(3) Si n es impar, entonces f no tiene ni máximo ni mínimo local en a.

DEMOSTRACIÓN

Evidentemente no se restringe la generalidad al suponer $f(a) = 0$, ya que ni la hipótesis ni la conclusión son afectadas al sustitur f por $f - f(a)$. Entonces, puesto

que las primeras $n-1$ derivadas de f en a son 0, el polinomio de Taylor $P_{n,a}$ de f es

$$\begin{aligned} P_{n,a}(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Así pues, el teorema 1 afirma que

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right].$$

En consecuencia, si x está suficientemente próximo a a, entonces

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} \text{ tiene el mismo signo que } \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Supongamos ahora que n es par. En este caso $(x-a)^n > 0$ para todo $x \neq a$. Puesto que $f(x)/(x-a)^n$ tiene el mismo signo que $f^{(n)}(a)/n!$ para x suficientemente próximos a a, se sigue que $f(x)$ tiene el mismo signo que $f^{(n)}(a)/n!$ cuando x está suficientemente próximo a a. Si $f^{(n)}(a) > 0$, esto significa que

$$f(x) > 0 = f(a)$$

para x próximos a a. En consecuencia, f tiene un mínimo local en a. Una demostración parecida vale para el caso $f^{(n)}(a) < 0$.

Supongamos ahora que n es impar. El mismo razonamiento de antes hace ver que si x está suficientemente próximo a a, entonces

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} \text{ tiene siempre el mismo signo.}$$

Pero $(x-a)^n > 0$ para $x > a$ y $(x-a)^n < 0$ para $x < a$. Por lo tanto $f(x)$ tiene signos *diferentes* para $x > a$ y $x < a$. Esto demuestra que f no tiene ni máximo ni mínimo local en a. ▌

Aunque el teorema 2 resuelve la cuestión de los máximos y mínimos locales para cualquiera de las funciones que se presentan en la práctica, tiene algunas

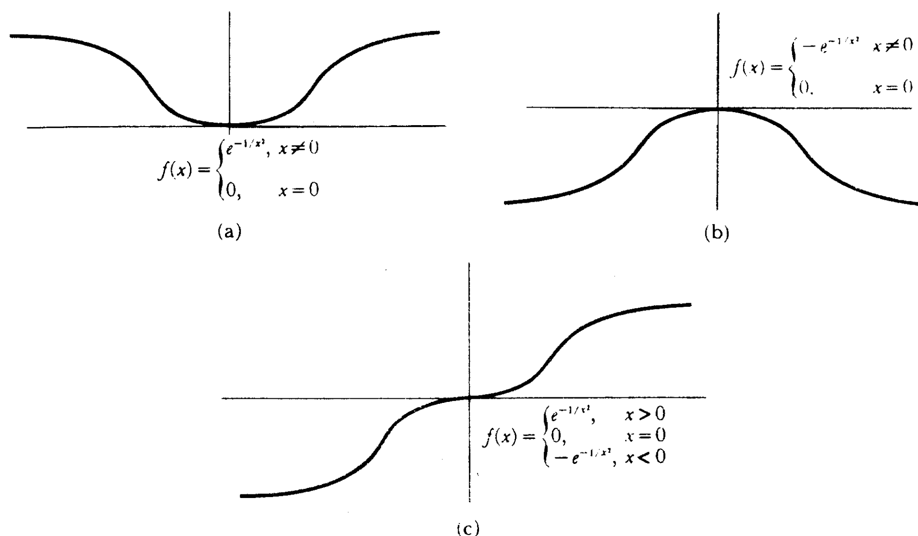


FIGURA 3

limitaciones teóricas, puesto que $f^{(k)}(a)$ puede ser 0 para *todo* k. Esto ocurre (figura 3(a)) para la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

la cual tiene un mínimo en 0, y también para la función negativa de ésta (figura 3(b)), la cual tiene un máximo en 0. Además (fig. 3(c)), si

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -e^{-1/x^2}, & x < 0, \end{cases}$$

entonces $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k, pero f no tiene ni máximo ni mínimo local en 0.

La conclusión del teorema 1 se expresa a veces en términos de un concepto importante de «orden de igualdad». Dos funciones f y g se dice que son **iguales hasta el orden n en a** si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

En el lenguaje de esta definición, el teorema 1 dice que el polinomio de Taylor $P_{n,a,f}$ es igual a f hasta el orden n en a. El polinomio de Taylor podría muy bien haberse definido como aquel que hace que este hecho se cumpla, puesto que existe a lo sumo un polinomio de grado $\leq n$ con esta propiedad. Esta afirmación es consecuencia del siguiente teorema elemental.

TEOREMA 3

Sean P y Q dos polinomios en $(x-a)$, de grado $\leq n$, y supongamos que P y Q son iguales hasta el orden n en a. Entonces $P = Q$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $R = P - Q$. Puesto que R es un polinomio de grado $\leq n$, basta solamente demostrar que si

$$R(x) = b_0 + \cdots + b_n(x-a)^n$$

satisface

$$\lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

entonces $R = 0$. Ahora bien, la hipótesis para R con seguridad implica que

$$\lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^i} = 0 \quad \text{para } 0 \leq i \leq n.$$

Para $i = 0$ esta condición resulta simplemente $\lim_{x\to a} R(x) = 0$; por otra parte,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} R(x) &= \lim_{x\to a} [b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n] \\ &= b_0.\end{aligned}$$

Así pues, $b_0 = 0$ y

$$R(x) = b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n.$$

Por lo tanto,

$$\frac{R(x)}{x-a} = b_1 + b_2(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^{n-1}$$

y

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{x-a} = b_1.$$

Así pues, $b_1 = 0$ y

$$R(x) = b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n.$$

Continuando de esta manera encontramos que

$$b_0 = \cdots = b_n = 0. \blacksquare$$

COROLARIO

Sea f derivable n veces en a, y supongamos que P es un polinomio en $(x-a)$ de grado $\leq n$, igual a f hasta el orden n en a. Entonces $P = P_{n,a}$.

DEMOSTRACIÓN

Puesto que P y $P_{n,a}$ son ambos iguales a f hasta el orden n en a, es fácil ver que P es igual a $P_{n,a}$ hasta el orden n en a. En consecuencia, $P = P_{n,a}$ según el teorema. ▮

A primera vista parece que este corolario tenga unas hipótesis innecesariamente complicadas; podría parecer que la existencia del polinomio P implicaría que f fuera suficientemente derivable para que existiera $P_{n,a}$. Pero de hecho esto no es así. Por ejemplo (fig. 4), supongamos que

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1}, & x \text{ irracional} \\ 0, & x \text{ racional} \end{cases}$$

Si $P(x) = 0$, entonces P es ciertamente un polinomio de grado $\leq n$ que es igual a f hasta el orden n en 0. Por otra parte, $f'(a)$ no existe para ningún $a \neq 0$, de modo que $f''(0)$ no está definida.

Cuando f tiene n derivadas en a, el corolario puede ofrecer, sin embargo, un método útil para hallar el polinomio de Taylor de f. En particular, recuérdese que

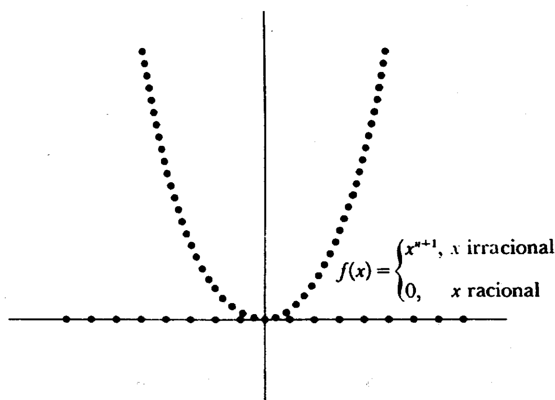


FIGURA 4

nuestro primer intento de hallar el polinomio de Taylor de arctg terminó en fracaso. La ecuación

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

sugiere un método prometedor de hallar un polinomio que se aproxime a arctg —divídase 1 por $1 + t^2$, para obtener un polinomio más un resto:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

Esta fórmula, que puede comprobarse fácilmente multiplicando ambos miembros por $1 + t^2$, demuestra que

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= \int_0^x 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n}\,dt + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Según nuestro corolario, el polinomio que aquí aparece será el polinomio de Taylor de grado $2n + 1$ para arctg en 0, siempre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt}{x^{2n+1}} = 0.$$

Puesto que

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \right| \le \left| \int_0^x t^{2n+2}\,dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3},$$

esto se cumple evidentemente. Así pues, hemos hallado que el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ para arctg en 0 es

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Digamos de paso que, ahora que hemos descubierto los polinomios de Taylor para arctg, es posible proceder a la inversa y hallar $\operatorname{arctg}^{(k)}(0)$ para todo k: Puesto que

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

y puesto que este polinomio es, por definición,

$$\operatorname{arctg}^{(0)}(0) + \operatorname{arctg}^{(1)}(0)x + \frac{\operatorname{arctg}^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\operatorname{arctg}^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

podemos hallar $\operatorname{arctg}^{(k)}(0)$ igualando simplemente los coeficientes de x^k en estos dos polinomios:

$$\frac{\operatorname{arctg}^{(k)}(0)}{k!} = 0 \quad \text{si } k \text{ es par,}$$

$$\frac{\operatorname{arctg}^{(2l+1)}(0)}{(2l+1)!} = \frac{(-1)^l}{2l+1} \quad \text{o} \quad \operatorname{arctg}^{(2l+1)}(0) = (-1)^l \cdot (2l)!$$

Un hecho mucho más interesante surge si volvemos a la ecuación original

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt,$$

y recordamos la estimación

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

Cuando $|x| \leq 1$, esta expresión es a lo sumo $1/(2n+3)$ y podemos hacer esto tan pequeño como queramos eligiendo simplemente n suficientemente grande. En otras palabras, para $|x| \leq 1$ *podemos utilizar los polinomios de Taylor para* arctg *para calcular* arctg x *con tanta aproximación como queramos.* Los teoremas más importantes acerca de los polinomios de Taylor extienden este resultado aislado a otras funciones, y los polinomios de Taylor desempeñarán pronto un papel completamente nuevo. Los teoremas hasta aquí demostrados han examinado siempre el comportamiento del polinomio de Taylor $P_{n,a}$ para *n fijo*, cuando x tiende hacia a. En adelante vamos a comparar los polinomios de Taylor $P_{n,a}$ para x fijo, y distintos n. Anticipándonos al próximo teorema introducimos una nueva notación.

Si f es una función para la cual existe $P_{n,a}(x)$, definimos el **resto** $R_{n,a}(x)$ por

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x). \end{aligned}$$

Sería deseable disponer de una expresión para $R_{n,a}(x)$ que permitiera estimar fácilmente su magnitud. Tal expresión existe y encierra una integral, lo mismo que en el caso de arctg. Una manera de llegar a esta expresión es empezar por el caso $n = 0$:

$$f(x) = f(a) + R_{0,a}(x).$$

El teorema fundamental del cálculo infinitesimal nos permite escribir

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt,$$

de manera que

$$R_{0,a}(x) = \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Se puede obtener una expresión análoga para $R_{1,a}(x)$ a partir de esta fórmula utilizando la integración por partes de una manera bastante artificiosa: Sea

$$u(t) = f'(t) \quad \text{y} \quad v(t) = t - x$$

(obsérvese que x representa cierto número fijo en la expresión para $v(t)$, de modo que $v'(t) = 1$); entonces

$$\begin{aligned}\int_a^x f'(t)\,dt &= \int_a^x \underset{u(t)}{\underbrace{f'(t)}} \cdot \underset{v'(t)}{\underbrace{1}}\,dt \\ &= u(t)v(t)\Big|_a^x - \int_a^x \underset{u'(t)}{\underbrace{f''(t)}}\underset{v(t)}{\underbrace{(t - x)}}\,dt.\end{aligned}$$

Por ser $v(x) = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \\ &= f(a) - u(a)v(a) + \int_a^x f''(t)(x - t)\,dt \\ &= f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x f''(t)(x - t)\,dt.\end{aligned}$$

Así pues,

$$R_{1,a}(x) = \int_a^x f''(t)(x - t)\,dt.$$

Es difícil explicar motivadamente la elección de $v(t) = t - x$, en vez de $v(t) = t$. Lo que pasa es que ésta es la elección que da resultado, conclusión a la que podría haberse llegado después de suficientes intentos parecidos pero inútiles. Sin embargo, resulta ahora fácil llegar a la fórmula para $R_{2,a}(x)$. Si

$$u(t) = f''(t) \quad \text{y} \quad v(t) = \frac{-(x - t)^2}{2},$$

entonces $v'(t) = (x - t)$, de modo que

$$\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt = u(t)v(t)\Big|_a^x - \int_a^x f'''(t)\cdot\frac{-(x-t)^2}{2}\,dt$$
$$= \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \int_a^x \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2\,dt.$$

Esto demuestra que

$$R_{2,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(3)}(t)}{2}(x-t)^2\,dt.$$

El lector debería poder dar ahora sin dificultad una demostración rigurosa, por inducción, de que si $f^{(n+1)}$ es continua sobre $[a, x]$, entonces

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt.$$

A partir de esta fórmula, llamada forma integral del resto, es posible (problema 15) obtener otras dos importantes expresiones para $R_{n,a}(x)$: la forma de Cauchy del resto,

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a) \text{ para algún } t \text{ de } (a, x),$$

y la forma de Lagrange del resto,

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ para algún } t \text{ de } (a, x).$$

En la demostración del próximo teorema (teorema de Taylor) deduciremos las tres formas del resto de una forma totalmente distinta. Una ventaja de esta demostración (aparte de su ingeniosidad) es el hecho de que las formas de Cauchy y de Lagrange del resto se demostrarán sin suponer la hipótesis adicional de que $f^{(n+1)}$ es continua. De esta manera el teorema de Taylor aparece como una generalización del teorema del valor medio, al cual se reduce para $n = 0$, y el cual constituye el instrumento crucial utilizado en la demostración.

Estas observaciones sugieren una estrategia para la demostración del teorema de Taylor. Al ser $R_{n,a}(a) = 0$, podemos intentar aplicar el teorema del valor medio a la expresión

$$\frac{R_{n,a}(x)}{x-a} = \frac{R_{n,a}(x) - R_{n,a}(a)}{x-a}.$$

Pensándolo bien, sin embargo, esta idea no parece muy prometedora, puesto que no está claro en absoluto en qué manera va a entrar $f^{(n+1)}(t)$ en la solución. En efecto, si tomamos el camino más directo, y derivamos ambos miembros de la ecuación que define $R_{n,a}$, obtenemos

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_{n,a}'(x),$$

lo cual no nos sirve. La aplicación adecuada del teorema del valor medio tiene mucho en común con la demostración mediante integración por partes esbozada antes. Esta demostración hacía intervenir la derivada de una función en la cual x *representaba un número fijo.* Así será como va a ser tratado x en la demostración siguiente.

TEOREMA 4
(TEOREMA DE TAYLOR)

Supóngase que $f', \ldots, f^{(n+1)}$ están definidas sobre $[a, x]$, y que $R_{n,a}(x)$ está definido por

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x).$$

Entonces

(1) $R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a)$ para algún t de (a, x).

(2) $R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ para algún t de (a, x).

Además, si $f^{(n+1)}$ es integrable sobre $[a, x]$, entonces

(3) $R_{n,a}(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt.$

(Si $x < a$, entonces la hipótesis debería decir que f es derivable $(n+1)$ veces sobre $[x, a]$; el número t en (1) y (2) estará entonces en (x, a), mientras que (3) seguirá cumpliéndose tal como está, siempre que $f^{(n+1)}$ sea integrable sobre $[x, a]$.)

DEMOSTRACIÓN

Para todo número t de $[a, x]$ tenemos

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + R_{n,t}(x).$$

Designemos el número $R_{n,t}(x)$ por $S(t)$; la función S está definida sobre $[a, x]$, y tenemos

$$(*)\quad f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + S(t)$$

para todo t de $[a, x]$.

Vamos a derivar ahora ambos miembros de esta ecuación, la cual nos dice que la función cuyo valor en t es $f(x)$, es igual a la función cuyo valor en t es

$$f(t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + S(t).$$

[Vulgarmente hablando, estamos considerando ambos miembros de (*) «como una función de t».] Sólo para asegurarnos de que la letra x no causa confusión, observemos que si

$$g(t) = f(x) \quad \text{para todo } t,$$

entonces

$$g'(t) = 0 \quad \text{para todo } t;$$

y si

$$g(t) = \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

entonces

$$g'(t) = \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k(x - t)^{k-1}(-1) + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k$$
$$= - \frac{f^{(k)}(t)}{(k - 1)!} (x - t)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k.$$

Aplicando estas fórmulas a cada uno de los términos de (*), obtenemos

$$0 = f'(t) + \left[-f'(t) + \frac{f''(t)}{1!} (x - t)\right] + \left[\frac{-f''(t)}{1!} (x - t) + \frac{f^{(3)}(t)}{2!} (x - t)^2\right]$$
$$+ \cdots + \left[\frac{-f^{(n)}(t)}{(n - 1)!} (x - t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n\right] + S'(t).$$

En esta bonita fórmula se cancela prácticamente todo lo que está a la vista, y obtenemos

$$S'(t) = - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n.$$

Ahora podemos aplicar el teorema del valor medio a la función S sobre $[a, x]$: existe un t en (a, x) tal que

$$\frac{S(x) - S(a)}{x - a} = S'(t) = - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n.$$

Recuérdese que

$$S(t) = R_{n,t}(x);$$

esto significa en particular que

$$S(x) = R_{n,x}(x) = 0,$$
$$S(a) = R_{n,a}(x).$$

Así pues

$$\frac{0 - R_{n,a}(x)}{x - a} = - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n$$

o

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n(x - a);$$

ésta es la forma de Cauchy del resto.

Para deducir la forma de Lagrange aplicamos el teorema del valor medio de Cauchy a las funciones S y $g(t) = (x - t)^{n+1}$: existe algún t en (a, x) tal que

$$\frac{S(x) - S(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{S'(t)}{g'(t)} = \frac{-\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n}{-(n + 1)(x - t)^n}.$$

Así pues

$$\frac{R_{n,a}(x)}{(x - a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n + 1)!}$$

o

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1},$$

lo cual es la forma de Lagrange.

Finalmente, si $f^{(n+1)}$ es integrable sobre $[a, x]$, entonces

$$S(x) - S(a) = \int_a^x S'(t) = -\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n\, dt$$

o

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n\, dt. \blacksquare$$

Aunque las formas de Lagrange y de Cauchy del resto son algo más que curiosidades teóricas (véase, por ejemplo, el problema 22-18), la forma integral del resto será, por lo general, muy adecuada. Si se aplica esta forma a las funciones sen, cos, y exp, con $a = 0$, el teorema de Taylor proporciona las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}\,dt,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \int_0^x \frac{\cos^{(2n+1)}(t)}{(2n)!}(x-t)^{2n}\,dt,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n\,dt.$$

Calcular explícitamente cualquiera de estas integrales sería suprema locura; por supuesto, la solución será exactamente la diferencia entre el primer miembro y todos los restantes términos del segundo miembro. Sin embargo, *estimar* estas integrales es fácil y al mismo tiempo vale la pena.

Las dos integrales primeras son particularmente fáciles. Al ser

$$|\operatorname{sen}^{(2n+2)}(t)| \leq 1 \quad \text{para todo } t,$$

tenemos

$$\left| \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}\,dt \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!} \left| \int_0^x (x-t)^{2n+1}\,dt \right|.$$

Puesto que

$$\int_0^x (x-t)^{2n+1}\,dt = \left.\frac{-(x-t)^{2n+2}}{2n+2}\right|_{t=0}^{t=x} = \frac{x^{2n+2}}{2n+2},$$

deducimos que

$$\left| \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}\,dt \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Análogamente, podemos demostrar que

$$\left| \int_0^x \frac{\cos^{(2n+1)}(t)}{(2n)!}(x-t)^{2n}\,dt \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Estas estimaciones son particularmente interesantes, ya que (según se ha demostrado en el capítulo 16) para todo $\varepsilon > 0$ podemos hacer

$$\frac{x^n}{n!} < \varepsilon$$

eligiendo n suficientemente grande (lo grande que tenga que ser n dependerá de x). Esto nos permite calcular sen x con tanta aproximación como queramos, calculando simplemente el polinomio de Taylor adecuado $P_{n,0}(x)$. Por ejemplo, supóngase que deseemos calcular sen 2 con un error menor que 10^{-4}. Puesto que

$$\operatorname{sen} 2 = P_{2n+1,0}(2) + R, \quad \text{donde } |R| \leq \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

podemos utilizar $P_{2n+1,0}(2)$ como solución, siempre que

$$\frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-4}.$$

Se puede hallar un número n con esta propiedad mediante búsqueda directa; evidentemente, sirve de ayuda disponer de una tabla de valores de $n!$ y de 2^n (véanse las páginas 600 y 601). En este caso resulta ser adecuado $n = 5$, de modo que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2 &= P_{11,0}(2) + R \\ &= 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^9}{9!} - \frac{2^{11}}{11!} + R, \\ &\text{donde } |R| < 10^{-4}. \end{aligned}$$

Es todavía más fácil calcular aproximadamente sen 1, puesto que

$$\operatorname{sen} 1 = P_{2n+1,0}(1) + R, \quad \text{donde } |R| < \frac{1}{(2n+2)!}.$$

Para obtener un error menor que ε necesitamos solamente hallar un n tal que

$$\frac{1}{(2n+2)!} < \varepsilon,$$

y esto sólo requiere una breve ojeada a la tabla de factoriales. (Además, los términos de $P_{2n+1,0}(1)$ serán más fáciles de manejar.)
Para muy pequeños x las estimaciones serán incluso más fáciles. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen} \frac{1}{10} = P_{2n+1,0}\left(\frac{1}{10}\right) + R, \quad \text{donde } |R| < \frac{1}{10^{2n+2}(2n+2)!}.$$

Para obtener $|R| < 10^{-10}$ podemos tomar evidentemente $n = 4$ (nos podríamos valer incluso con $n = 3$). Estos métodos son los que en realidad se utilizan para calcular tablas de sen y de cos. Un calculador de gran velocidad puede calcular $P_{2n+1,0}(x)$ para muchos x distintos casi instantáneamente.

La estimación del resto para e^x es sólo ligeramente más difícil. Para mayor sencillez supongamos $x \geq 0$ (las estimaciones para $x \leq 0$ se obtienen en el problema 10). Sobre el intervalo $[0, x]$ el valor máximo de e^t es e^x, puesto que exp es creciente, de modo que

$$\int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n\, dt \leq \frac{e^x}{n!}\int_0^x (x-t)^n\, dt = \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Puesto que sabemos ya que $e < 4$, tenemos

$$\frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{4^x x^{n+1}}{(n+1)!},$$

lo cual puede hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo n suficientemente grande. Lo grande que tenga que ser n dependerá de x (y el factor 4^x hará las cosas más difíciles). Una vez más, las estimaciones son más fáciles para x pequeños. Si $0 \leq x \leq 1$, entonces

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R, \quad \text{donde } 0 < R < \frac{4}{(n+1)!}.$$

(La desigualdad $0 < R$ se sigue inmediatamente de la forma integral de R). En particular, si $n = 4$, entonces

$$0 < R < \frac{4}{5!} < \frac{1}{10},$$

de modo que

$$\begin{aligned} e = e^1 &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + R, \quad \text{donde } 0 < R < \frac{1}{10} \\ &= \frac{65}{24} + R \\ &= 2 + \frac{17}{24} + R, \end{aligned}$$

lo cual demuestra que

$$2 < e < 3.$$

(Esto nos permite mejorar ligeramente nuestra estimación de R:

$$0 < R < \frac{3^x x^{n+1}}{(n+1)!}.)$$

Tomando $n = 7$ se puede calcular que los 3 primeros decimales de e son

$$e = 2{,}718\ \ldots$$

(El lector debe comprobar que $n = 7$ da efectivamente este grado de aproximación, pero sería una crueldad insistir en que efectuara los cálculos.)

La función arctg es también importante, pero, según puede recordarse, una expresión para $\operatorname{arctg}^{(k)}(x)$ es tremendamente complicada, de modo que la forma integral del resto no sirve. Por otra parte, nuestra deducción del polinomio de Taylor para arctg nos dio automáticamente una fórmula para el resto:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$$

Según hemos estimado ya,

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \right| \le \left| \int_0^x t^{2n+2}\,dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

De momento vamos a considerar solamente números x con $|x| \le 1$. En este caso, el resto se puede hacer claramente tan pequeño como se desee eligiendo n suficientemente grande. En particular,

$$\text{arctg } 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + R, \quad \text{donde } |R| < \frac{1}{2n+3}.$$

Con esta estimación es fácil hallar un n que haga al resto menor que cualquier número prefijado; por otra parte, n será generalmente tan grande como para hacer los cálculos tremendamente largos. Para obtener un resto $< 10^{-4}$, por ejemplo, debemos tomar $n > (10^4 - 3)/2$. Esto es verdaderamente una lástima, ya que $\text{arctg } 1 = \pi/4$, de modo que el polinomio de Taylor para arctg nos debería permitir el cálculo de π. Afortunadamente, existen algunos ingeniosos artificios que nos permiten superar estas dificultades. Puesto que

$$|R_{2n+1,0}(x)| < \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3},$$

bastarán unos n mucho más pequeños para unos x solamente algo más pequeños. El artificio para el cálculo de π consiste en expresar arctg 1 en términos de arctg x para x más pequeños; el problema 6 hace ver cómo se puede hacer esto de manera conveniente.

El polinomio de Taylor para la función $f(x) = \log(x+1)$ en $a = 1$ se trata de la misma manera que el polinomio de Taylor para arctg. Aunque la forma integral del resto para f no es difícil de escribir, es difícil de estimar. Por otra parte, obtenemos una fórmula sencilla si empezamos con la ecuación

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t};$$

esto implica que

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt,$$

para todo $x > -1$. Si $x \geq 0$, entonces

$$\int_0^x \frac{t^n}{t+1}\,dt \leq \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

y la estimación es algo más complicada cuando $-1 < x < 0$ (problema 11). Para esta función el resto puede hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo n suficientemente grande, siempre que $-1 < x \leq 1$.

El comportamiento de los restos para arctg y $f(x) = \log(x + 1)$ es ya otro asunto cuando $|x| > 1$. En este caso, las estimaciones

$$|R_{2n+1,0}(x)| < \frac{|x|^{2n+3}}{2n + 3} \text{ para arctg}$$

$$|R_{n,0}(x)| < \frac{x^{n+1}}{n + 1} \quad (x > 0) \text{para} f,$$

no son útiles, porque cuando $|x| > 1$ las cotas x^m/m se hacen grandes cuando m es grande. Esto es inevitable y no es sólo un defecto de nuestras estimaciones. Es fácil obtener estimaciones en la otra dirección, las cuales demuestran que los restos en realidad siguen siendo grandes. Para obtener una tal estimación para arctg, obsérvese que si t está en $[0, x]$ (o en $[x, 0]$ si $x < 0$), entonces

$$1 + t^2 \leq 1 + x^2 \leq 2x^2, \quad \text{si } |x| \geq 1,$$

de modo que

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} dt \right| \geq \frac{1}{2x^2} \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| = \frac{|x|^{2n+1}}{4n + 6}.$$

Análogamente, si $x > 0$, entonces para t en $[0, x]$ tenemos

$$1 + t \leq 1 + x \leq 2x, \quad \text{si } x \geq 1,$$

de modo que

$$\int_0^x \frac{t^n}{t + 1} dt \geq \frac{1}{2x} \int_0^x t^n \, dt = \frac{x^n}{2n + 2}.$$

Estas estimaciones indican que si $|x| > 1$, entonces los restos se hacen grandes cuando n se hace grande. En otras palabras, para $|x| > 1$, los polinomios de Taylor para arctg y f *no son útiles en absoluto para calcular arctg x y log(x + 1).* Esto no constituye ninguna tragedia, puesto que los valores de estas funciones pueden hallarse para x cualesquiera una vez que son conocidos para todos los x con $|x| < 1$.

Esta misma situación se presenta de modo espectacular para la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Hemos visto ya que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo número natural k. Esto significa que el polinomio de Taylor $P_{n,0}$ para f es

$$\begin{aligned} P_{n,0}(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

En otras palabras, el resto $R_{n,0}(x)$ es siempre igual a $f(x)$, y el polinomio de Taylor no es útil para el cálculo de $f(x)$, excepto para $x = 0$. Eventualmente podremos ofrecer una explicación del comportamiento de esta función, la cual constituye un ejemplo desconcertante de las limitaciones del teorema de Taylor.

La palabra «calcular» ha sido utilizada tantas veces en conexión con nuestras estimaciones del resto, que esto podría dar lugar a una mala interpretación del significado del teorema de Taylor. Es cierto que el teorema de Taylor constituye un instrumento casi ideal para el cálculo (a pesar de su ignominioso fracaso en el ejemplo anterior), pero tiene consecuencias teóricas igualmente importantes. La mayor parte de éstas serán desarrolladas en capítulos sucesivos, pero daremos ahora dos demostraciones para ilustrar algunas maneras en que puede usarse el teorema de Taylor. La primera ilustración será particularmente impresionante para aquellos que hayan asimilado la demostración del capítulo 16 de que π es irracional.

TEOREMA 5

e es irracional.

DEMOSTRACIÓN

Sabemos que, para todo n,

$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n, \quad \text{donde } 0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Supongamos que e fuese racional, por ejemplo $e = a/b$, donde a y b son enteros positivos. Elijamos $n > b$ y también $n > 3$. Entonces

$$\frac{a}{b} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n,$$

de modo que

$$\frac{n!a}{b} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + n!R_n.$$

Todos los términos de esta ecuación distintos de $n!R_n$ son enteros (el primer término es entero puesto que $n > b$). En consecuencia, $n!R_n$ debe ser también entero. Pero

$$0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!},$$

de modo que

$$0 < n!R_n < \frac{3}{n+1} < \frac{3}{4} < 1,$$

lo cual es imposible para un entero. ∎

La segunda ilustración es solamente una demostración directa de un hecho demostrado en el capítulo 15: Si

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= 0, \\ f'(0) &= 0, \end{aligned}$$

entonces $f = 0$. Para demostrar esto, observemos primero que $f^{(k)}$ existe para todo k; en efecto,

$$\begin{aligned} f^{(3)} &= (f'')' = -f', \\ f^{(4)} &= (f^3)' = (-f')' = -f'' = f, \\ f^{(5)} &= (f^{(4)})' = f', \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Esto demuestra, no sólo que existen todos los $f^{(k)}$, sino también que existen a lo sumo cuatro diferentes: f, f', $-f$, $-f'$. Puesto que $f(0) = f'(0) = 0$, todos los $f^{(k)}(0)$ son 0. Ahora bien, el teorema de Taylor afirma que, para cualquier n

$$f(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt.$$

Cada una de las funciones $f^{(n+1)}$ es continua (ya que existe $f^{(n+2)}$), de modo que para cualquier x particular existe un número M tal que

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M \quad \text{para } 0 \leq t \leq x, \text{ y } \textit{todo } n$$

(podemos añadir la frase «y *todo n*» puesto que existen solamente cuatro $f^{(k)}$ distintos). Así pues,

$$|f(x)| \leq M\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt\right| = \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Puesto que esto se cumple para todo n, y puesto que $x^n/n!$ puede hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo n suficientemente grande, esto demuestra que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$; en consecuencia, $f(x) = 0$.

Las demás aplicaciones del teorema de Taylor que veremos en capítulos sucesivos están íntimamente relacionadas con las consideraciones de tipo calculatorio que nos han ocupado en gran parte de este capítulo. Si el resto $R_{n,a}(x)$ puede hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo n suficientemente grande, entonces se puede calcular $f(x)$ con tanta aproximación como se desee mediante los polinomios $P_{n,a}(x)$. El número de términos que habrá que sumar será tanto mayor cuanto más grande sea la aproximación que se desee. Si estamos dispuestos a sumar infinitos términos (por lo menos en teoría), entonces deberíamos poder prescindir por completo del resto. Deberían existir «sumas infinitas» tales como

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad \text{si } |x| \leq 1,$$

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad \text{si } -1 < x \leq 1.$$

Estamos casi del todo preparados para este paso. Solamente queda un obstáculo: las sumas infinitas ni siquiera han sido definidas. Los capítulos 21 y 22 contienen las definiciones necesarias.

PROBLEMAS

1. Hallar los polinomios de Taylor (del grado indicado y en el punto indicado) para las siguientes funciones

(i) $f(x) = e^{e^x}$; grado 3, en 0.

(ii) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$; grado 3, en 0.

(iii) sen; grado $2n$, en $\frac{\pi}{2}$.

(iv) cos; grado $2n$, en π.

(v) exp; grado n, en 1.

(vi) log; grado n, en 2.

(vii) $f(x) = x^5 + x^3 + x$; grado 4, en 0.

(viii) $f(x) = x^5 + x^3 + x$; grado 4, en 1.

(ix) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$; grado $2n + 1$, en 0.

(x) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$; grado n, en 0.

2. Escribir cada uno de los siguientes polinomios en x como polinomios en $(x - 3)$. (Basta calcular el polinomio de Taylor en 3, del mismo grado que el polinomio original. ¿Por qué?)

(i) $x^2 - 4x - 9$.

(ii) $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$.

(iii) x^5.

(iv) $ax^2 + bx + c$.

3. Escribir una suma (utilizando la notación Σ) que sea igual a cada uno de los siguientes números con el grado de aproximación que se especifica. Para reducir al mínimo los cálculos superfluos, consúltense las tablas para 2^n y $n!$ en esta misma página y la siguiente.

(i) sen 1; error $< 10^{-17}$.

(ii) sen 2; error $< 10^{-12}$.

(iii) sen $\frac{1}{2}$; error $< 10^{-20}$.

(iv) e; error $< 10^{-4}$.

(v) e^2; error $< 10^{-5}$.

n	2^n	$n!$
1	2	1
2	4	2
3	8	6
4	16	24
5	32	120
6	64	720
7	128	5 040
8	256	40 320
9	512	362 880
10	1 024	3 628 800
11	2 048	39 916 800
12	4 096	479 001 600
13	8 192	6 227 020 800
14	16 384	87 178 291 200
15	32 768	1 307 674 368 000

n	2^n	$n!$
16	65 536	20 922 789 888 000
17	131 072	355 687 428 096 000
18	262 144	6 402 373 705 728 000
19	524 288	121 645 100 408 832 000
20	1 048 576	2 432 902 008 176 640 000

***4.** Este problema es parecido al anterior, salvo que los errores que se piden son tan pequeños que no pueden utilizarse las tablas. Habrá que pensar un poco, y en algunos casos será necesario consultar la demostración del capítulo 16, de que $x^n/n!$ puede hacerse tan pequeña como se quiera eligiendo un n grande; la demostración da, en realidad, un método para hallar el n apropiado. En el problema anterior fue posible hallar sumas más bien cortas; de hecho, fue posible hallar el n más pequeño que hacía la estimación del resto dada por el teorema de Taylor menor que el error deseado. Pero en este problema el hallazgo de *cualquier* suma constituye una victoria moral (siempre que se pueda demostrar que la suma da el resultado que se pide).

(i) sen 1; error $< 10^{-(10^{10})}$.
(ii) e; error $< 10^{-1.000}$.
(iii) sen 10; error $< 10^{-20}$.
(iv) e^{10}; error $< 10^{-30}$.
(v) arctg $\frac{1}{10}$; error $< 10^{-(10^{10})}$.

5. (a) En el problema 11-38 se demostró que la ecuación $x^2 = \cos x$ tiene exactamente dos soluciones. Mediante el polinomio de Taylor del coseno demostrar que las soluciones son aproximadamente $\pm\sqrt{2/3}$ y obtener cotas para el error.

(b) Estimar de manera análoga las soluciones de la ecuación $2x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos^2 x$.

6. (a) Aplicando el problema 15-9, demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

$$\frac{\pi}{4} = 4 \ \text{arctg} \ \frac{1}{5} - \ \text{arctg} \ \frac{1}{239}.$$

(b) Demostrar que $\pi = 3{,}14159\ldots$ (Todo joven estudiante debería obtener por sí mismo algunos decimales de π, pero el objeto de este ejercicio no es el de ocupar al lector en un cálculo inmenso. Si se aplica la segunda expresión de la parte (a) podrán calcularse los cinco primeros decimales de π con notablemente poco trabajo.)

7. Para todo número α, y todo entero no negativo n, definimos el «coeficiente binomial»

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdot \cdot \cdot (\alpha - n + 1)}{n!}.$$

y $\binom{\alpha}{0} = 1$, como es habitual. Si α no es entero, entonces $\binom{\alpha}{n}$ no es nunca 0, y su signo alterna para $n > \alpha$. Demostrar que el polinomio de Taylor de grado n para $f(x) = (1 + x)^\alpha$ en 0 es $P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$ y que las formas de Cauchy y de Lagrange del resto son las siguientes:

Forma de Cauchy:

$$\begin{aligned} R_{n,0}(x) &= \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdot \cdot \cdot (\alpha - n)}{n!} x(x - t)^n(1 + t)^{\alpha-n-1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdot \cdot \cdot (\alpha - n)}{n!} x(1 + t)^{\alpha-1} \left(\frac{x - t}{1 + t}\right)^n \\ &= (n + 1) \binom{\alpha}{n + 1} x(1 + t)^{\alpha-1} \left(\frac{x - t}{1 + t}\right)^n, \quad t \text{ en } [0, x] \text{ o } [x, 0]. \end{aligned}$$

Forma de Lagrange:

$$\begin{aligned} R_{n,0}(x) &= \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdot \cdot \cdot (\alpha - n)}{(n+1)!} x^{n+1}(1 + t)^{\alpha-n-1} \\ &= \binom{\alpha}{n + 1} x^{n+1}(1 + t)^{\alpha-n-1}, \quad t \text{ en } [0, x] \text{ o } [x, 0]. \end{aligned}$$

Las estimaciones de estos restos son bastante difíciles de manejar y se dejan hasta el problema 22-18.

8. Supóngase que a_i y b_i son los coeficientes de los polinomios de Taylor en a de f y de g, respectivamente. En otras palabras, $a_i = f^{(i)}(a)/i!$ y $b_i = g^{(i)}(a)/i!$. Hallar los coeficientes c_i de los polinomios de Taylor en a de las siguientes funciones, en términos de los a_i y b_i.

(i) $f + g$.
(ii) fg.
(iii) f'.
(iv) $h(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.
(v) $k(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

9. (a) Demostrar que el polinomio de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ de grado $4n + 1$ en 0 es

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}.$$

Indicación: Si P es el polinomio de Taylor de grado $2n + 1$ para sen en 0, entonces $\operatorname{sen} x = P(x) + R(x)$, donde $\lim_{x\to 0} R(x)/x^{2n+1} = 0$. ¿Qué implica esto para $\lim_{x\to 0} R(x^2)/x^{4n+2}$?

(b) Hallar $f^{(k)}(0)$ para todo k.

(c) En general, si $f(x) = g(x^n)$, hallar $f^{(k)}(0)$ en términos de las derivadas de g en 0.

10. Demostrar que si $x \leq 0$, entonces

$$\left| \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x - t)^n\,dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

11. Demostrar que si $-1 < x \leq 0$, entonces

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1 + t}\,dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(1 + x)(n + 1)}.$$

***12.** (a) Demostrar que si $|g'(x)| \leq M|x - a|^n$ para $|x - a| < \delta$, entonces $|g(x) - g(a)| \leq M|x - a|^{n+1}/(n + 1)$ para $|x - a| < \delta$.

(b) Aplicar la parte (a) para demostrar que si $\lim_{x\to a} g'(x)/(x-a)^n = 0$, entonces

$$\lim_{x\to a} g(x)/(x-a)^{n+1} = 0.$$

(c) Demostrar que si $g(x) = f(x) - P_{n,a,f}(x)$, entonces $g'(x) = f'(x) - P_{n-1,a,f'}(x)$.

(d) Dar una demostración inductiva del teorema 1, sin aplicar la regla de l'Hôpital.

13. Deducir el teorema 1 como corolario del teorema de Taylor con cualquiera de las formas del resto. (El inconveniente está en que será necesario suponer una derivada más en la hipótesis del teorema 1.)

14. Deducir la forma de Cauchy y de Lagrange del resto a partir de la forma integral, utilizando el problema 13-24. Existirá el mismo inconveniente que en el problema 13.

15. (a) Supóngase que f es dos veces derivable en $(0, \infty)$ y que $|f(x)| \le M_0$ para todos los $x > 0$, mientras que $|f''(x)| \le M_2$ para todos los $x > 0$. Demostrar que para todos los $x > 0$ se tiene

$$|f'(x)| \le \frac{2}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2 \text{ para todos } h > 0.$$

(b) Demostrar que para todos los $x > 0$ se tiene

$$|f'(x)| \le 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

(c) Si f es dos veces derivable en $(0, \infty)$, f'' es acotada, y $f(x)$ tiende hacia 0 cuando $x \to \infty$, entonces también $f'(x)$ tiende hacia 0 cuando $x \to \infty$.

(d) Si existen $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f''(x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} f''(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

(Comparar con el problema 11-31).

16. (a) Demostrar que si $f''(a)$ existe, entonces

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

El límite de la derecha es denominado *derivada segunda de Schwarz* de f en a.

Indicación: Utilizar el polinomio de Taylor de grado 2 con $x = a + h$ y con $x = a - h$.

(b) Sea $f(x) = x^2$ para $x \ge 0$, y $-x^2$ para $x \le 0$. Demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)+f(0-h)-2f(0)}{h^2}$$

existe, a pesar de no existir $f''(0)$.

(c) Demostrar que si f tiene un máximo local en a, entonces la derivada segunda de Schwarz de f en a es ≤ 0.

(d) Demostrar que si $f'''(a)$ existe, entonces

$$\frac{f'''(a)}{3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)-2hf'(x)}{h^3}.$$

17. Utilizar el polinomio de Taylor $P_{1,a,f}$, junto con el resto, para demostrar una forma débil del teorema 2 del apéndice al capítulo 11: Si $f''>0$, entonces la gráfica de f queda siempre por encima de la tangente de f, excepto en el punto de contacto.

18. El problema 17-44 presenta una demostración bastante complicada de que $f=0$ si $f''-f=0$ y $f(0)=f'(0)=0$. Dar otra demostración aplicando el teorema de Taylor. (Este problema es en realidad una escaramuza preliminar antes de emprender la batalla con el caso general en el problema 19, y tiene por fin convencer al lector de que el teorema de Taylor es un buen instrumento para atacar estos problemas, aun cuando para casos particulares los artificios resulten más elegantes.)

****19.** Considérese una función f que satisface la ecuación diferencial

$$f^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{(j)},$$

para ciertos números $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Algunos casos particulares han recibido ya un tratamiento detallado, bien en el texto o en otros problemas; en particular, hemos hallado todas las funciones que satisfacen $f'=f$, o $f''+f=0$, o $f''-f=0$. El artificio del problema 17-43. nos permite hallar muchas soluciones para tales ecuaciones, pero no nos dice si éstas son las únicas soluciones. Esto exige un resultado de *unicidad*, que nos dará este problema. Al final encontrará el lector algunas observaciones (necesariamente esquemáticas) acerca de la solución general.

(a) Deducir la siguiente fórmula para $f^{(n+1)}$ (convengamos en que «a_{-1}» es 0):

$$f^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j-1} + a_{n-1}a_j)f^{(j)}.$$

(b) Deducir una fórmula para $f^{(n+2)}$.

La fórmula de la parte (b) no se va a usar; se ha incluido solamente para convencer al lector de que es imposible obtener una fórmula general para $f^{(n+k)}$. Por otra parte, según indica la parte (c), no es muy difícil obtener estimaciones acerca de la magnitud de $f^{(n+k)}(x)$.

(c) Sea $N = \max(1, |a_0|, \ldots, |a_{n-1}|)$. Entonces $|a_{j-1} + a_{n-1}a_j| \leq 2N^2$; esto significa que

$$f^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j^{\,1} f^{(j)}, \quad \text{donde } |b_j^{\,1}| \leq 2N^2.$$

Demostrar que

$$f^{(n+2)} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j^{\,2} f^{(j)}, \quad \text{donde } |b_j^{\,2}| \leq 4N^3,$$

y de modo más general,

$$f^{(n+k)} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j^{\,k} f^{(j)}, \quad \text{donde } |b_j^{\,k}| \leq 2^k N^{k+1}.$$

(d) Deducir de la parte (c) que, para cualquier número particular x, existe un número M tal que

$$|f^{(n+k)}(x)| \leq M \cdot 2^k N^{k+1} \text{ para todo } k.$$

(e) Supóngase ahora que $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Demostrar que

$$|f(x)| \leq \frac{M \cdot 2^k N^{k+1} |x|^{n+k+1}}{(n+k+1)!}$$

$$\leq \frac{M \cdot |2Nx|^{n+k+1}}{(n+k+1)!},$$

y deducir que $f = 0$.

(f) Demostrar que si f_1 y f_2 son soluciones ambas de la ecuación diferencial

$$f^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{(j)},$$

y $f_1^{(j)}(0) = f_2^{(j)}(0)$ para $0 \leq j \leq n-1$, entonces $f_1 = f_2$.

En otras palabras, las soluciones de esta ecuación diferencial están determinadas por las «condiciones iniciales» (los valores $f^{(j)}(0)$ para $0 \leq j \leq$ $\leq n-1$). Esto significa que podemos hallar *todas* las soluciones una vez que hayamos hallado bastantes soluciones para obtener un sistema cualquiera de condiciones iniciales. Si la ecuación

$$x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_0 = 0$$

tiene n raíces distintas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, entonces cualquier función de la forma

$$f(x) = c_1 e^{\alpha_1 x} + \cdots + c_n e^{\alpha_n x}$$

es una solución, y

$$\begin{aligned} f(0) &= c_1 + \cdots + c_n, \\ f'(0) &= \alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_n c_n, \\ &\vdots \\ f^{n-1}(0) &= \alpha_1{}^{n-1} c_1 + \cdots + \alpha_n{}^{n-1} c_n. \end{aligned}$$

De hecho, toda solución es de esta forma, ya que podemos obtener cualquier sistema de números en los primeros miembros eligiendo adecuadamente los c, pero no intentaremos demostrar esta última afirmación. (Se trata de un hecho puramente algebraico que el lector puede fácilmente comprobar para $n = 2$ ó 3.) Estas observaciones son también ciertas si algunas de las raíces son raíces múltiples, e incluso en la situación más general considerada en el capítulo 26.

**20. (a) Supóngase que f es una función continua en $[a, b]$ con $f(a) = f(b)$ y que para todo x de (a, b) la derivada segunda de Schwarz de f en x es 0 (problema 16). Demostrar que f es constante en $[a, b]$. Ayuda: Supóngase que es $f(x) > f(a)$ para algún x de (a, b). Considérese la función

$$g(x) = f(x) - \varepsilon(x - a)(b - x)$$

con $g(a) = g(b) = f(a)$. Para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tendremos $g(x) > g(a)$, de modo que g tendrá un máximo y en (a, b). Aplicar ahora el problema 16(c) (la derivada segunda de Schwarz de $(x - a)(x - b)$ es simplemente su derivada segunda ordinaria).

(b) Si f es una función continua en $[a, b]$ cuya derivada segunda de Schwarz es 0 en todos los puntos de (a, b), entonces f es lineal.

*21. (a) Sea $f(x) = x^4$ sen $1/x^2$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Demostrar que $f = 0$ hasta el orden 2 en 0, a pesar de no existir $f''(0)$.

Este ejemplo es ligeramente más complicado, pero también ligeramente más llamativo, que el ejemplo del texto, porque tanto $f'(a)$ como $f''(a)$ existen para $a \neq 0$. Así pues, para todo número a existe otro número $m(a)$ tal que

$$(*)\ f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{m(a)}{2}(x - a)^2 + R_a(x),$$

$$\text{donde } \lim_{x \to a} \frac{R_a(x)}{(x - a)^2} = 0;$$

a saber, $m(a) = f''(a)$ para $a \neq 0$ y $m(0) = 0$. Obsérvese que la función m definida de esta manera no es continua.

(b) Supóngase que f es una función derivable tal que (*) se cumple para todos los a con $m(a) = 0$. Aplicar el problema 20 para demostrar que es $f''(a) = m(a) = 0$ para todos los a.

(c) Supóngase ahora que (*) se cumple para todos los a y que m es continua. Demostrar que para todos los a la derivada segunda $f''(a)$ existe y es igual a $m(a)$.

* CAPÍTULO

20

e ES TRANSCENDENTE

La irracionalidad de e fue tan fácil de demostrar que en este capítulo optativo intentaremos una hazaña más difícil, y demostraremos que el número e no es sólo irracional, sino en realidad mucho peor. En qué manera un número puede ser peor que irracional puede verse expresando de modo ligeramente distinto las definiciones. Un número x es irracional si no es posible escribir $x = a/b$ para enteros cualesquiera a y b, con $b \neq 0$. Esto es lo mismo que decir que x no satisface ninguna ecuación

$$bx - a = 0$$

para enteros a y b, excepto para $a = 0$, $b = 0$. Examinada bajo este aspecto, la irracionalidad de $\sqrt{2}$ no parece constituir una deficiencia demasiado terrible; parece más bien que $\sqrt{2}$ es irracional pero por muy poco: aunque $\sqrt{2}$ no es solución de una ecuación

$$a_1x + a_0 = 0,$$

sí *es* solución de la ecuación

$$x^2 - 2 = 0,$$

de grado superior en una unidad. El problema 2-18 indica cómo fabricar muchos números irracionales x que satisfacen ecuaciones de grado superior

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

donde los a_i son enteros y $a_0 \neq 0$ (esta condición excluye la posibilidad de que todos los a_i sean iguales a 0). Un número que satisface una ecuación «algebraica» de este tipo recibe el nombre de **número algebraico,** y prácticamente todos los números que hemos encontrado están definidos en términos de soluciones de ecuaciones algebraicas (π y e son las grandes excepciones de nuestra limitada experiencia matemática). Todas las raíces, tales como

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[10]{3}, \quad \sqrt[4]{7},$$

son claramente números algebraicos, e incluso combinaciones complicadas, tales como

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt{5} + \sqrt[4]{1 + \sqrt{2}}} + \sqrt[5]{6}$$

son números algebraicos (aunque no intentaremos demostrar esto). Los números que no pueden ser obtenidos mediante el proceso de resolver ecuaciones algebraicas reciben el nombre de **transcendentes**; el resultado principal de este capítulo establece que e es un número de este tipo anómalo.

La demostración de que e es transcendente está bien a nuestro alcance, y en teoría era posible incluso antes del capítulo 19. Sin embargo, con la inclusión de esta demostración, podemos considerarnos ya como algo más que novicios en el estudio de las matemáticas superiores; mientras que muchas demostraciones de irracionalidad dependen solamente de propiedades elementales de los números, la demostración de que un número es transcendente supone por lo general unas matemáticas verdaderamente fuertes. Incluso las fechas relacionadas con la transcendencia de e son impresionantemente recientes: la primera demostración de que e es transcendente, debida a Hermite, data de 1873. La demostración que vamos a dar es una simplificación debida a Hilbert.

Antes de emprender la demostración misma, conviene planear la estrategia, la cual se basa en una idea usada incluso en la demostración de que e es irracional. Dos características de la expresión

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n$$

fueron importantes para la demostración de que e es irracional: Por una parte, el número

$$1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

puede escribirse como una fracción p/q con $q \leq n!$ (de manera que $n!(p/q)$ es entero); por otra parte, $0 < R_n < 3/(n+1)!$ (de modo que $n!R_n$ no es entero). Estos dos hechos demuestran que e puede ser aproximado particularmente bien mediante números racionales. Por supuesto, todo número x puede ser aproximado tanto como se quiera mediante números racionales: si $\varepsilon > 0$ existe un número racional r con $|x - r| < \varepsilon$; el inconveniente está, sin embargo, en que puede ser necesario un denominador muy grande para r, tan grande quizá como $1/\varepsilon$. Para e tenemos la seguridad de que éste no es el caso: Existe una fracción p/q que difiere de e en menos de $3/(n+1)!$, cuyo denominador q es a lo sumo $n!$. Si se observa cuidadosamente la demostración de que e es irracional, se verá que solamente se hace uso de esta propiedad de e. El número e no es en ningún modo único a este respecto: en términos generales, cuanto mejor puede ser aproximado un número mediante números racionales, tanto peor es este número (en el problema 3 se presenta alguna evidencia para esta afirmación). La demostración de que e es transcendente depende de una extensión natural de esta idea: No solamente e, sino cualquier número finito de potencias e, e^2, ..., e^n, pueden ser aproximadas simultáneamente y particularmente bien mediante números racionales. En nuestra demostración empezaremos suponiendo que e es algebraico, de modo que

$$(*) \quad a_n e^n + \cdots + a_1 e + a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0$$

para algunos enteros a_0, ..., a_n. Para obtener una contradicción hallaremos entonces ciertos enteros M, M_1, ..., M_n y ciertos números «pequeños» ϵ_1, ..., ϵ_n tales que

$$e^1 = \frac{M_1 + \epsilon_1}{M},$$

$$e^2 = \frac{M_2 + \epsilon_2}{M},$$

$$\vdots$$

$$e^n = \frac{M_n + \epsilon_n}{M}.$$

Lo pequeños que tengan que ser los ϵ se verá cuando se sustituyan estas expresiones en la ecuación supuesta (*). Después de multiplicar todo por M obtenemos

$$[a_0M + a_1M_1 + \cdots + a_nM_n] + [\epsilon_1a_1 + \cdots + \epsilon_na_n] = 0.$$

El primer término entre corchetes es entero, y elegiremos los M de tal manera que sea necesariamente un entero *no nulo.* Nos arreglaremos para hallar los ϵ de manera que

$$|\epsilon_1a_1 + \cdots + \epsilon_na_n| < \tfrac{1}{2};$$

esto nos llevará a la contradicción deseada; ¡la suma de un entero no nulo y de un número de valor absoluto menor que $\frac{1}{2}$ no puede ser cero!

Como estrategia básica todo esto es muy razonable y directo del todo. La parte destacable de la demostración será la manera en que se definan los M y los ϵ. Para leer la demostración será necesario saber algo acerca de la función gamma. (Esta función se introdujo en el problema 18-52.)

TEOREMA 1

e es transcendente.

DEMOSTRACIÓN

Supóngase que existen enteros $a_0, \ldots, a_n$, con $a_0 \neq 0$ tales que

$$(*) \quad a_ne^n + a_{n-1}e^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Defínanse los números $M, M_1, \ldots, M_n$ y $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ como sigue.

$$M = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^pe^{-x}}{(p-1)!}\,dx,$$

$$M_k = e^k\int_k^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^pe^{-x}}{(p-1)!}\,dx,$$

$$\epsilon_k = e^k\int_0^k \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^pe^{-x}}{(p-1)!}\,dx.$$

El número indeterminado p representa un número primo * que elegiremos más adelante. A pesar del aspecto terrible de estas tres expresiones, con un poco de trabajo aparecerán mucho más razonables. Fijémonos primero en M. Si la expresión entre corchetes,

$$[(x-1)\cdots(x-n)],$$

se desarrolla, obtenemos un polinomio

$$x^n+\cdots\pm n!$$

de coeficientes enteros. Al elevarlo a la potencia p éste se convierte en un polinomio todavía más complicado

$$x^{np}+\cdots\pm(n!)^p.$$

Así pues, M puede escribirse en la forma

$$M=\sum_{\alpha=0}^{np}\frac{1}{(p-1)!}C_\alpha\int_0^\infty x^{p-1+\alpha}e^{-x}\,dx,$$

donde los C son ciertos enteros, y $C_0=\pm(n!)^p$. Pero

$$\int_0^\infty x^ke^{-x}\,dx=k!$$

Así pues,

$$M=\sum_{\alpha=0}^{np}C_\alpha\frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!}.$$

Ahora bien, para $\alpha=0$ obtenemos el término

* El término «número primo» se definió en el problema 2-17. Un hecho importante acerca de números primos será aplicado en la demostración, aunque no se demuestra en este libro: Si p es un número primo que no divide al entero a, y que no divide al entero b, entonces p tampoco divide a ab. En la bibliografía se dan referencias para este teorema (el cual es fundamental en la demostración de que la descomposición de un entero en producto de números primos es única). Utilizaremos también el resultado del problema 2-17 (d), de que existen infinitos números primos; el lector debe poder decir en qué puntos precisamente hace falta esta información.

$$\pm(n!)^p \frac{(p-1)!}{(p-1)!} = \pm(n!)^p.$$

Consideraremos ahora solamente números primos $p > n$; entonces este término es un entero *no* divisible por p. Por otra parte, si $\alpha > 0$, entonces

$$C_\alpha \frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!} = C_\alpha(p+\alpha-1)(p+\alpha-2)\cdots p,$$

el cual es divisible por p. Por lo tanto, M mismo es un entero *no* divisible por p.

Consideremos ahora M_k. Tenemos

$$\begin{aligned} M_k &= e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\,dx \\ &= \int_k^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^p e^{-(x-k)}}{(p-1)!}\,dx. \end{aligned}$$

Esto puede ser transformado en una expresión muy parecida a M mediante la sustitución

$$\begin{aligned} u &= x - k, \\ du &= dx. \end{aligned}$$

Los límites de integración pasan a ser 0 y ∞, y

$$M_k = \int_0^\infty \frac{(u+k)^{p-1}[(u+k-1)\cdots u\cdots(u+k-n)]^p e^{-u}}{(p-1)!}\,du.$$

Existe una diferencia muy importante entre esta expresión y la de M. El término entre corchetes contiene el factor u en el lugar k. Así pues, la potencia p-ésima contiene el factor u^p. Esto significa que la expresión entera

$$(u+k)^{p-1}[(u+k-1)\cdots(u+k-n)]^p$$

es un polinomio de coeficientes enteros, *cada uno de cuyos términos* es de grado no menor que p. Así pues,

$$M_k = \sum_{\alpha=1}^{np} \frac{1}{(p-1)!} D_\alpha \int_0^\infty u^{p-1+\alpha} e^{-u}\, du = \sum_{\alpha=1}^{np} D_\alpha \frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!},$$

donde los D_α son ciertos enteros. Obsérvese que la suma empieza con $\alpha = 1$; en este caso *cada uno* de los términos de la suma es divisible por p. Así pues, cada M_k es un entero que *es* divisible por p.

Está claro ahora que

$$e^k = \frac{M_k + \epsilon_k}{M}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Sustituyendo en (*) y multiplicando por M obtenemos

$$[a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n] + [a_1\epsilon_1 + \cdots + a_n\epsilon_n] = 0.$$

Además de exigir que sea $p > n$ supongamos también que $p > |a_0|$. Esto significa que tanto M como a_0 no son divisibles por p, de modo que a_0M tampoco es divisible por p. Al ser cada M_k divisible por p, se sigue que

$$a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n$$

no es divisible por p. En particular es un entero *no nulo.*

Para obtener una contradicción a la ecuación supuesta (*), y demostrar así que e es transcendente, sólo hace falta demostrar que

$$|a_1\epsilon_1 + \cdots + a_n\epsilon_n|$$

puede hacerse tan pequeño como se quiera, eligiendo p suficientemente grande; basta evidentemente demostrar que cada $|\epsilon_k|$ puede hacerse tan pequeño como se quiera. Esto no exige más que algunas estimaciones sencillas; para el resto del razonamiento recuérdese que n es cierto número fijo [el grado de la supuesta ecuación polinómica (*)]. Para empezar, si $1 \leq k \leq n$, entonces

$$|\epsilon_k| \leq e^k \int_0^k \frac{|x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^p|e^{-x}}{(p-1)!}\,dx$$
$$\leq e^n \int_0^n \frac{n^{p-1}|[(x-1)\cdots(x-n)]^p|e^{-x}}{(p-1)!}\,dx.$$

Sea ahora A el máximo de $|(x-1)\ldots(x-n)|$ para x en $[0, n]$. Entonces

$$\begin{aligned} |\epsilon_k| &\leq \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p-1)!} \int_0^n e^{-x}\,dx \\ &\leq \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p-1)!} \int_0^\infty e^{-x}\,dx \\ &= \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p-1)!} \\ &\leq \frac{e^n n^p A^p}{(p-1)!} = \frac{e^n (nA)^p}{(p-1)!}. \end{aligned}$$

Pero n y A son fijos; así pues, $(nA)^p/(p-1)!$ puede hacerse tan pequeño como se quiera haciendo p suficientemente grande. ▌

Esta demostración, lo mismo que la demostración de que π es irracional, merece algunas consideraciones filosóficas. A primera vista, el razonamiento parece muy «avanzado»; después de todo, utilizamos integrales, y además integrales desde 0 a ∞. En realidad, como han observado muchos matemáticos, las integrales pueden ser eliminadas por completo del razonamiento; las únicas integrales esenciales para la demostración son de la forma

$$\int_0^\infty x^k e^{-x}\,dx,$$

para k entero, y estas integrales pueden ser sustituidas por $k!$ siempre que se presenten. Así pues, M, por ejemplo, podría haber sido definido inicialmente como

$$M = \sum_{\alpha=0}^{np} C_\alpha \frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!},$$

donde C_α son los coeficientes del polinomio

$$[(x-1)\cdot\cdot\cdot(x-n)]^p.$$

Aplicando repetidamente esta idea, se obtiene una demostración «completamente elemental» de que e es transcendente, demostración que se basa solamente en el hecho de que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

Por desgracia, esta demostración «elemental» es más difícil de comprender que la original; ¡toda la estructura de la demostración debe quedar oculta sólo para eliminar unos pocos signos de integral! Esta situación no es en ningún modo particular de este teorema; los razonamientos «elementales» son con frecuencia más difíciles que los «avanzados». Nuestra demostración de que π es irracional constituye un ejemplo de ello. Es probable que el lector ya no recuerde nada acerca de esta demostración, salvo que encierra algunas funciones muy complicadas. Existe en realidad una demostración más avanzada, pero mucho más conceptual que demuestra que π es *transcendente*, hecho que es de gran interés tanto históricamente como en sí mismo. Uno de los problemas clásicos de la matemática griega era construir, sólo con regla y compás, un cuadrado cuya área fuese la del círculo de radio 1. Esto exige la construcción de un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$, lo cual se puede llevar a cabo si es construible un segmento de longitud π. Los griegos fueron totalmente incapaces de decidir si un tal segmento podía ser construido, e incluso todos los recursos de la matemática moderna fueron incapaces de dilucidar esta cuestión hasta 1882. En dicho año Lindemann demostró que π es transcendente; puesto que la longitud de cualquier segmento que puede ser construido con regla y compás puede escribirse en términos de $+$, $\cdot$; $-$, $\div$, y $\sqrt{\ }$, y es por lo tanto algebraico, esto demuestra que es imposible construir un segmento de longitud π.

La demostración de que π es transcendente exige unos recursos matemáticos considerables, demasiado avanzados para alcanzarse en este libro. Sin embargo, la demostración no es mucho más difícil que la demostración de que e es transcendente. De hecho, la demostración para π es prácticamente la misma que la demostración para e. Esta última afirmación quizá resulte sorprendente. La demostración de que e es transcendente parece depender tan enteramente de propiedades particulares de e que es casi imposible concebir cómo puede ser adaptada para π; después de todo, ¿qué tiene que ver e con π? ¡Pronto lo verá el lector!

PROBLEMAS

1. (a) Demostrar que si $\alpha > 0$ es algebraico, entonces $\sqrt{\alpha}$ es algebraico.

(b) Demostrar que si α es algebraico y r es racional, entonces $\alpha + r$ y αr son algebraicos.

La parte (b) puede en realidad reforzarse considerablemente: la suma, producto y cociente de números algebraicos es algebraica. Este hecho es demasiado difícil para demostrarlo aquí, pero pueden examinarse algunos casos particulares:

2. Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ y $\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$ son algebraicos, hallando efectivamente las ecuaciones algebraicas que satisfacen. (Harán falta ecuaciones de grado 4.)

***3.** (a) Sea α un número algebraico no racional. Supóngase que α satisface la ecuación polinómica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

y que ninguna función polinómica de grado inferior tiene esta propiedad. Demostrar que $f(p/q) \neq 0$ para cualquier número racional p/q. Indicación: Aplicar el problema 3-7(b).

(b) Demostrar ahora que $|f(p/q)| \geq 1/q^n$ para todos los números racionales p/q con $q > 0$. Indicación: Escribir $f(p/q)$ como fracción con el denominador común q^n.

(c) Sea $M = \sup\ \{|f'(x)|: |x - \alpha| < 1\}$. Aplicar el teorema del valor medio para demostrar que si p/q es un número racional con $|\alpha - p/q| < 1$, entonces $|\alpha - p/q| > 1/Mq^n$. [Se sigue que para $c = \max(1, 1/M)$ tenemos $|\alpha - p/q| > c/q^n$ para todos los p/q racionales.]

***4.** Sea

$$\alpha = 0{,}110001000000000000000001000\ \ldots,$$

donde los 1 están en el lugar $n!$, para cada n. Aplicar el problema 3 para demostrar que α es transcendente. (Para cada n, demostrar que α no es raíz de una ecuación de grado n.)

Aunque el problema 4 sólo menciona un número transcendente particular, debe quedar claro que se pueden construir fácilmente otros infinitos números que no satisfacen $|\alpha - p/q| > c/q^n$ cualesquiera que sean c y n. Tales números fueron considerados primeramente por Liouville (1809-1882), y la desigualdad del problema 3 es llamada a menudo desigualdad de Liouville. Ninguno de los números transcendentes construidos de esta manera resulta ser particularmente interesante,

pero por algún tiempo los números transcendentes de Liouville fueron los únicos conocidos. Esta situación cambió radicalmente con el trabajo de Cantor (1845-1918), quien demostró, sin exhibir ningún número transcendente, que *la mayor parte* de los números son transcendentes. Los dos problemas siguientes nos dan una introducción a las ideas que permiten dar sentido a tales afirmaciones. La definición básica con que debemos operar es la siguiente: Se dice que un conjunto A es **numerable** si es posible disponer sus elementos en una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots .$$

El ejemplo inmediato (en realidad, más o menos el ideal platónico de) conjunto numerable es $\mathbf{N}$, el conjunto de los números naturales; evidentemente también es numerable el conjunto de todos los números pares:

$$2, 4, 6, 8, \ldots .$$

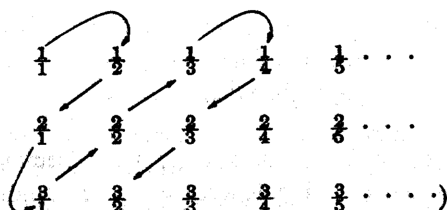
Algo más sorprendente es encontrar que $\mathbf{Z}$, conjunto de todos los enteros (positivos, negativos, y 0) también es numerable, pero ver es creer:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots .$$

Los dos problemas siguientes, donde se trazan las características básicas de los conjuntos numerables, constituyen en realidad una serie de ejemplos para demostrar que (1) hay muchos más conjuntos numerables de lo que se puede suponer y (2) existen, no obstante, algunos conjuntos no numerables.

*5. (a) Demostrar que si A y B son numerables, entonces también lo es $A \cup B = \{x: x \text{ está en } A \text{ o } x \text{ está en } B\}$. Indicación: Aplicar el mismo artificio que dio resultado para $\mathbf{Z}$.

(b) Demostrar que el conjunto de los números racionales positivos es numerable. (Esto es verdaderamente sorprendente; utilizar la siguiente demostración descriptiva:



(c) Demostrar que el conjunto de todos los pares (m, n) de enteros es numerable. [Esto es prácticamente lo mismo que la parte (b).]

(d) Si $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ son todos numerables, demostrar que

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$

es también numerable. [Aplicar de nuevo el mismo artificio que en la parte (b).]

(e) Demostrar que el conjunto de todas las ternas (l, m, n) de enteros es numerable. [Se puede describir una terna (l, m, n) mediante un par (l, m) y un número n.]

(f) Demostrar que el conjunto de todas las n-tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es numerable. [Si se ha hecho la parte (e), se puede hacer esto por inducción.]

(g) Demostrar que el conjunto de todas las raíces de las funciones polinómicas de grado n es numerable. [La parte (f) demuestra que el conjunto de todas las funciones polinómicas de grado n puede ser dispuesto según una sucesión, y que cada una de estas funciones tiene a lo sumo n raíces.]

(h) Utilizar ahora las partes (d) y (g) para demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable.

***6.** Puesto que resulta haber tantos conjuntos numerables, es importante observar que el conjunto de todos los números reales comprendidos entre 0 y 1 *no* es numerable. En otras palabras, no es posible disponer todos estos números reales según una sucesión

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0{,}a_1{}^1a_2{}^1a_3{}^1a_4{}^1 \cdots \\ \alpha_2 &= 0{,}a_1{}^2a_2{}^2a_3{}^2a_4{}^2 \cdots \\ \alpha_3 &= 0{,}a_1{}^3a_2{}^3a_3{}^3a_4{}^3 \cdots \\ &\cdots \end{aligned}$$

(en los segundos miembros se utiliza la notación decimal). Para demostrar que esto es así, supóngase que fuese posible una tal lista y considérese el decimal

$$0{,}\bar{a}_1{}^1\bar{a}_2{}^2\bar{a}_3{}^3\bar{a}_4{}^4 \ldots,$$

donde $\bar{a}_n{}^n = 5$ si $a_n{}^n \neq 5$ y $\bar{a}_n{}^n = 6$ si $a_n{}^n = 5$. Demostrar que este número no puede estar en la lista, obteniendo así una contradicción.

Los problemas 5 y 6 pueden resumirse como sigue. El conjunto de todos los números algebraicos es numerable. Si el conjunto de los números transcendentes fuese también numerable, entonces el conjunto de todos los números reales sería numerable, según el problema 5(a), y en consecuencia el conjunto de los números reales comprendidos entre 0 y 1 sería numerable. Pero esto es falso. Así pues, el conjunto de los números algebraicos es numerable y el conjunto de los números transcendentes no lo es («existen más números transcendentes que números algebraicos»). Los dos problemas restantes ilustran todavía más lo importante que es distinguir entre los conjuntos numerables y los que no lo son.

***7.** Sea f una función no decreciente sobre $[0, 1]$. Recuérdese (problema 8-8) que $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existen ambos.

(a) Para todo $\varepsilon > 0$ demostrar que existen solamente un número finito de números a en $[0, 1]$ con $\lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x) > \varepsilon$. Indicación: Existen, efectivamente, a lo sumo $[f(1) - f(0)]/\varepsilon$ de ellos.

(b) Demostrar que el conjunto de los puntos en que f es discontinua es numerable. Indicación: si $\lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x) > 0$, entonces es $> 1/n$ para algún número natural n.

Este problema demuestra que una función no decreciente es automáticamente continua en casi todos los puntos. Para la derivabilidad, la situación es más difícil de analizar y también más interesante. Una función no decreciente puede dejar de ser derivable en un conjunto no numerable de puntos, pero sigue siendo verdad que las funciones no decrecientes son derivables en casi todos los puntos (según un sentido diferente de la palabra «casi todos»). La referencia [33] de la bibliografía proporciona una bonita demostración, aplicando el lema del sol naciente del problema 8-20. Para los que hayan hecho el problema 10 del apéndice al capítulo 11, es posible dar por lo menos una aplicación a la derivabilidad de las ideas ya desarrolladas en este conjunto de problemas: Si f es convexa, entonces f es derivable excepto en aquellos puntos en que su derivada por la derecha f_+' es discontinua; pero la función f_+' es decreciente, de modo que una función convexa es automáticamente derivable excepto en un conjunto numerable de puntos.

***8.** (a) El problema 11-66 hizo ver que si todo punto es máximo local para una función *continua* f, entonces f es una función constante. Supóngase ahora que se abandona la hipótesis de continuidad. Demostrar que f toma solamente un conjunto numerable de valores. Indicación: Para cada x elegir

números *racionales* a_x y b_x tales que $a_x < x < b_x$ y x es un punto máximo para f sobre (a_x, b_x). Entonces todo valor $f(x)$ es el valor máximo de f sobre algún intervalo (a_x, b_x). ¿Cuántos intervalos de éstos existen?

(b) Deducir que el problema 11-66(a) es un corolario.

(c) Demostrar de manera análoga el resultado del problema 11-66(b).

CAPÍTULO

21

SUCESIONES INFINITAS

El concepto de sucesión infinita es tan natural que hasta parece pueda prescindirse de toda definición. Se escribe con frecuencia sencillamente «una sucesión infinita

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots\text{»}$$

indicando los tres puntos que los números a_i continúan «indefinidamente» hacia la derecha. No es difícil, sin embargo, formular una definición rigurosa de sucesión infinita; lo importante acerca de una sucesión infinita es que para todo número natural n existe un número real a_n. Es precisamente este tipo de correspondencia lo que se quiere formalizar con las funciones.

DEFINICIÓN

Una **sucesión infinita** de números reales es una función cuyo dominio es **N.**

Desde el punto de vista de esta definición, debería designarse una sucesión mediante una simple letra tal como a, y los valores particulares mediante

$$a(1),\ a(2),\ a(3),\ .\ .\ .\ ,$$

pero la notación con subíndices

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

es la que se usa casi siempre, y la misma sucesión se suele designar mediante un símbolo tal como $\{a_n\}$. Así pues, $\{n\}$, $\{(-1)^n\}$, y $\{1/n\}$ designan las sucesiones α, β, y γ definidas por

$$\alpha_n = n,$$
$$\beta_n = (-1)^n,$$
$$\gamma_n = \frac{1}{n}.$$

Para una sucesión, lo mismo que para cualquier función, se puede trazar la gráfica (figura 1), pero la gráfica por lo general dice muy poco, ya que la mayor parte de la función no cabe en la página. Se obtiene una representación más convenien-

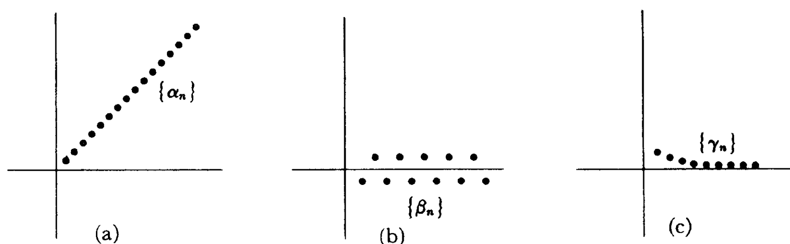


FIGURA 1

te de una sucesión marcando simplemente los puntos a_1, a_2, a_3, ..., sobre una recta (figura 2). Este tipo de diagrama indica «hacia dónde va» la sucesión. La sucesión $\{\alpha_n\}$ «va hacia el infinito», la sucesión $\{\beta_n\}$ «va dando saltos entre -1 y 1»,

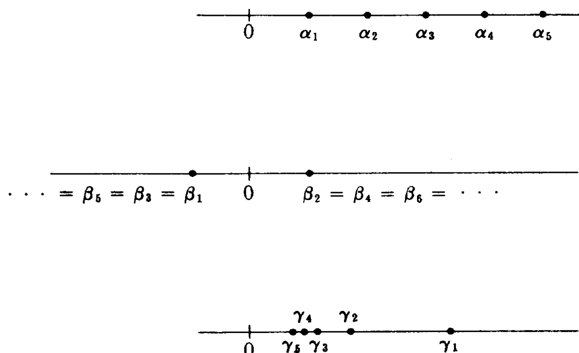
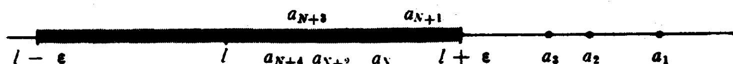


FIGURA 2

y la sucesión $\{\gamma_n\}$ «converge hacia 0». De las tres frases entre comillas, la última constituye el concepto crucial asociado con las sucesiones, y será definido con precisión (la definición se ilustra en la figura 3).



DEFINICIÓN

> Una sucesión $\{a_n\}$ **converge hacia l** (en símbolos $\lim_{n\to\infty} a_n = l$) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que, para todos los números naturales n,
> si $n > N$, entonces $|a_n - l| < \varepsilon$.

Además de la terminología introducida en esta definición, decimos a veces que la sucesión $\{a_n\}$ **tiende hacia l** o que tiene el **límite l.** Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ **converge** si converge hacia l para algún l, y que **diverge** si no converge.

Para demostrar que la sucesión $\{\gamma_n\}$ converge hacia 0, basta observar lo siguiente. Si $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que $1/N < \varepsilon$. Entonces, si $n > N$ tenemos

$$\gamma_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon, \text{ de donde } |\gamma_n - 0| < \varepsilon.$$

El límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$$

parecerá probablemente razonable después de un poco de reflexión (dice simplemente que $\sqrt{n+1}$ es prácticamente lo mismo que $\sqrt{n}$ cuando n es grande), pero la demostración matemática podría no ser tan evidente. Para estimar $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ podemos aplicar un artificio algebraico:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Es también posible estimar $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x) = \sqrt{x}$ sobre el intervalo $[n, n+1]$. Obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1} &= f'(x)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{para algún } x \text{ de } (n, n+1)\\ &< \frac{1}{2\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Se puede utilizar cualquiera de estas estimaciones para demostrar el límite anterior; la demostración detallada se deja para el lector como ejercicio sencillo pero que vale la pena hacer.

El límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+7n^2+1}{4n^3-8n+63} = \frac{3}{4}$$

debería también parecer razonable, ya que los términos que encierran n^3 son los más importantes cuando n es grande. Si se recuerda la demostración del teorema 7-9 se adivinará el artificio que convierte esta idea en una demostración; dividiendo numerador y denominador por n^3 se obtiene

$$\frac{3n^3+7n^2+1}{4n^3-8n+63} = \frac{3+\dfrac{7}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{4-\dfrac{8}{n^2}+\dfrac{63}{n^3}}.$$

Utilizando esta expresión, la demostración del límite anterior no es difícil, especialmente si se tienen en cuenta los siguientes hechos:

Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n$ existen ambos, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n;$$

además, si $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, entonces $b_n \neq 0$ para todo n mayor que algún N, y

$$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(Si hubiésemos querido hablar con absoluta precisión, la tercera afirmación hubiese tenido que ser todavía más complicada. Tal como está, estamos considerando el límite de una sucesión $\{c_n\} = \{a_n/b_n\}$, donde los números c_n podrían incluso no estar definidos para algunos $n < N$. Esto, en realidad, no tiene importancia —para tales n podríamos definir c_n de cualquier manera que quisiéramos— ya que el límite de una sucesión no se altera si cambiamos la sucesión en un número finito de puntos.)

Aunque estos hechos son muy útiles, no nos molestaremos en establecerlos como teorema; el lector no debe tener dificultad para demostrar por sí mismo estos resultados, al ser la definición de $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ tan parecida a las anteriores definiciones de límites, especialmente $\lim_{n\to\infty} f(x) = l$.

El parecido entre las definiciones de $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ y $\lim_{n\to\infty} f(x) = l$ es algo más que pura analogía; es posible definir el primero en términos del segundo. Si f es la

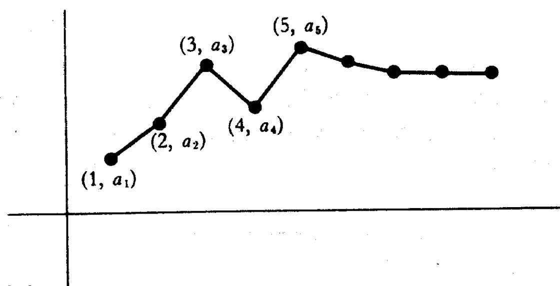


FIGURA 4

función cuya gráfica (figura 4) consiste en segmentos rectilíneos que unen los puntos de la gráfica de la sucesión $\{a_n\}$, de modo que

$$f(x) = (a_{n+1} - a_n)(x - n) + a_n, \quad n \leq x \leq n + 1,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = l.$$

Inversamente, si f satisface $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$, y $a_n = f(n)$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = l$.

Esta segunda observación es con frecuencia muy útil. Supóngase, por ejemplo, que $0 < a < 1$. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} a^n = 0.$$

Para demostrar esto observamos que

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \lim_{x \to \infty} e^{x \log a} = 0,$$

por ser $\log a < 0$, de modo que $x \log a$ es negativo y grande en valor absoluto para x grandes. Obsérvese que en realidad tenemos

$$\lim_{n \to \infty} a^n = 0 \quad \text{si } |a| < 1;$$

ya que si $a < 0$ podemos escribir

$$\lim_{n \to \infty} a^n = \lim_{n \to \infty} (-1)^n |a|^n = 0.$$

El comportamiento de la función logarítmica indica también que si $a > 1$, entonces a^n se hace arbitrariamente grande al hacerse n grande. Esta afirmación se escribe a menudo

$$\lim_{n \to \infty} a^n = \infty, \quad a > 1,$$

e incluso se dice a veces que $\{a^n\}$ tiende hacia ∞. Escribimos también ecuaciones tales como

$$\lim_{n \to \infty} -a^n = -\infty,$$

y decimos que $\{-a^n\}$ tiende hacia $-\infty$. Obsérvese, sin embargo, que si $a < -1$, entonces $\lim_{n \to \infty} a^n$ no existe, ni siquiera en este sentido generalizado.

A pesar de esta conexión con un concepto familiar, es más importante representarse la convergencia en términos de la imagen de una sucesión de puntos sobre una recta (figura 3). Existe otra conexión entre límites de funciones y límites de

sucesiones relacionada con *esta* imagen. Esta conexión es algo menos evidente, pero considerablemente más interesante, que la antes mencionada; en vez de definir límites de sucesiones en términos de límites de funciones, es posible invertir el proceso.

TEOREMA 1

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene c, excepto quizá en c mismo, con

$$\lim_{x\to c} f(x) = l.$$

Supóngase que $\{a_n\}$ es una sucesión tal que

(1) cada a_n pertenece al dominio de f,
(2) cada $a_n \neq c$,
(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

Entonces la sucesión $\{f(a_n)\}$ satisface

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l.$$

Recíprocamente, si esto se cumple para toda sucesión $\{a_n\}$ que satisface las condiciones anteriores, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = l$.

DEMOSTRACIÓN

Supóngase primero que $\lim_{x\to c} f(x) = l$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si} \quad 0 < |x - c| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Si la sucesión $\{a_n\}$ satisface $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, entonces (figura 3) existe un número natural N tal que

$$\text{si} \quad n > N, \quad \text{entonces} \quad |a_n - c| < \delta.$$

Según nuestra elección de δ, esto significa que

$$|f(a_n) - l| < \varepsilon,$$

lo cual demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l.$$

Recíprocamente, supóngase que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$ para toda sucesión $\{a_n\}$ con $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. Si *no* fuese $\lim_{x\to c} f(x) = l$, entonces existiría algún $\varepsilon > 0$ tal que para *todo* $\delta > 0$ existiría un x con

$$0 < |x - c| < \delta \quad \text{pero} \quad |f(x) - l| > \varepsilon.$$

En particular, para todo n existiría algún número x_n tal que

$$0 < |x_n - c| < \frac{1}{n} \quad \text{pero} \quad |f(x_n) - l| > \varepsilon.$$

Con esto la sucesión $\{x_n\}$ convergería claramente hacia c, pero, por ser $|f(x_n) - l| > \varepsilon$ para todo n, la sucesión $\{f(x_n)\}$ no convergería hacia l. Esto estaría en contradicción con la hipótesis, de modo que debe cumplirse $\lim_{x\to c} f(x) = l$. ▮

El teorema 1 suministra muchos ejemplos de sucesiones convergentes. Por ejemplo, las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ definidas por

$$a_n = \operatorname{sen}\left(13 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$b_n = \cos\left(\operatorname{sen}\left(1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)\right),$$

convergen claramente hacia sen(13) y cos(sen(1)), respectivamente. Es, sin embargo, importante, disponer de algunos criterios que garanticen la convergencia de sucesiones que no sean ostensiblemente de este tipo. Existe un criterio importante muy fácil de demostrar, pero que constituye la base para todos los demás resultados. Este criterio se expresa en términos de conceptos definidos para funciones, los cuales por lo tanto son también aplicables a sucesiones: una sucesión $\{a_n\}$ es **creciente** si $a_{n+1} > a_n$ para todo n, **no decreciente** si $a_{n+1} \geq a_n$ para todo n,

y **acotada superiormente** si existe un número M tal que $a_n \leq M$ para todo n; existen definiciones análogas para sucesiones que son decrecientes, no crecientes, y acotadas inferiormente.

TEOREMA 2

Si $\{a_n\}$ es no decreciente y acotada superiormente, entonces $\{a_n\}$ converge (un enunciado análogo se cumple si $\{a_n\}$ es no creciente y acotada inferiormente).

DEMOSTRACIÓN

El conjunto A formado por todos los números a_n es, según se ha supuesto, acotado superiormente, de modo que A tiene una cota superior mínima α. Decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (figura 5). En efecto, si $\varepsilon > 0$, existe algún a_N que satisface $\alpha - a_N < \varepsilon$, puesto que α es la cota superior mínima de A. Entonces si $n > N$ tenemos

$$a_n \geq a_N, \text{ de modo que } \alpha - a_n \leq \alpha - a_N < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. ▮



FIGURA 5

La hipótesis de que $\{a_n\}$ está acotada superiormente es claramente esencial en el teorema 2: si $\{a_n\}$ no está acotada superiormente, entonces (tanto si $\{a_n\}$ es no decreciente como si no lo es) $\{a_n\}$ claramente diverge. Con esta consideración, podría parecer que no debería existir dificultad alguna en decidir si una sucesión no decreciente dada $\{a_n\}$ está o no acotada superiormente, y en consecuencia si $\{a_n\}$ converge o no. En el próximo capítulo tales sucesiones surgirán de modo muy natural y, según veremos, el decidir si convergen o no, no será siempre trivial. De momento, puede el lector intentar decidir si la siguiente (evidentemente creciente) sucesión está o no acotada superiormente:

$$1, 1 + \tfrac{1}{2}, 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}, 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}, \ldots .$$

Aunque el teorema 2 trata solamente un caso muy particular de sucesiones, resulta más útil de lo que a primera vista puede parecer, puesto que es siempre

posible extraer de cualquier sucesión $\{a_n\}$ otra sucesión que es o bien no creciente o bien no decreciente. Hablando con precisión, definamos una **subsucesión** de una sucesión $\{a_n\}$ como una sucesión de la forma

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots,$$

donde los n_j son números naturales con

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots .$$

Entonces toda sucesión contiene una subsucesión que es o bien no decreciente o bien no creciente. Es muy posible confundirse al tratar de demostrar esta afirmación, si bien la demostración es muy corta cuando se acierta con la idea adecuada; vale la pena establecerla como lema.

LEMA

Cualquier sucesión $\{a_n\}$ contiene una subsucesión que es o bien no decreciente o bien no creciente.

DEMOSTRACIÓN

Llamemos «punto cumbre» de una sucesión $\{a_n\}$ a un número natural n tal que $a_m < a_n$ para todo $m > n$ (figura 6).

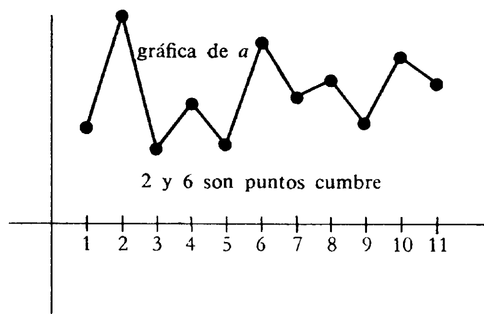


FIGURA 6

Caso 1. La sucesión tiene infinitos puntos cumbre. En este caso, si $n_1 <$

$< n_2 < n_3 < \ldots$, son los puntos cumbre, entonces $a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \ldots$, de modo que $\{a_{n_k}\}$ es la subsucesión (no creciente) deseada.

Caso 2. La sucesión tiene solamente un número finito de puntos cumbre. En este caso, sea n_1 mayor que todos los puntos cumbre. Puesto que n_1 no es punto cumbre, existe algún $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} \geq a_{n_1}$. Puesto que n_2 no es punto cumbre (es mayor que n_1, y por lo tanto mayor que todos los puntos cumbre) existe algún $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_3} \geq a_{n_2}$. Continuando de esta forma obtenemos la subsucesión (no decreciente) deseada. ▌

Si suponemos que nuestra sucesión original $\{a_n\}$ está acotada, podemos establecer de paso otro corolario.

COROLARIO
(TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS)

Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

Hasta aquí es donde podemos llegar sin suposiciones adicionales: es fácil construir sucesiones que tengan muchas, incluso infinitas, subsucesiones que converjan hacia números distintos (véase el problema 3). Existe otra suposición razonable que, al añadirla, da una condición necesaria y suficiente para la convergencia de cualquier sucesión. Aunque esta condición no va a ser crucial para nuestro trabajo, simplifica muchas demostraciones. Además, esta condición desempeña un papel fundamental en investigaciones más avanzadas, y sólo por esta razón ya vale la pena que la establezcamos ahora.

Si una sucesión converge, de modo que sus términos eventualmente se aproximan todos a un mismo número, entonces la diferencia entre dos cualesquiera de tales términos debe ser muy pequeña. Para ser precisos, si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, para algún l, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un N tal que $|a_n - l| < \varepsilon/2$ para $n > N$; ahora bien, si es a la vez $n > N$ y $m > N$, entonces

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esta desigualdad final, $|a_n - a_m| < \varepsilon$, que elimina la mención del límite l, puede utilizarse para formular una condición (la condición de Cauchy) que es claramente necesaria para la convergencia de una sucesión.

DEFINICIÓN

Una sucesión $\{a_n\}$ es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que, para todo m y n,

$$\text{si } m, n > N, \text{ entonces } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

(Esta condición se escribe generalmente $\lim\limits_{m,n\to\infty} |a_m - a_n| = 0$.)

La elegancia de la condición de Cauchy está en que es también suficiente para asegurar la convergencia de una sucesión. Después de todo nuestro trabajo preliminar, queda poco por hacer para demostrar esto.

TEOREMA 3

Una sucesión $\{a_n\}$ converge si y sólo si es una sucesión de Cauchy.

DEMOSTRACIÓN

Hemos demostrado ya que $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si converge. La demostración de la recíproca contiene solamente una característica artificiosa: demostrar que toda sucesión de Cauchy $\{a_n\}$ está acotada. Si tomamos $\varepsilon = 1$ en la definición de una sucesión de Cauchy encontramos que existe algún N tal que

$$|a_m - a_n| < 1 \quad \text{para } m, n > N.$$

En particular, esto significa que

$$|a_m - a_{N+1}| < 1 \quad \text{para todo } m > N.$$

Así pues, $\{a_m : m > N\}$ está acotada; puesto que los a_i restantes son en número finito, toda la sucesión está acotada.

El corolario del lema implica así que alguna subsucesión de $\{a_n\}$ converge.

Solamente queda un punto, cuya demostración se deja para el lector: si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces la misma sucesión de Cauchy converge. ▌

PROBLEMAS

1. Compruébense cada uno de los siguientes límites.

(i) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1.$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{n^3+4} = 0.$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1} = 0.$ Indicación: El lector debe poder demostrar por lo menos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[8]{n^2} = 0.$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0.$ Indicación: $n! = n(n-1)\ldots k!$ para $k < n$, en particular, para $k < n/2$.

(v) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0.$

(vi) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

(vii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1.$

(viii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max(a, b).$

(ix) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(n)}{n} = 0,$ donde $\alpha(n)$ es el número de números primos que dividen n. Indicación: El hecho de que todo número primo es ≥ 2 proporciona una estimación muy sencilla de lo pequeño que debe ser $\alpha(n)$.

*(x) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}.$

2. Hallar los límites siguientes:

(i) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}.$

(ii) $\lim_{n\to\infty} n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b}.$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}\,\text{sen}(n^n)}{n+1}$.

(v) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

(vi) $\lim_{n\to\infty} nc^n, \qquad |c| < 1$.

(vii) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$.

3. (a) ¿Qué puede decirse acerca de la sucesión $\{a_n\}$ si es convergente y cada uno de sus términos a_n es entero?
(b) Hallar todas las subsucesiones convergentes de la sucesión 1, —1, 1, —1, 1, —1, ... (Existen infinidad de ellas, pero sólo hay dos límites que estas subsucesiones pueden tener.)
(c) Hallar todas las subsucesiones convergentes de la sucesión 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, ... (Existen infinitos límites que estas subsucesiones pueden tener.)
(d) Considérese la sucesión

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{6}, \ldots .$$

¿Para qué números α existe una subsucesión que converge hacia α?

4. (a) Demostrar que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces también converge la sucesión de Cauchy original.
(b) Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es convergente.

5. (a) Demostrar que si $0 < a < 2$, entonces $a < \sqrt{2a} < 2$.
(b) Demostrar que la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$$

converge.
(c) Hallar el límite. Indicación: Obsérvese que si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2l}$, según el teorema 1.

6. Sea $0 < a_1 < b_1$ y definamos

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(a) Demostrar que cada una de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ converge.
(b) Demostrar que las dos tienen el mismo límite.

7. Hemos visto en el problema 2-16 que para cualquier aproximación racional m/n a $\sqrt{2}$ se puede obtener una aproximación mejor $(m + 2n)/(m + n)$. En particular, partiendo de $m = n = 1$, obtenemos

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \ldots$$

(a) Demostrar que esta sucesión viene dada en forma recursiva por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}.$$

(b) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Esto proporciona el denominado *desarrollo en fracción continua*

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}.$$

Ayuda: Considerar por separado las subsucesiones $\{a_{2n}\}$ y $\{a_{2n+1}\}$.

(c) Demostrar que para cualesquiera números naturales a y b se cumple

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}.$$

8. Identificar la función $f(x) = \lim_{n\to\infty} (\lim_{k\to\infty} (\cos n!\pi x)^{2k})$. (Ha sido mencionada muchas veces en este libro.)

9. Muchos límites de aspecto impresionante pueden ser calculados fácilmente (en particular por el que los construye), puesto que son en realidad sumas inferiores o superiores disfrazadas. Con ayuda de esta observación, calcular cada uno de los siguientes. (Aviso: la lista contiene un elemento errante que puede ser calculado mediante consideraciones elementales.)

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^n}}{n}$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^{2n}}}{n}$.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$.

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}\right)$.

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{(n+1)^2} + \dfrac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{n}{(n+n)^2}\right)$.

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$.

10. Aunque los límites tales como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ pueden calcularse utilizando hechos acerca del comportamiento de las funciones logarítmica y exponencial, este procedimiento no es satisfactorio, porque las raíces enteras y las potencias pueden definirse sin utilizar la función exponencial. Algunos de los razonamientos «elementales» corrientes para tales límites se indican aquí; los instrumentos básicos son desigualdades derivadas del teorema del binomio, notablemente

$$(1+h)^n \geq 1 + nh, \quad \text{para } h > 0;$$

y, para la parte (e),

$$(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2, \quad \text{para } h > 0.$$

(a) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ si $a > 1$, poniendo $a = 1 + h$, donde $h > 0$.

(b) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ si $0 < a < 1$.

(c) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ si $a > 1$, poniendo $\sqrt[n]{a} = 1 + h$ y estimando h.

(d) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ si $0 < a < 1$.

(e) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

11. (a) Demostrar que una sucesión convergente es siempre acotada.

(b) Supóngase que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, y que cada $a_n > 0$. Demostrar que el conjunto de todos los números a_n tiene en realidad un elemento máximo.

12. (a) Demostrar que

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}.$$

(b) Si

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n,$$

demostrar que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente, y que cada $a_n \geq 0$. Se sigue que existe un número

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

Este número, conocido como número de Euler, ha resultado ser del todo refractario; no se sabe siquiera si γ es racional.

13. (a) Supóngase que f es creciente sobre $[1, \infty]$. Demostrar que

$$f(1) + \cdots + f(n-1) < \int_1^n f(x)\, dx < f(2) + \cdots + f(n).$$

(b) Elíjase ahora $f = \log$ y demuéstrese que

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}};$$

se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Este resultado indica que $\sqrt[n]{n!}$ es aproximadamente n/e, en el sentido de que la relación entre estas dos cantidades tiende hacia 1 para n grande. Pero no podemos concluir que $n!$ está próximo a $(n/e)^n$ en este sentido; de hecho, esto es falso. Una estimación para $n!$ es muy deseable, incluso para cálculos concretos, ya que $n!$ no puede ser calculado fácilmente ni siquiera con tablas de logaritmos. El clásico (y difícil) teorema que proporciona la información adecuada se encontrará en el problema 26-19.

14. (a) Demostrar que la tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$ corta al eje horizontal en $(x_1, 0)$, donde

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

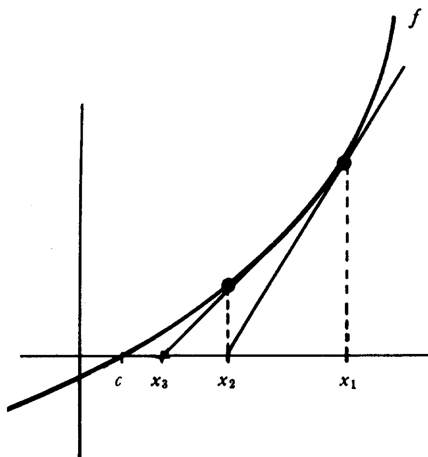


FIGURA 7

Este punto de intersección se puede considerar como una primera aproximación al punto en que la gráfica de f corta al eje horizontal. Si empezamos ahora en x_1 y repetimos el proceso para obtener x_2 y después utilizamos x_2 para obtener x_3, etc., llegamos a una sucesión definida inductivamente por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

La figura 7 sugiere que $\{x_n\}$ converge hacia un número c con $f(c) = 0$;

en esto consiste el denominado ***método de Newton*** para hallar un cero de f. En este problema vamos a establecer condiciones para que el método de Newton tenga eficacia (las figuras 8 y 9 ilustran dos casos en que no la tiene). Pueden resultar útiles algunos hechos relacionados con la convexidad; véase el apéndice al capítulo 11.

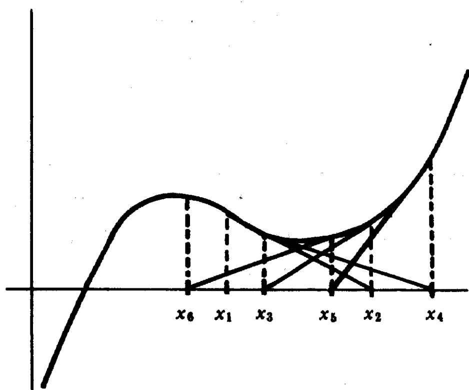


FIGURA 8

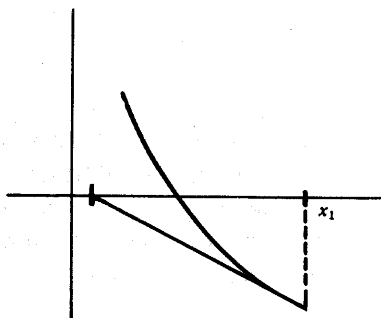


FIGURA 9

(b) Supóngase que es $f'' > 0$ y que tomamos x_0 con $f(x_0) > 0$. Demostrar que es $x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq ... \geq c$.

(c) Pongamos $\delta_k = x_k - c$. Entonces

$$\delta_k = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)}$$

para algún ξ_k de (c, x_k). Demostrar que

$$\delta_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Concluir que

$$\delta_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)\, f'(x_k)} \cdot |f''(\eta)(x_k - \xi_k)|$$

para algún η_k de (c, x_k), y después que

$$(*) \qquad \delta_{k+1} \leq \frac{|f''(\eta_k)|}{f'(x_k)}\, \delta_k{}^2.$$

(d) Sea $m = \inf f'$ en $[c, x_1]$ y pongamos $M = \sup |f''|$ en $[c, x_1]$. Demostrar que el método de Newton resulta eficaz si $x_0 - c < m/M$.

(e) ¿Cuál es la fórmuia de x_{n+1} cuando $f(x) = x^2 - A$?

Si tomamos $A = 2$ y $x_0 = 1.4$ obtenemos

$$\begin{aligned} x_0 &= 1.4 \\ x_1 &= 1.4142857 \\ x_2 &= 1.4142136 \\ x_3 &= 1.4142136, \end{aligned}$$

que tiene ya 7 decimales exactos. Observar que el número de decimales exactos se ha duplicado cada vez por lo menos. Esto queda esencialmente garantizado por la desigualdad (*) cuando es $M/m < 1$.

15. Aplicar el método de Newton para obtener una estimación de los ceros de las funciones siguientes:

(i) $f(x) = \text{tg } x - \cos^2 x$	cerca de 0
(ii) $f(x) = \cos x - x^2$	cerca de 0
(iii) $f(x) = x^3 + x - 1$	en $[0, 1]$
(iv) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$	en $[0, 1]$

***16.** Demostrar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_1 + \cdots + a_n)}{n} = l.$$

Indicación: Este problema es muy parecido (en realidad un caso particular) al problema 13-41.

17. Supóngase que f es continua y que $\lim_{x\to\infty} f(x+1) - f(x) = 0$. Demostrar que $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = 0$. Ayuda: Ver el problema anterior.

***18.** Supóngase que $a_n > 0$ para cada n y que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = l$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Indicación: Esto requiere el mismo tipo de razonamiento que da resultado en el problema 16, junto con el hecho de que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ para $a > 0$.

19. (a) Supóngase que $\{a_n\}$ es una sucesión convergente de puntos, todos ellos en [0, 1]. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n$ está también en [0, 1].

(b) Hallar una sucesión convergente $\{a_n\}$ de puntos de (0, 1) tal que $\lim_{n\to\infty} a_n$ no esté en (0, 1).

20. Supóngase que f es continua y que la sucesión

$$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$$

converge hacia l. Demostrar que l es un «punto fijo» para f, es decir, $f(l) = l$. Indicación: Se han presentado ya dos casos particulares.

21. (a) Supóngase que f es continua sobre [0, 1] y que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo x de [0, 1]. El problema 7-11 indica que f tiene un punto fijo (según la terminología del problema 20). Si f es *creciente*, se puede hacer una afirmación mucho más fuerte: Para todo x de [0, 1], la sucesión

$$x, f(x), f(f(x)), \ldots$$

tiene límite (el cual es necesariamente un punto fijo, según el problema 20). Demostrar esta afirmación, examinando el comportamiento de la sucesión para $f(x) > x$ y $f(x) < x$, o bien observando la figura 10. Un

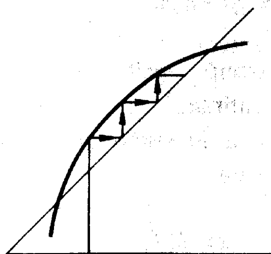


FIGURA 10

diagrama de este tipo se usa en la obra de Littlewood *Mathematician's Miscellany* para encarecer el valor de los dibujos: «Para el profesional la única demostración que hace falta es [esta figura].»

*(b) Supóngase que f y g son dos funciones continuas sobre [0, 1], con $0 \leq f(x) \leq 1$ y $0 \leq g(x) \leq 1$ para todo x de [0, 1], que satisfacen $f \circ g = g \circ f$. Supóngase, además, que f es creciente. Demuéstrese que f y g tienen un punto fijo común; en otras palabras, existe un número l tal que $f(l) = l = g(l)$. Indicación: Empiécese eligiendo un punto fijo para g.

***(c) ¿Se cumple la conclusión de la parte (b) sin la suposición de que f es creciente?

El artificio del problema 20 es en realidad de mucho más valor que lo que el problema 20 puede sugerir, y algunos de los más importantes «teoremas de punto fijo» se basan en la observación de sucesiones de la forma x, $f(x)$, $f(f(x))$, ... Un caso particular, pero representativo, de un teorema de este tipo se trata en el problema 23. (para el cual el problema próximo constituye una preparación).

22. (a) Utilizar el problema 2-5 para demostrar que si $c \neq 1$, entonces

$$c^m + c^{m+1} + \cdots + c^n = \frac{c^m - c^{n+1}}{1 - c}.$$

(b) Supóngase que $|c| < 1$. Demostrar que

$$\lim_{m,n \to \infty} c^m + \cdots + c^n = 0.$$

(c) Supóngase que $\{x_n\}$ es una sucesión con $|x_n - x_{n+1}| \leq c^n$, donde $c < 1$. Demostrar que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

***23.** Supóngase que f es una función sobre $\mathbf{R}$ tal que

$$(*) \qquad |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \qquad \text{para todo } x \text{ e } y,$$

donde $c < 1$. (Una tal función recibe el nombre de *contracción*.)

(a) Demostrar que f es continua.

(b) Demostrar que f tiene a lo sumo un punto fijo.

(c) Considerando la sucesión

$$x, f(x), f(f(x)), \ldots,$$

para cualquier x de $[a, b]$, demostrar que f tiene un punto fijo. (Este resultado, en un contexto más general, es conocido como «lema de contracción».)

24. (a) Demostrar que si f es derivable y $|f'| < 1$, entonces f tiene a lo sumo un punto fijo.

(b) Demostrar que si $|f'(x)| \leq c < 1$ para todos los x, entonces f tiene un punto fijo.

(c) Hacer ver mediante un ejemplo que la hipótesis $|f'(x)| \leq 1$ no es suficiente para que f tenga un punto fijo.

25. Este problema es una especie de recíproco del anterior. Sea b_n una sucesión definida poniendo $b_1 = a$, $b_{n+1} = f(b_n)$. Demostrar que si $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ existe y f' es continua en b, entonces $|f'(b)| \leq 1$. Ayuda: Si $|f'(b)| > 1$, entonces $|f'(x)| > 1$ para todos los x de un intervalo en torno a b, y para un n suficientemente grande, b_n estará en este intervalo. Considerar ahora a f en el intervalo $[b, b_n]$.

26. Este problema investiga para qué valores de $a > 0$ tiene sentido el símbolo

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

Dicho de otro modo, si definimos $b_1 = a$, $b_{n+1} = a^{b_n}$, ¿cuándo existe $b = \lim_{n\to\infty} b_n$?

(a) Demostrar que si b existe, entonces $a^b = b$. (La situación es análoga a la del problema 5.)

(b) Según la parte (a), si b existe, entonces a se puede poner en la forma $y^{1/y}$ para un cierto y. Describir la gráfica de $g(y) = y^{1/y}$ y concluir que $0 < a \leq e^{1/e}$.

(c) Supóngase que $1 \leq a \leq e^{1/e}$. Demostrar que $\{b_n\}$ es creciente y también que $b_n \leq e$. Esto demuestra que b existe (y que es $b \leq e$).
Para $a < 1$ el análisis es más difícil.

(d) Aplicando el problema 25, demostrar que si b existe, entonces $e^{-1} \leq b \leq e$. Después demostrar que $e^{-e} \leq a \leq e^{1/e}$. A partir de aquí supondremos que es $e^{-e} \leq a < 1$.

(e) Demostrar que la función

$$f(x) = \frac{a^x}{\log x}$$

es decreciente en el intervalo (0, 1).

(f) Sea b el número único tal que $a^b = b$. Demostrar que $a < b < 1$. Utilizando la parte (e) demostrar que si $0 < x < b$, entonces $x < a^{a^x} < b$. Concluir que $l = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$ existe y que es $a^{a^l} = l$.

(g) Utilizando otra vez la parte (e) demostrar que es $l = b$.

(h) Demostrar finalmente que $\lim_{n\to\infty} a_{2n+2} = b$, con lo que $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

27. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada, y sea

$$y_n = \sup \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}.$$

(a) Demostrar que la sucesión $\{y_n\}$ converge. El límite $\lim_{n\to\infty} y_n$ se designa por $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ o bien por $\lim_{n\to\infty} \sup x_n$, y es llamado el **límite superior** de la sucesión $\{x_n\}$.

(b) Hallar $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ para cada una de las sucesiones siguientes:

(i) $x_n = \dfrac{1}{n}$.

(ii) $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$.

(iii) $x_n = (-1)^n \left[1 + \dfrac{1}{n}\right]$.

(iv) $x_n = \sqrt[n]{n}$.

(c) Definir $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ (o $\lim_{n\to\infty} \inf x_n$) y demostrar que

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

(d) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe si y sólo si $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ y que en este caso $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$.

(e) Recordar la definición del problema 8-18 de $\overline{\lim}\, A$ para un conjunto acotado A. Demostrar que si los números x_n son distintos, entonces $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim}\, A$, donde $A = \{x_n\colon n \text{ en } \mathbf{N}\}$.

28. En el apéndice al capítulo 8 hemos definido la continuidad uniforme en un intervalo. Este concepto sigue teniendo sentido cuando $f(x)$ se define solamente para valores racionales de x: diremos que f es uniformemente continua en un intervalo si para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que si x e y son números racionales del intervalo y es $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
(a) Sea x un punto cualquiera (racional o irracional) del intervalo y sea

$\{x_n\}$ una sucesión de puntos *racionales* del mismo tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Demostrar que la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge.

(b) Demostrar que el límite de la sucesión $\{f(x_n)\}$ no depende de la forma de elegir $\{x_n\}$.
A este límite lo designaremos por $\bar{f}(x)$, de tal modo que $\bar{f}$ será una extensión de f a todo el intervalo.

(c) Demostrar que la función $\bar{f}$ es uniformemente continua en el intervalo.

29. Sea $a > 0$ y para los x racionales sea $f(x) = a^x$ según la definición corriente del álgebra elemental. Este problema hace ver directamente que f se puede extender a una función continua $\bar{f}$ en toda la recta real. El problema 28 proporciona el instrumental necesario.

(a) Demostrar que es $a^x < a^y$ para valores racionales $x < y$.

(b) Aplicando el problema 10, demostrar que para un $\epsilon > 0$ cualquiera, se tiene $|a^x - 1| < \epsilon$ para números racionales suficientemente próximos a 0.

(c) Por medio de la ecuación $a^x - a^y = a^y(a^{x+y} - 1)$ demostrar que f es uniformemente continua en cualquier intervalo cerrado, en el sentido del problema 28.

(d) Demostrar que la función extendida $\bar{f}$ del problema 28 es creciente y satisface $\bar{f}(x + y) = \bar{f}(x)\bar{f}(y)$.

***30.** El teorema de Bolzano-Weierstrass se suele enunciar, y también demostrar, de modo muy diferente del que se ha dado en el texto —el enunciado clásico utiliza la noción de puntos de acumulación—. Un punto x es un **punto de acumulación** del conjunto A si para todo $\varepsilon > 0$ existe un punto a en A con $|x - a| < \varepsilon$ pero $x \neq a$.

(a) Hallar todos los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos.

(i) $\left\{\frac{1}{n}: n \text{ en } \mathbf{N}\right\}$.

(ii) $\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}: n \text{ y } m \text{ en } \mathbf{N}\right\}$.

(iii) $\left\{(-1)^n \left[1 + \frac{1}{n}\right]: n \text{ en } \mathbf{N}\right\}$.

(iv) $\mathbf{Z}$.

(v) $\mathbf{Q}$.

(b) Demostrar que x es un punto de acumulación de A si y sólo si para

todo $\varepsilon > 0$ existen infinitos puntos a de A que satisfacen $|x - a| < \varepsilon$.

(c) Demostrar que $\overline{\lim}\ A$ es el punto de acumulación más grande de A, y que $\underline{\lim}\ A$ es el más pequeño.

La forma usual del teorema de Bolzano-Weierstrass dice que si A es un conjunto infinito de números contenidos en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces algún punto de $[a, b]$ es un punto de acumulación de A. Demostrar esto de dos maneras:

(d) Utilizando la forma ya demostrada en el texto. Indicación: Puesto que A es infinito, existen en A números distintos $x_1, x_2, x_3, \ldots$

(e) Utilizando el teorema de los intervalos encajados. Indicación: Si $[a, b]$ se divide en dos intervalos, por lo menos uno de ellos contendrá infinitos puntos de A.

31. (a) Utilizar el teorema de Bolzano-Weierstrass para demostrar que si f es continua sobre $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente sobre [a, b]. Indicación: Si f no está acotada superiormente, entonces existen puntos x_n en $[a, b]$ con $f(x_n) > n$.

(b) Utilizando también el teorema de Bolzano-Weierstrass, demostrar que si f es continua sobre $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua sobre $[a, b]$ (ver el apéndice del capítulo 8).

****32.** (a) Sea $\{a_n\}$ la sucesión

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{6}, \ldots .$$

Supóngase que $0 \leq a \leq b \leq 1$. Sea $N(n;\ a, b)$ el número de enteros $j \leq n$ tales que a_j está en $[a, b]$. (Así, $N(2;\ \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) = 2$, y $N(4;\ \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) = 3$.) Demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(n;\, a, b)}{n} = b - a.$$

(b) Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ de números de [0, 1] es **uniformemente distribuida** en [0, 1] si

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(n;\, a, b)}{n} = b - a$$

para todo a y b con $0 \leq a < b \leq 1$. Demostrar que si s es una función escalonada definida sobre [0, 1], y $\{a_n\}$ es uniformemente distribuida en [0, 1], entonces

$$\int_0^1 s = \lim_{n\to\infty} \frac{s(a_1) + \cdots + s(a_n)}{n}.$$

(c) Demostrar que si $\{a_n\}$ es uniformemente distribuida en $[0, 1]$ y f es integrable sobre $[0, 1]$, entonces

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_1) + \cdots + f(a_n)}{n}.$$

****33.** (a) Sea f una función definida sobre $[0, 1]$ tal que $\lim_{y\to a} f(y)$ existe para todo a de $[0, 1]$. Para cualquier $\varepsilon > 0$, demostrar que existe solamente un número finito de puntos a de $[0, 1]$ con $|\lim_{y\to a} f(y) - f(a)| > \varepsilon$. Indicación: Demostrar que el conjunto de tales puntos no puede tener un punto de acumulación x, demostrando que $\lim_{y\to x} f(y)$ no podría existir.

(b) Demostrar que, en la terminología del problema 20-5, el conjunto de puntos en que f es discontinua es numerable. Esto resuelve finalmente la cuestión del problema 6-16: Si f tiene solamente discontinuidades evitables, entonces f es continua excepto en un conjunto numerable de puntos, y en particular, f no puede ser discontinua por todas partes.

CAPÍTULO

22

SERIES INFINITAS

Las sucesiones infinitas se introdujeron en el capítulo anterior con la intención especial de considerar en este capítulo sus «sumas»

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Estas sumas no se pueden hacer sin más, ya que hasta ahora la suma de infinitos números no ha sido nunca definida. Lo que puede definirse son «las sumas parciales»

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n,$$

y se puede presumir que las sumas infinitas deban definirse en términos de estas sumas parciales. Afortunadamente, el mecanismo para formular esta definición ha sido desarrollado ya en el capítulo anterior. Si existe alguna esperanza de poder calcular la suma infinita $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, las sumas parciales s_n deben representar aproximaciones cada vez más cercanas a medida que n se va haciendo más grande. Esta última afirmación equivale a poco más que una definición grosera de límites: La «suma infinita» $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, debería ser $\lim_{n \to \infty} s_n$. Este modo de abordar el asunto dejará necesariamente sin definir la «suma» de muchas sucesiones, puesto que la sucesión s_n puede fácilmente dejar de tener un límite. Por ejemplo, la sucesión

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

con $a_n = (-1)^{n+1}$ proporciona la nueva sucesión

$$s_1 = a_1 = 1,$$
$$s_2 = a_1 + a_2 = 0,$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1,$$
$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0,$$
$$\ldots,$$

para la cual no existe $\lim_{n\to\infty} s_n$. Si bien existen muchas ingeniosas extensiones de la definición aquí sugerida (véanse los problemas 8 y 23-11) parece inevitable que algunas sucesiones carezcan de suma. Por esta razón, una definición aceptable de suma de una sucesión debe contener, como componente esencial una terminología que permita distinguir las sucesiones para las cuales pueden definirse las sumas, de las menos afortunadas.

DEFINICIÓN

La sucesión $\{a_n\}$ es **sumable** si la sucesión $\{s_n\}$ converge, siendo

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

En este caso, se designa $\lim_{n\to\infty} s_n$ por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{(o, menos formalmente, } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\text{)}$$

y recibe el nombre de **suma** de la sucesión $\{a_n\}$.

La terminología introducida en esta definición se suele sustituir por expresiones menos precisas; de hecho, el título de este capítulo viene en este lenguaje corriente. Una suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es llamada generalmente *serie infinita*, destacando la palabra «serie» la conexión con la sucesión infinita $\{a_n\}$. La afirmación de que $\{a_n\}$ es, o no es, sumable se sustituye convencionalmente por la afirma-

ción de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, o no converge. Esta terminología es algo peculiar, porque en el mejor de los casos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ designa un número (de modo que no puede «converger») y no designa nada en absoluto si $\{a_n\}$ no es sumable. Sin embargo, este lenguaje informal resulta conveniente, es muy usado, y es poco probable que pueda ceder ante ataques fundamentados en la lógica.

Ciertas operaciones aritméticas elementales sobre series infinitas son consecuencias directas de la definición. Constituye un ejercicio sencillo demostrar que si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sumables, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Hasta ahora estas ecuaciones no son todavía muy interesantes puesto que no tenemos ejemplos de sucesiones sumables (aparte de los ejemplos triviales en los que los términos son eventualmente todos 0). Antes de que demos efectivamente una sucesión sumable, estableceremos algunas condiciones generales para la sumabilidad.

Hay una condición necesaria y suficiente para la sumabilidad que puede ser enunciada inmediatamente. La sucesión $\{a_n\}$ es sumable si y sólo si la sucesión $\{s_n\}$ converge, lo cual ocurre, según el teorema 21-3, si y sólo si $\lim_{m,n\to\infty} s_m - s_n = 0$; esta condición puede expresarse en términos de la sucesión original como sigue.

CRITERIO DE CAUCHY

La sucesión $\{a_n\}$ es sumable si y sólo si

$$\lim_{m,n\to\infty} a_{n+1} + \cdots + a_m = 0.$$

Aunque el criterio de Cauchy tiene importancia teórica, es poco útil para decidir la sumabilidad de una sucesión particular cualquiera. Sin embargo, una consecuencia sencilla del criterio de Cauchy suministra una condición *necesaria* para

la sumabilidad, condición que es demasiado importante para dejar de mencionarla explícitamente.

CONDICIÓN DEL RESTO

Si $\{a_n\}$ es sumable, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Esta condición se sigue del criterio de Cauchy tomando $m = n + 1$; también puede ser demostrada directamente como sigue. Si $\lim_{n\to\infty} s_n = l$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \\ &= l - l = 0.\end{aligned}$$

Desgraciadamente, esta condición está lejos de ser suficiente. Por ejemplo, $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, pero la sucesión $\{1/n\}$ no es sumable; efectivamente, la siguiente agrupación de los números $1/n$ demuestra que la sucesión s_n no es acotada:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{\substack{\geq \frac{1}{2} \\ \text{(2 términos} \\ \text{cada uno } \geq \frac{1}{4})}} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}}_{\substack{\geq \frac{1}{2} \\ \text{(4 términos} \\ \text{cada uno } \geq \frac{1}{8})}} + \underbrace{\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}}_{\substack{\geq \frac{1}{2} \\ \text{(8 términos} \\ \text{cada uno } \geq \frac{1}{16})}} + \cdots .$$

El método de demostración utilizado en este ejemplo, un ingenioso artificio que posiblemente no se le ocurra a uno nunca, revela la necesidad de encontrar métodos más en serie de atacar estos problemas. Estos métodos se desarrollarán pronto (uno de ellos va a proporcionar una demostración alternativa de que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ no converge) pero será necesario dar antes unos pocos ejemplos de series convergentes.

La más importante de todas las series infinitas es la «serie geométrica»

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots .$$

Solamente son interesantes los casos $|r| < 1$, puesto que si $|r| \geq 1$ los términos individuales no tienden hacia 0. Estas series son manejables porque sus sumas parciales

$$s_n = 1 + r + \cdots + r^n$$

pueden calcularse en términos sencillos. Las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^n \\ rs_n &= \phantom{1 + {}} r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1} \end{aligned}$$

llevan a

$$s_n(1 - r) = 1 - r^{n+1}$$

o

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

(la división por $1 - r$ es válida puesto que hemos excluido el caso $r = 1$). Ahora bien, $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$, puesto que $|r| < 1$. Se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}, \quad |r| < 1.$$

En particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1,$$

es decir,

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \cdots = 1,$$

suma infinita que siempre es posible recordar con el dibujo de la figura 1.

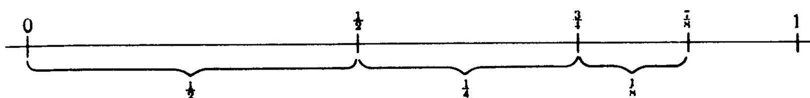


FIGURA 1

Especiales como son, las series geométricas constituyen ejemplos típicos de los que se derivarán importantes pruebas de sumabilidad.

De momento vamos a considerar solamente sucesiones $\{a_n\}$ con cada $a_n \geq 0$; tales sucesiones son llamadas **no negativas.** Si $\{a_n\}$ es una sucesión no negativa, entonces la sucesión $\{s_n\}$ es claramente no decreciente. Esta observación, combinada con el teorema 21-2, suministra una sencilla prueoa de sumabilidad:

CRITERIO DE ACOTACIÓN

Una sucesión no negativa $\{a_n\}$ es sumable si y sólo si el conjunto de las sumas parciales s_n es acotado.

En sí mismo, este criterio no es muy útil; decidir si el conjunto s_n es o no acotado es precisamente lo que no sabemos hacer. Por otra parte, si se dispone de algunas series convergentes para comparación se puede utilizar este criterio para obtener un resultado cuya sencillez encubre su importancia (constituye la base para casi todas las demás pruebas).

TEOREMA 1
(PRUEBA DE COMPARACIÓN)

Supóngase que

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{para todo } n.$$

Entonces si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

DEMOSTRACIÓN

Si

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n,$$

$$t_n = b_1 + \cdots + b_n,$$

entonces

$$0 \leq s_n \leq t_n \quad \text{para todo } n.$$

Ahora bien, $\{t_n\}$ es acotada, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Por lo tanto, $\{s_n\}$ es acotada; en consecuencia, según el criterio de acotación, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ∎

Se puede utilizar con mucha frecuencia la prueba de comparación para analizar series de aspecto muy complicado en las cuales la mayor parte de la complicación es irrelevante. Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n + n^2}$$

converge porque

$$0 \leq \frac{2 + \operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n + n^2} < \frac{3}{2^n},$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

es una serie (geométrica) convergente. Análogamente, podemos esperar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1 + \operatorname{sen}^2 n^3}$$

converja, ya que el término n-ésimo de la serie es prácticamente $1/2^n$ para valores grandes de n y podemos esperar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$$

diverja, ya que $(n + 1)/(n^2 + 1)$ es prácticamente $1/n$ para valores grandes de n. Estos hechos son inmediatamente deducibles del teorema que sigue, otro tipo de «prueba de compasión».

TEOREMA 2

Si a_n, $b_n > 0$, y $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c \neq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si converge $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

DEMOSTRACIÓN

Supóngase que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Al ser $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c$, existe un N tal que

$$a_n \leq 2cb_n \quad \text{para } n \geq N.$$

Pero la sucesión $2c \sum_{n=N}^{\infty} b_n$ ciertamente converge. Entonces el teorema 1 demuestra que $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge y ello implica la convergencia de la serie total $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, que sólo tiene un número finito de términos más.

El recíproco se sigue inmediatamente, ya que tenemos también

$$\lim_{n\to\infty} b_n/a_n = 1/c \neq 0. \blacksquare$$

La prueba de comparación da lugar a otras pruebas importantes al utilizar otras series previamente analizadas como catalizadores. Cuando se utiliza la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$, que es la serie convergente *por excelencia*, se obtiene la más importante de todas las pruebas de sumabilidad.

TEOREMA 3
(PRUEBA DEL COCIENTE)

Sea $a_n > 0$ para todo n, y supóngase que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r.$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $r < 1$. Por otra parte, si $r > 1$, entonces los términos a_n no tienden hacia 0, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. (Obsérvese que es por lo tanto esencial calcular $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ y no $\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n+1}$.)

DEMOSTRACIÓN

Supóngase primero que $|r| < 1$. Elíjase un número cualquiera s con $r < s < 1$. La hipótesis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$$

implica que existe algún N tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq s \quad \text{para } n \geq N.$$

Esto puede escribirse

$$a_{n+1} \leq s a_n \quad \text{para } n \geq N.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\leq s a_N, \\ a_{N+2} &\leq s a_{N+1} \leq s^2 a_N, \\ &\vdots \\ a_{N+k} &\leq s^k a_N. \end{aligned}$$

Puesto que $\sum_{k=0}^{\infty} a_N s^k = a_N \sum_{k=0}^{\infty} s^k$ converge, la prueba de comparación indica que

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k}$$

converge. Esto implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

El caso $r > 1$ es todavía más fácil. Si $1 < s < r$, entonces existe un número N tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq s \quad \text{para}\, n \geq N,$$

lo cual significa que

$$a_{N+k} \geq a_N s^k \geq a_N \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Esto indica que los términos individuales de $\{a_n\}$ no tienden hacia 0, de modo que $\{a_n\}$ no es sumable. ▮

Como aplicación sencilla de la prueba del cociente, considérese la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$. Haciendo $a_n = 1/n!$ obtenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Así pues,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,$$

lo cual indica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$ converge. Si, en cambio, consideramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n/n!$, donde r es algún número positivo fijo, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{r^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{r^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n+1} = 0,$$

de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} r^n/n!$ converge. Se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0,$$

resultado ya demostrado en el capítulo 16. (La demostración dada allí estuvo basada en las mismas ideas utilizadas en la prueba del cociente.) Finalmente, si consideramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n} = \lim_{n\to\infty} r \cdot \frac{n+1}{n} = r,$$

ya que $\lim_{n\to\infty}(n+1)/n = 1$. Esto demuestra que si $0 \leq r < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$ converge, y en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0.$$

(Este resultado se cumple también claramente para $-1 < r \leq 0$.) Constituye un ejercicio útil dar una demostración directa de este límite, sin utilizar de intermediario la prueba del cociente.

Aunque la prueba del cociente va a ser de suma importancia teórica, como instrumento práctico muchas veces va a decepcionar. Un inconveniente de la prueba del cociente es el hecho de que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ puede ser muy difícil de determinar, e incluso puede no existir. Una deficiencia más seria, que aparece con regularidad desconcertante, es el hecho de que el límite puede ser igual a uno. El caso $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$ es precisamente el que no permite sacar ninguna conclusión: $\{a_n\}$ puede no ser sumable (por ejemplo, si $a_n = 1/n$), pero también puede serlo.

De hecho, nuestra próxima prueba demostrará que $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)^2$ converge, aun cuando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2} = 1.$$

Esta prueba ofrece un método completamente distinto para la determinación de la convergencia o divergencia de series infinitas; lo mismo que la prueba del cociente, es una consecuencia inmediata de la prueba de comparación, pero la serie elegida para comparación constituye una novedad.

TEOREMA 4

(PRUEBA DE LA INTEGRAL)

Supóngase que f es positiva y decreciente sobre $[1, \infty)$, y que $f(n) = a_n$ para todo n. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si el límite

$$\int_1^{\infty} f = \lim_{A\to\infty} \int_1^A f$$

existe.

DEMOSTRACIÓN

La existencia de $\lim_{A\to\infty} \int_1^A f$ es equivalente a la convergencia de la serie

$$\int_1^2 f + \int_2^3 f + \int_3^4 f + \cdots .$$

Ahora bien, al ser f decreciente tenemos (figura 2)

$$f(n+1) < \int_n^{n+1} f < f(n).$$

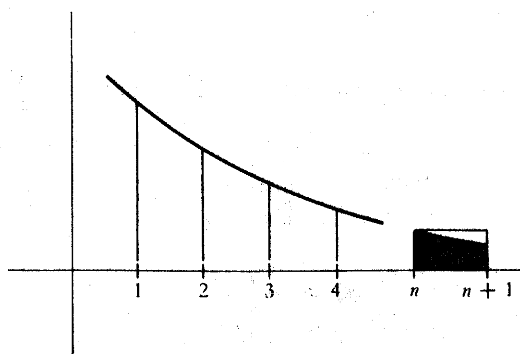


FIGURA 2

La primera mitad de esta doble desigualdad indica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ puede compararse a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f$, demostrando que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ (y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) converge si $\lim_{A\to\infty} \int_1^A$ existe.

La segunda mitad de la desigualdad indica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f$ puede compararse a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, demostrando que $\lim_{A\to\infty} \int_1^A f$ debe existir si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ▌

Solamente vamos a dar aquí un ejemplo de aplicación de la prueba de la integral, pero éste resuelve la cuestión de la convergencia para un número infinito de series a la vez. Si $p > 0$, la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ es equivalente, según la prueba de la integral, a la existencia de

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx.$$

Ahora bien,

$$\int_1^A \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{(p-1)} \cdot \dfrac{1}{A^{p-1}} + \dfrac{1}{p-1}, & p \neq 1 \\ \log A, & p = 1. \end{cases}$$

Esto indica que $\lim_{A\to\infty} \int_1^A 1/x^p\,dx$ existe si $p > 1$, pero no si $p \leq 1$. Así pues, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converge precisamente para $p > 1$. En particular, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge.

Las pruebas consideradas hasta aquí son aplicables solamente a sucesiones no negativas, pero las sucesiones no positivas pueden ser tratadas exactamente de la misma manera. Efectivamente, al ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} - a_n\right),$$

todas las consideraciones acerca de sucesiones no positivas pueden reducirse a cuestiones que afectan a sucesiones no negativas. Las sucesiones que contienen términos tanto positivos como negativos son cuestión totalmente distinta.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una sucesión con términos positivos y negativos, se puede considerar en su lugar la sucesión $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, cuyos términos son todos no negativos. Olvidando alegremente la posibilidad de haber desperdiciado toda la información interesante acerca de la sucesión original, vamos a dignificar aquellas sucesiones que se convierten por este procedimiento en sucesiones convergentes.

DEFINICIÓN

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Más formalmente, la sucesión $\{a_n\}$ es **absolutamente sumable** si la sucesión $\{|a_n|\}$ es sumable.)

Aunque no tenemos ningún derecho a esperar que esta definición pueda ser de interés, resulta ser sumamente importante. El teorema que sigue indica que por lo menos la definición no es del todo inútil.

TEOREMA 5

Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además, una serie es absolutamente convergente si y sólo si la serie formada con sus términos positivos y la serie formada con sus términos negativos son ambas convergentes.

DEMOSTRACIÓN

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces, según el criterio de Cauchy,

$$\lim_{m,n\to\infty} |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| = 0.$$

Al ser

$$|a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|,$$

se sigue que

$$\lim_{m,n\to\infty} a_{n+1} + \cdots + a_m = 0,$$

lo cual indica que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Para demostrar la segunda parte del teorema, sea

$$a_n{}^+ = \begin{cases} a_n, & \text{si } a_n \geq 0 \\ 0, & \text{si } a_n \leq 0, \end{cases}$$
$$a_n{}^- = \begin{cases} a_n, & \text{si } a_n \leq 0 \\ 0, & \text{si } a_n \geq 0, \end{cases}$$

de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^+$ es la serie formada con los términos positivos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^-$ es la serie formada con los términos negativos.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^-$ convergen ambas, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n{}^+ - (a_n{}^-)] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^-$$

también converge, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

Por otra parte, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces, según acabamos de demostrar,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge. Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^+ = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^- = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)$$

convergen ambas. ▌

Se sigue del teorema 5 que toda serie convergente de términos positivos puede utilizarse para obtener una infinidad de series convergentes, poniendo sencillamente signos menos al azar. Sin embargo, no todas las series convergentes pueden ser obtenidas de esta manera —existen series que son convergentes, pero no absolutamente convergentes (tales series reciben el nombre de **condicionalmente convergentes**). Para demostrar esta afirmación necesitamos una prueba de convergencia que se aplique específicamente a series con términos positivos y negativos.

TEOREMA 6
(TEOREMA DE LEIBNIZ)

Supóngase que

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0,$$

y que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots$$

converge.

DEMOSTRACIÓN

La figura 3 ilustra las relaciones entre las sumas parciales que vamos a establecer:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots,\\
&(2)\quad s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \cdots,\\
&(3)\quad s_k \leq s_l \quad \text{si } k \text{ es par y } l \text{ impar.}
\end{aligned}$$

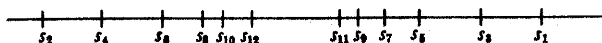


FIGURA 3

Para demostrar las dos primeras desigualdades, obsérvese que

$$\begin{aligned}
(1)\quad s_{2n+2} &= s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n}\\
&\geq s_{2n}, \quad \text{puesto que } a_{2n+1} \geq a_{2n};\\
(2)\quad s_{2n+3} &= s_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3}\\
&\geq s_{2n+1}, \quad \text{puesto que } a_{2n+2} \geq a_{2n+3}.
\end{aligned}$$

Para demostrar la tercera desigualdad, obsérvese primero que

$$\begin{aligned}
s_{2n} &= s_{2n-1} - a_{2n}\\
&\leq s_{2n-1}, \quad \text{al ser } a_{2n} \geq 0.
\end{aligned}$$

Esto demuestra sólo un caso particular de (3), pero en conjunción con (1) y (2), el caso general es fácil: si k es par y l impar, elíjase n tal que

$$2n \geq k \quad \text{y} \quad 2n - 1 \geq l;$$

entonces

$$s_k \leq s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_l,$$

lo cual demuestra (3).

Ahora bien, la sucesión $\{s_{2n}\}$ converge, porque es no decreciente y acotada superiormente (por s_l para cualquier l impar). Sea

$$\alpha = \sup \{s_{2n}\} = \lim_{n\to\infty} s_{2n}.$$

Análogamente, sea

$$\beta = \inf \{s_{2n+1}\} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}.$$

Se sigue de (3) que $\alpha \leq \beta$; al ser

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

se cumple efectivamente que $\alpha = \beta$. Esto demuestra que $\alpha = \beta = \lim_{n\to\infty} s_n$. ▌

El ejemplo típico derivado del teorema 6 es la serie

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \cdots,$$

la cual es convergente, pero *no* absolutamente convergente (ya que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ no converge). Si la suma de esta serie se designa por x, las siguientes manipulaciones llevan a un resultado completamente paradójico:

$$\begin{aligned} x &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots \\ &= 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} + \cdots \end{aligned}$$

(La regla seguida aquí consiste en tomar un término positivo seguido de dos negativos.)

$$\begin{aligned} &= (1 - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}) - \tfrac{1}{8} + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10}) - \tfrac{1}{12} + (\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{14}) - \tfrac{1}{16} \\ &\qquad + \cdots \\ &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} + \cdots \\ &= \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots) \\ &= \tfrac{1}{2}x, \end{aligned}$$

de modo que $x = x/2$, lo cual implica que $x = 0$. Por otra parte, es fácil ver que $x \neq 0$: la suma parcial s_2 es igual a $\tfrac{1}{2}$, y la demostración del teorema de Leibniz indica que $x \geq s_2$.

Esta contradicción obedece a un paso en el cual se da por supuesto que las operaciones válidas para sumas finitas tienen necesariamente operaciones análogas válidas para sumas infinitas. Es verdad que la sucesión

$$\{b_n\} = 1, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{10}, -\tfrac{1}{12}, \cdots$$

contiene todos los números de la sucesión

$$\{a_n\} = 1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{7}, -\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{9}, -\tfrac{1}{10}, \tfrac{1}{11}, -\tfrac{1}{12}, \cdots .$$

Efectivamente, $\{b_n\}$ es una **reordenación** de $\{a_n\}$ en el siguiente sentido preciso: cada $b_n = a_{f(n)}$, donde f es una cierta función que «permuta» los números naturales, es decir, todo número natural n es $f(n)$ para precisamente un n. En nuestro ejemplo,

$f(2m+1) = 3m+1$ (los términos $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots$ van a los lugares 1.°, 4.°, 7.°, $\cdots$),

$f(4m) = 3m$ (los términos $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{12}, \ldots$ van a los lugares 3.°, 6.°, 9.°, $\cdots$),

$f(4m+2) = 3m+2$ (los términos $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{10}, \ldots$ van a los lugares 2.°, 5.°, 8.°, $\cdots$).

No obstante, no existe razón alguna para suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ deba ser igual a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: estas sumas son, por definición, $\lim_{n\to\infty} b_1 + \cdots + b_n$ y $\lim_{n\to\infty} a_1 + \cdots + a_n$, de modo que el orden particular de los términos puede importar. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ no es particular a este respecto; en efecto, su comportamiento es típico de series que no son absolutamente convergentes —el siguiente resultado (en realidad más un gran contraejemplo que un teorema) indica lo desconcertantes que son las series condicionalmente convergentes.

TEOREMA 7

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, pero no converge absolutamente, entonces para cualquier número α existe una reordenación $\{b_n\}$ de $\{a_n\}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ la serie formada con los términos positivos de $\{a_n\}$ y sea $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ la serie de los términos negativos. Se sigue del teorema 4 que por lo menos una de estas series no converge. De hecho, deben dejar de converger las dos, ya que si una de ellas tuviese sumas parciales acotadas, y la otra tuviese sumas parciales no acotadas, entonces la serie original $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tendría también sumas parciales no acotadas, en contradicción con la hipótesis de ser convergente.

Sea ahora α un número cualquiera. Supóngase, para mayor sencillez, que $\alpha > 0$ (la demostración para $\alpha < 0$ será una sencilla modificación). Por ser la serie $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ no convergente, existe un número N tal que

$$\sum_{n=1}^{N} p_n > \alpha.$$

Elegiremos N_1 como el N *más pequeño* con esta propiedad. Esto significa que

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{N_1-1} p_n \leq \alpha,$$

$$\text{pero} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{N_1} p_n > \alpha.$$

Entonces si

$$S_1 = \sum_{n=1}^{N_1} p_n,$$

tenemos

$$S_1 - \alpha \leq p_{N_1}.$$

Esta relación, que queda clara por la figura 4, se sigue inmediatamente de la ecuación (1):

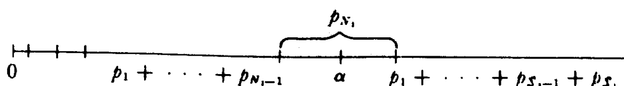


FIGURA 4

$$S_1 - \alpha \leq S_1 - \sum_{n=1}^{N_1-1} p_n = p_{N_1}.$$

A la suma S_1 añadimos ahora precisamente tantos términos negativos como sean necesarios para obtener una nueva suma T_1 que sea menor que α. En otras palabras, elegimos el entero M_1 más pequeño para el cual

$$T_1 = S_1 + \sum_{n=1}^{M_1} q_n < \alpha.$$

Como antes, tenemos

$$\alpha - T_1 \leq -q_{M_1}.$$

Continuamos ahora indefinidamente este procedimiento, obteniendo alternativamente sumas más grandes y más pequeñas que α, eligiendo cada vez el N_k o M_k más pequeño posible. La sucesión

$$p_1, \ldots, p_{N_1}, q_1, \ldots, q_{M_1}, p_{N_1+1}, \ldots, p_{N_2}, \ldots$$

es una reordenación de $\{a_n\}$. Las sumas parciales de esta reordenación aumentan hasta S_1, después decrecen hasta T_1, después crecen hasta S_2, después decrecen hasta T_2, etc. Para completar la demostración observaremos simplemente que $|S_k - \alpha|$ y $|T_k - \alpha|$ son menores o iguales que p_{N_k} o $-q_{M_k}$, respectivamente y que estos términos, al ser miembros de la sucesión original $\{a_n\}$, deben decrecer hacia 0, puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ▌

Junto con el teorema 7, el teorema próximo establece definitivamente la distinción entre series condicionalmente convergentes y absolutamente convergentes.

TEOREMA 8

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, y $\{b_n\}$ es una reordenación cualquiera de $\{a_n\}$,

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también converge (absolutamente), y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

DEMOSTRACIÓN

Designemos por s_n las sumas parciales de $\{a_n\}$ y por t_n las de $\{b_n\}$.

Supóngase que $\varepsilon > 0$. Al ser $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, existe algún N tal que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_N \right| < \varepsilon.$$

Además, al ser $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergente, podemos también elegir N tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - (|a_1| + \cdots + |a_N|) < \varepsilon,$$

es decir, tal que

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots < \varepsilon.$$

Elijamos ahora M tan grande que cada uno de los $a_1, \ldots, a_N$ aparezca entre los $b_1, \ldots, b_M$. Entonces siempre que sea $m > M$, la diferencia $t_m - s_N$ es la suma de ciertos a_i, donde $a_1, \ldots, a_N$ *quedan definitivamente excluidos*. En consecuencia,

$$|t_m - s_N| \leq |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots.$$

Así pues, si $m > M$, entonces

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - t_m \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_N + t_m - s_N \right|$$

$$\leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_N \right| + |t_m - s_N|$$
$$< \varepsilon + \varepsilon.$$

Al cumplirse esto para todo $\varepsilon > 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge hacia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Para demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolutamente, obsérvese que $\{|b_n|\}$ es una reordenación de $\{|a_n|\}$. Al converger absolutamente $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ converge por la primera parte del teorema. ▮

La convergencia absoluta es también importante cuando de lo que se trata es de multiplicar dos series infinitas. A diferencia de lo que ocurre con la suma, para la que se tiene la simple fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n),$$

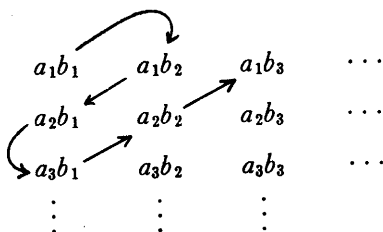
no existe un análogo tan sencillo para el producto

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = (a_1 + a_2 + \cdots) \cdot (b_1 + b_2 + \cdots).$$

Parece que tendríamos que sumar todos los productos $a_i b_j$. La dificultad estriba en que estos constituyen no una sucesión, sino un arreglo bidimensional:

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

No obstante, los elementos de este arreglo se pueden ordenar para que formen una sucesión. La figura que sigue ilustra una de las infinitas maneras de hacerlo:



Supóngase que $\{c_n\}$ es una sucesión de este tipo, que contiene exactamente una vez cada uno de los productos a_ib_j. Podríamos esperar entonces ingenuamente que se tuviera

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Esto sin embargo *no es así* (véase el problema 8) lo cual tampoco es mucho de extrañar ya que nada hemos dicho de la manera según la que se han ordenado los términos. El teorema que sigue demuestra que el resultado es válido siempre que la específica ordenación de los términos sea irrelevante.

TEOREMA 9

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen absolutamente y $\{c_n\}$ es una sucesión cualquiera que contiene los productos a_ib_j para cada par (i, j), entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

DEMOSTRACIÓN

Obsérvese en primer lugar que la sucesión

$$p_L = \sum_{i=1}^{L} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{L} |b_j|$$

converge, ya que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son absolutamente convergentes y el límite de un producto es el producto de los límites. Así pues $\{p_L\}$ es una sucesión de Cauchy, lo cual quiere decir que para cualquier $\varepsilon > 0$, si L y L' son suficientemente gran-

des, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{L'} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{L'} |b_j| - \sum_{i=1}^{L} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{L} |b_j| \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se sigue que

$$(1) \qquad \sum_{i,j>L} |a_i| \cdot |b_j| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Supóngase ahora que N es un número cualquiera lo suficientemente grande como para que los términos c_n con $n \leq N$ incluyan a cada término a_ib_j, con $i, j \leq L$. Entonces la diferencia

$$\sum_{n=1}^{N} c_n - \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j$$

está formada por términos a_ib_j con $i,j > L$, de modo que

$$(2) \qquad \left| \sum_{n=1}^{N} c_n - \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j \right| \leq \sum_{i,j>L} |a_i| \cdot |b_j| < \varepsilon \quad \text{por (1).}$$

Pero habida cuenta que el límite de un producto es el producto de los límites, tenemos también

$$(3) \qquad \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j - \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j \right| < \varepsilon$$

para un L suficientemente grande. En consecuencia, si tomamos L, y después N, suficientemente grandes, tendremos

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j - \sum_{i=1}^{N} c_n \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j - \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j \right| + \left| \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j - \sum_{n=1}^{N} c_n \right| < 2\varepsilon \text{ por (2) y (3)}$$

lo cual demuestra el teorema. ▌

Este resultado nos dice algo en relación con los valores que toman las sumas,

a diferencia de los teoremas anteriores que sólo hacían referencia a la sumabilidad. Hablando de un modo general, no existe razón alguna para suponer que una suma infinita dada pueda «calcularse» en términos sencillos. Sin embargo, muchas expresiones sencillas pueden igualarse a sumas infinitas utilizando el teorema de Taylor. El capítulo 19 ofrece muchos ejemplos de funciones para las cuales

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + R_{n,a}(x),$$

donde $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$. Esto equivale precisamente a

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i,$$

lo cual significa a su vez que

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Como ejemplos particulares tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \\
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \\
\operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad |x| \le 1, \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots, \quad -1 < x \le 1.
\end{aligned}$$

(Obsérvese que las series para arctg x y $\log(1+x)$ ni siquiera convergen para $|x| > 1$; además, cuando $x = -1$, la serie para $\log(1+x)$ se convierte en

$$-1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \cdots$$

la cual no converge).

Se obtienen algunos resultados bastante impresionantes al dar valores particulares a x:

$$0 = \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \cdots,$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots,$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

Se pueden anticipar desarrollos más significativos si comparamos las series para sen x y cos x con algo más de cuidado. La serie para cos x es precisamente la que hubiésemos obtenido si, llevados de nuestro entusiasmo, hubiésemos derivado término a término ambos miembros de la ecuación

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

olvidando el hecho de que nunca hemos demostrado nada acerca de derivadas de sumas infinitas. Del mismo modo, si derivamos ambos lados de la fórmula para cos x formalmente (es decir, sin justificación), obtenemos la fórmula para $\cos'(x) = -\operatorname{sen} x$, y si derivamos la fórmula para e^x obtenemos $\exp'(x) = \exp(x)$. En el próximo capítulo veremos que tal derivación término a término de sumas infinitas es efectivamente válido en ciertos casos importantes.

PROBLEMAS

1. Decidir si son convergentes o divergentes cada una de las siguientes series infinitas. Los instrumentos que se necesitarán son el teorema de Leibniz y las pruebas de comparación, del cociente, y de la integral. Unos pocos ejemplos han sido elegidos intencionadamente con malicia; dos series de aspecto muy parecido pueden requerir pruebas diferentes (y también puede no ser así). La indicación que sigue dice qué pruebas pueden usarse.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\theta}{n^2}$.

(ii) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$.

(iii) $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \cdots$.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$.

(v) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 - 1}}$. (La suma empieza con $n = 2$ sencillamente para evitar el término sin sentido que se obtiene para $n = 1$.)

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}$.

(vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

(viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$.

(ix) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$.

(x) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^k}$.

(xi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$.

(xii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\log n)^n}$.

(xiii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$.

(xiv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$.

(xv) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}.$

(xvi) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}.$

(xvii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(\log n)}.$

(xviii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$

(xix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$

(xx) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$

Indicación: Aplíquese la prueba de comparación para (i), (ii), (v), (vi), (ix), (x), (xi), (xiii), (xiv), (xvii); la prueba del cociente para (vii), (xviii), (xix), (xx); la prueba de la integral para (viii), (xv), (xvi).

Los dos problemas siguientes examinan, con indicaciones, algunas series infinitas que requieren análisis más delicados que los del problema 1.

***2.** (a) Si se ha conseguido resolver los ejemplos (xix) y (xx) del problema 1, habrá quedado claro que $\sum_{n=1}^{\infty} a^n n!/n^n$ converge para $a < e$ y diverge para $a > e$. Para $a = e$ la prueba del cociente falla; demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} e^n n!/n^n$ en realidad diverge, aplicando el problema 21-13.

(b) Decidir cuándo converge $\sum_{n=1}^{\infty} n^n/a^n n!$ recurriendo de nuevo al problema 21-13 cuando falle la prueba del cociente.

*3. El problema 1 presentó las dos series $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-k}$ y $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-n}$, de las cuales la primera diverge mientras que la segunda converge. La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}},$$

que está entre estas dos, se analiza en las partes (a) y (b).

(a) Demostrar que $\int_0^{\infty} e^y/y^y\, dy$ existe, considerando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (e/n)^n$.

(b) Demostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$

converge, aplicando la prueba de la integral. Indicación: Utilizar una sustitución adecuada y la parte (a).

(c) Demostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log(\log n)}}$$

diverge, aplicando la prueba de la integral. Indicación: Utilizar la misma sustitución que en la parte (b), y demostrar directamente que la integral resultante diverge.

4. Decidir si converge o no converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$.

5. (a) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de enteros con $0 \le a_n \le 9$. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ existe (y está entre 0 y 1). (Éste es, por supuesto, el número que por lo general designamos por $0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$).

(b) Supóngase que $0 \le x \le 1$. Demostrar que existe una sucesión de ente-

ros $\{a_n\}$ con $0 \leq a_n \leq 9$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} = x$. Indicación: Por ejemplo, $a_1 = [10x]$ (donde $[y]$ designa el mayor entero que es $\leq y$).

(c) Demostrar que si $\{a_n\}$ se repite, es decir, es de la forma $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, a_2, \ldots$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ es un número racional (y hallarlo). El mismo resultado se cumple naturalmente si $\{a_n\}$ se repite eventualmente, es decir, si la sucesión $\{a_{N+k}\}$ se repite para algún N.

(d) Demostrar que si $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ es racional, entonces $\{a_n\}$ se repite eventualmente. (Basta observar el proceso de hallar el desarrollo decimal de p/q, dividiendo p por q mediante división larga.)

6. Supóngase que $\{a_n\}$ satisface la hipótesis del teorema de Leibniz. Utilizar la demostración del teorema de Leibniz para obtener la estimación siguiente:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n - [a_1 - a_2 + \cdots \pm a_N] \right| < a_N.$$

7. Demostrar que si $a_n \geq 0$ y $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $r < 1$, diverge si $r > 1$. (La demostración es muy parecida a la de la prueba del cociente). Este resultado se conoce como «prueba de la raíz». Es fácil construir series para las cuales falla la prueba del cociente, mientras que da resultado la prueba de la raíz. Por ejemplo, la prueba de la raíz indica que la serie

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{3})^3 + \cdots$$

converge, aun cuando los cocientes de términos sucesivos no tienden hacia ningún límite. La mayor parte de los ejemplos son de este tipo bastante artificial, pero la prueba de la raíz es, no obstante, un instrumento teórico muy importante, y si la prueba del cociente da resultado, también lo da la prueba de la raíz (según el problema 21-18). Es posible eliminar límites de la prueba de la raíz; una sencilla modificación de la demostración indica

que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si existe algún $s < 1$ tal que todos los $\sqrt[n]{a_n}$ excepto un número finito son $\leq s$, y que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si existe un número infinito de $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$. Este resultado se conoce como «prueba fina de la raíz» (existe análogamente una prueba fina del cociente). Se sigue, utilizando la notación del problema 21-27, que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1$ y diverge si $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$; no se saca ninguna conclusión si $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

8. Para dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, sea $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$. (Entonces c_n es la suma de los términos de la diagonal n-ésima del cuadro de la página 664.) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ recibe el nombre de *producto de Cauchy* de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Si $a_n = b_n = (-1)^n \sqrt{n}$, demostrar que $|c_n| \geq 1$, de modo que el producto de Cauchy no converge.

9. Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es **sumable Cesaro,** y que la suma de Cesaro es l si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = l$$

(donde $s_k = a_1 + \ldots + a_k$). El problema 21-16 indica que una sucesión sumable es automáticamente sumable Cesaro, y que su suma es igual a su suma de Cesaro. Hallar una sucesión que *no* sea sumable, pero que *sea* sumable Cesaro.

10. Supóngase que $a_n > 0$ y que $\{a_n\}$ es sumable Cesaro. Supóngase también que es acotada la sucesión $\{na_n\}$. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Ayuda: Si $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ y $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i$, demostrar que $s_n - \frac{n}{n+1} \sigma_n$ está acotado.

11. Este problema da a grandes rasgos una demostración alternativa del teorema 8 no basada en el criterio de Cauchy.

(a) Supóngase que $a_n \geq 0$ para cada n. Sea $\{b_n\}$ una reordenación de $\{a_n\}$, y sea $s_n = a_1 + \dots + a_n$ y $t_n = b_1 + \dots + b_n$. Demostrar que para cada n existe algún m con $s_n \leq t_m$.

(b) Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(c) Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(d) Sustituir ahora la condición $a_n \geq 0$ por la hipótesis de que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, utilizando la segunda parte del teorema 5.

12. (a) Demostrar que si $\sum_{n=1} a_n$ converge absolutamente, y $\{b_n\}$ es una subsucesión cualquiera de $\{a_n\}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge (absolutamente).

(b) Demostrar que esto es falso si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge absolutamente.

*(c) Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) + (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots).$$

13. Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

*14. El problema 18-55 indica que $\int_0^{\infty} (\operatorname{sen} x)/x \, dx$ converge. Demostrar que $\int_0^{\infty} |(\operatorname{sen} x)/x| \, dx$ diverge.

*15. Hallar una función f con $f(x) \geq 0$ para todo x, tal que $\int_0^{\infty} f(x) \, dx$ existe, pero no existe $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

***16.** Sea $f(x) = x$ sen $1/x$ para $0 < x \leq 1$, y sea $f(0) = 0$. Recuérdese la definición de $\ell(f, P)$ del problema 13-26. Demostrar que el conjunto de todos los $\ell(f, P)$, siendo P una partición de $[0, 1]$ no es acotado (así pues, f tiene una «longitud infinita»). Indicación: Pruébense particiones de la forma

$$P = \left\{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{2(n-1)}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

17. Sea f la función indicada en la figura 5. Hallar $\int_0^1 f$, y también el área de la región sombreada de la figura 5.

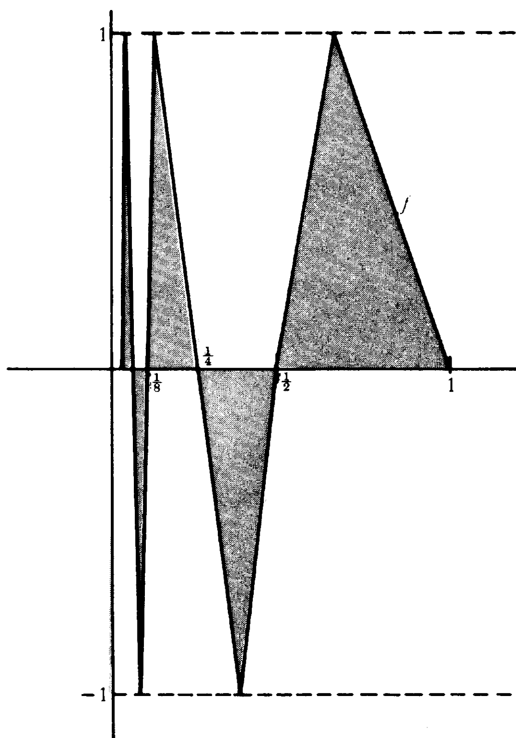


FIGURA 5

***18.** En este problema vamos a establecer la «serie binomial»

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad |x| < 1,$$

para un α cualquiera, demostrando que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$. La demostración consta de varios pasos, y utiliza las formas de Cauchy y de Lagrange halladas en el problema 19-7.

(a) Utilizar la prueba del cociente para demostrar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} r^k$ efectivamente converge para $|r| < 1$ (esto no equivale necesariamente a decir que converge hacia $(1+r)^\alpha$). Se sigue en particular que $\lim_{n\to\infty} \binom{\alpha}{n} r^n = 0$ para $|r| < 1$.

(b) Supóngase primero que $0 \leq x < 1$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$, utilizando la forma de Lagrange del resto, y observando que $(1+t)^{\alpha-n-1} \leq 1$ para $n+1 > \alpha$.

(c) Supóngase ahora que $-1 < x < 0$; el número t en la forma del resto de Cauchy satisface $-1 < x < t \leq 0$. Demostrar que

$$|x(1+t)^{\alpha-1}| \leq |x|M, \quad \text{donde } M = \max(1, (1+x)^{\alpha-1}),$$

y

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| = |x|\left(\frac{1-t/x}{1+t}\right) \leq |x|.$$

Utilizando la forma del resto de Cauchy, y el hecho de que

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} = \alpha\binom{\alpha-1}{n},$$

demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$.

19. (a) Supóngase que las sumas parciales de la sucesión $\{a_n\}$ son acotadas, y que $\{b_n\}$ es una sucesión decreciente con $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. Se conoce esto con el nombre de *prueba de Dirichlet.*

Ayuda: Aplicar el lema de Abel (problema 18-48) para verificar el criterio de Cauchy.

(b) Deducir de este resultado el teorema de Leibniz.

(c) Demostrar, utilizando el problema 15-33, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos nx)/n$ converge si x no es de la forma $2k\pi$ para un entero k (en cuyo caso claramente diverge).

(d) Demostrar la *prueba de Abel*: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\{b_n\}$ es una sucesión o bien no creciente o bien no decreciente y además acotada, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. Ayuda: Considerar $b_n - b$, siendo $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.

***20.** Supóngase que $\{a_n\}$ es decreciente y que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ también converge («el teorema de condensación de Cauchy»). Obsérvese que la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ es un caso particular, pues si $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ convergiera, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n(1/2^n)$ también convergería; esta observación puede servir de ayuda.

***21.** (a) Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n{}^2$ convergen, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

(b) Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ converge para todo $\alpha > \frac{1}{2}$.

***22.** Supóngase que $\{a_n\}$ es decreciente siendo cada $a_n \geq 0$. Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Indicación: Escríbase el criterio de Cauchy y utilícese el hecho de que $\{a_n\}$ es decreciente.

***23.** Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces las sumas parciales s_n son acotadas, y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Se está tentado a conjeturar que la acotación de las sumas parciales, junto con la condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Esto *no* es verdad, pero para hallar un contraejemplo hace falta algo de ingenio. Como ayuda, obsérvese que alguna *subsucesión* de las sumas parciales tendrá que converger; de alguna manera habrá que conseguir esto sin dejar que la sucesión misma converja.

24. Demostrar que si $a_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, también diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$. Ayuda: Comparar las sumas parciales. ¿Vale la recíproca?

25. Sea $b_n > 0$. Decimos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge* si la sucesión $p_n = \prod_{i=1}^{n} b_i$ converge.

(a) Demostrar que si $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ converge, entonces a_n tiende hacia 0.

(b) Demostrar que $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ converge si y sólo si converge $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$.

(c) Demostrar que $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ converge si y sólo si converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ayuda: Para una de las implicaciones aplicar el problema 24 y para la implicación recíproca hacer una simple estimación de $\log(1 + a)$.

26. (a) Calcular $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

(b) Calcular $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2n})$ para $|x| < 1$.

27. La divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ es una consecuencia particular del siguiente hecho destacable: Cualquier número racional positivo x puede escribirse como suma *finita* de números *distintos* de la forma $1/n$. La idea de la demostración la tenemos en el siguiente cálculo para 19/15: Puesto que

$$\frac{19}{15} - \frac{1}{2} = \frac{23}{30}$$
$$\frac{23}{30} - \frac{1}{3} = \frac{13}{30}$$
$$\frac{13}{30} - \frac{1}{4} = \frac{11}{60}$$
$$\frac{11}{60} < \frac{1}{5}$$
$$\frac{11}{60} - \frac{1}{6} = \frac{1}{60}$$

tenemos

$$\frac{19}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{60}.$$

Obsérvese que los numeradores 23, 13, 11, 1 son decrecientes.

(a) Demostrar que si $1/n < x < 1/(n + 1)$ para algún n, entonces el numerador en este tipo de cálculo tiene que ser siempre decreciente; concluir que x puede expresarse como suma finita de números distintos $1/k$.

(b) Demostrar ahora el resultado para un x cualquiera utilizando la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$.

CAPÍTULO

23

CONVERGENCIA UNIFORME Y SERIES DE POTENCIAS

Las consideraciones del final del capítulo anterior sugieren una manera completamente nueva de considerar las series infinitas. Nuestra atención se trasladará ahora de las sumas infinitas particulares a ecuaciones tales como

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

referentes a sumas de cantidades que dependen de x. En otras palabras, estamos interesados en *funciones* definidas mediante ecuaciones de la forma

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

[en el capítulo anterior $f_n(x) = x^{n-1}/(n-1)!$]. En tal situación $\{f_n\}$ será cierta sucesión de funciones; para cada x obtenemos una sucesión de números $\{f_n(x)\}$, y $f(x)$ es la suma de esta sucesión. Para analizar tales funciones hará falta ciertamente recordar que cada suma

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

es, por definición, el límite de la sucesión

$$f_1(x),\ f_1(x) + f_2(x),\ f_1(x) + f_2(x) + f_3(x),\ \ldots .$$

Si definimos una nueva sucesión de funciones $\{s_n\}$ mediante

$$s_n = f_1 + \cdots + f_n,$$

entonces podemos expresar más sucintamente este hecho escribiendo

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x).$$

Por algún tiempo nos concentraremos, por lo tanto, en funciones definidas como límites,

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x),$$

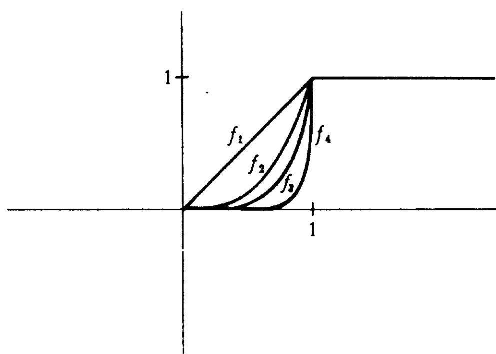


FIGURA 1

más bien que en funciones definidas como sumas infinitas. Todos los resultados acerca de tales funciones pueden resumirse muy fácilmente: nada de lo que era de esperar que se cumpliera, se cumple en realidad; disponemos, por el contrario, de una espléndida colección de contraejemplos. El primero de éstos indica que aun siendo continua cada f_n, puede no serlo la función f. Contrariamente a lo que se podría esperar, las funciones f_n serán muy sencillas. La figura 1 muestra las gráficas de las funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Estas funciones son todas continuas, pero la función $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ no es continua; en efecto,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Otro ejemplo de este mismo fenómeno se ilustra en la figura 2; las funciones f_n están definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -\dfrac{1}{n} \\ nx, & -\dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 1, & \dfrac{1}{n} \leq x. \end{cases}$$

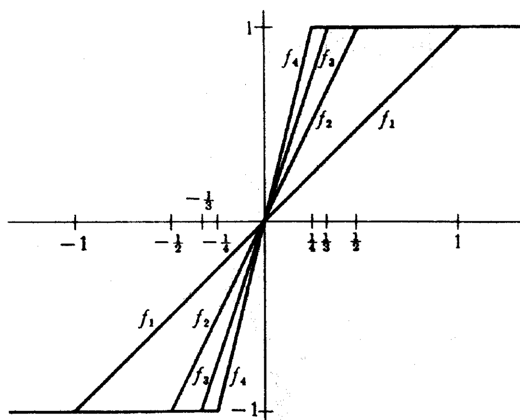


FIGURA 2

En este caso, si $x < 0$, entonces $f_n(x)$ es eventualmente (es decir, para n suficientemente grande) igual a -1, y si $x > 0$, entonces $f_n(x)$ es eventualmente 1, mientras que $f_n(0) = 0$ para todo n. Así pues,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0; \end{cases}$$

de modo que, una vez más, la función $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ no es continua.

Redondeando las esquinas en los ejemplos anteriores es incluso posible construir una sucesión de funciones *derivables* $\{f_n\}$ para las cuales la función $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ no es continua. Tal sucesión es fácil de definir explícitamente:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -\dfrac{1}{n} \\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{2}\right), & -\dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 1, & \dfrac{1}{n} \leq x. \end{cases}$$

Estas funciones son derivables (figura 3), pero todavía tenemos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

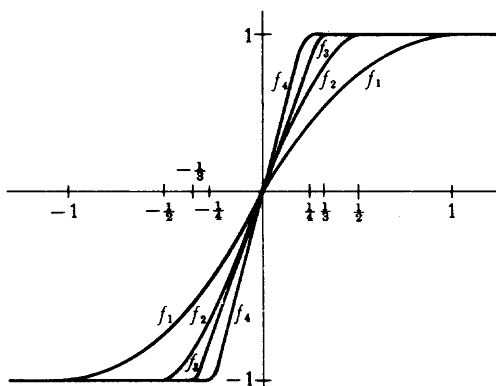


FIGURA 3

La continuidad y la derivabilidad no son, además, las únicas propiedades para las cuales se presentan problemas. Otra dificultad es ilustrada por la sucesión $\{f_n\}$ indicada en la figura 4; sobre el intervalo $[0, 1/n]$ la gráfica de f_n forma un triángulo isósceles de altura n, mientras que $f_n(x) = 0$ para $x \geq 1/n$. Estas funciones pueden definirse explícitamente como sigue:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2x, & \dfrac{1}{2n} \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0, & \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

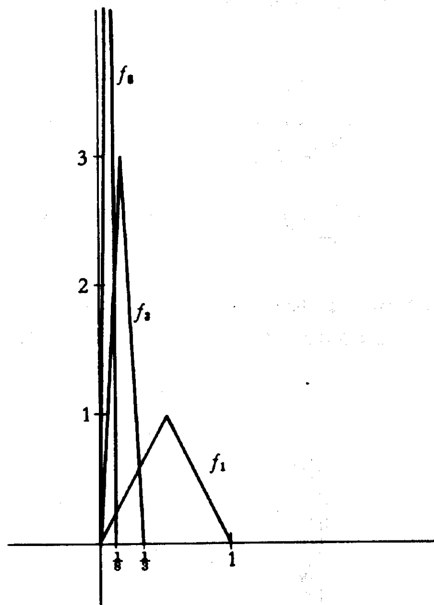


FIGURA 4

Al variar esta sucesión de manera tan errática en la proximidad de 0, nuestros instintos matemáticos primitivos podrían sugerirnos que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ no siempre existe. No obstante, este límite existe para todo x, y la función $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ es incluso continua. Efectivamente, si $x > 0$, entonces $f_n(x)$ es eventualmente 0, de modo que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$; además, $f_n(0) = 0$ para todo n, de modo que tenemos ciertamente $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. En otras palabras, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo x. Por otra parte, la integral revela rápidamente el comportamiento extraño de esta sucesión; tenemos

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \tfrac{1}{2},$$

pero

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Así pues,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Esta sucesión particular de funciones se comporta de manera que nunca hubiésemos podido imaginar cuando empezamos a considerar funciones definidas por límites. Si bien es verdad que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{para cada } x \text{ de } [0, 1],$$

las gráficas de las funciones f_n no se «acercan» a la gráfica de f en el sentido de estar próximas a ella; si, como en la figura 5, dibujamos una banda alrededor

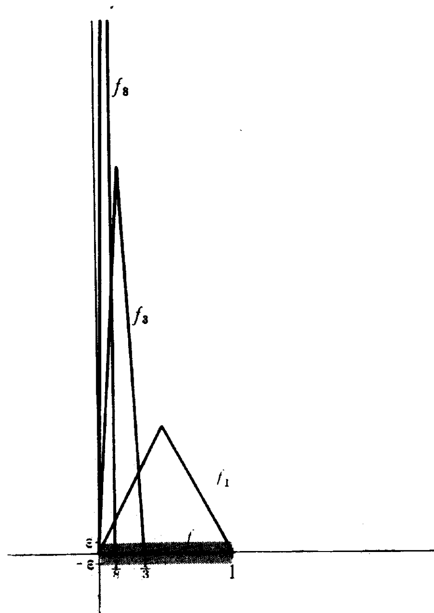


FIGURA 5

de f de anchura total 2ε (dando una anchura de ε por encima y por debajo), entonces las gráficas de f_n no quedan completamente dentro de esta banda, por grande que hagamos n. Por supuesto, para cada x existe algún N tal que el punto $(x, f_n(x))$ queda dentro de esta banda para $n > N$; esta afirmación equivale al hecho de que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Pero hace falta elegir unos N cada vez más grandes a medida que elegimos los x más próximos a 0, y no habrá ningún N que dé resultado para todos los x a la vez.

La misma situación se presenta en realidad, aunque no tan descaradamente, para cada uno de los otros ejemplos dados anteriormente. La figura 6 ilustra este punto para la sucesión

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

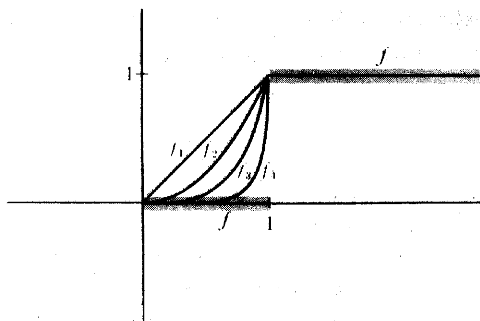


FIGURA 6

Se ha trazado una banda de anchura total 2ε a lo largo de la gráfica de $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, esta banda se compone de dos partes, las cuales no contienen ningún punto con segunda coordenada igual a $\frac{1}{2}$; puesto que cada una de las funciones f_n toma el valor $\frac{1}{2}$, la gráfica de cada f_n deja de estar dentro de esta banda. Una vez más, para cada punto x existe algún N tal que $(x, f_n(x))$ queda dentro de esta banda para $n > N$; pero no es posible elegir un N que dé resultado a la vez para todos los x.

Es fácil comprobar que la misma situación exactamente se presenta para cada uno de los demás ejemplos. En cada caso tenemos una función f, y una sucesión de funciones $\{f_n\}$, definidas todas sobre algún conjunto A, tales que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{para todo } x \text{ de } A.$$

Esto significa que

para todo $\varepsilon > 0$, y para todo x de A, existe algún N tal que si $n > N$, entonces $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Pero en cada caso deben elegirse unos N distintos para distintos x, y *no* se cumple que

para todo $\varepsilon > 0$ existe algún N tal que para todo x de A, si $n > N$, entonces $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Aunque esta condición difiere solamente de la primera en un pequeño desplazamiento de la frase «para todo x de A», tiene un significado completamente distinto. Si una sucesión $\{f_n\}$ satisface esta segunda condición, entonces las gráficas de f_n quedan eventualmente próximas a la gráfica de f, según queda ilustrado en la figura 7. Esta condición resulta ser precisamente la que hace posible el estudio de las funciones límite.

DEFINICIÓN

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas sobre A, y sea f una función también definida sobre A. Entonces f recibe el nombre de **límite uniforme de** $\{f_n\}$ **sobre** A si para todo $\varepsilon > 0$ existe algún N tal que para todo x de A,

$$\text{si } n > N, \text{ entonces } |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Decimos también que $\{f_n\}$ **converge uniformemente hacia** f **sobre** A, o que f_n **tiende hacia** f **uniformemente sobre** A.

Como contraste con esta definición, si solamente sabemos que

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad \text{para todo } x \text{ de } A,$$

entonces decimos que $\{f_n\}$ **converge puntualmente hacia** f **sobre** A. Evidentemente, la convergencia uniforme implica la convergencia puntual (pero no recíprocamente).

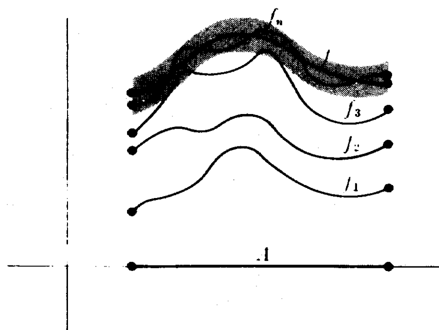


FIGURA 7

No es difícil reunir evidencia acerca de la utilidad de la convergencia uniforme. Las integrales representan un tema particularmente fácil; por la figura 7 resulta casi evidente que si $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f, entonces la integral de f_n puede hacerse tan próxima como se quiera a la integral de f. Expresado con más precisión, tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 1

Supóngase que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones integrables sobre $[a, b]$ y que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre $[a, b]$ hacia una función f que es integrable sobre $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $\varepsilon > 0$. Existe algún N tal que para todo $n > N$ tenemos

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \text{ de } [a, b].$$

Así pues, si $n > N$ tenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b [f(x) - f_n(x)]\,dx\right| \\ &\le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \\ &\le \int_a^b \varepsilon\,dx \\ &= \varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

Al cumplirse esto para todo $\varepsilon > 0$, se sigue que

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n. \blacksquare$$

Solamente algo más difícil resulta el tratamiento de la continuidad, el cual supone un «razonamiento $\varepsilon/3$», una estimación en tres pasos de $|f(x) - f(x+h)|$. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente hacia f, entonces existe algún n tal que

$$(1) \quad |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$(2) \quad |f(x+h) - f_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Además, al ser f_n continua, para h suficientemente pequeño tenemos

$$(3) \quad |f_n(x) - f_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Se seguirá de (1), (2) y (3) que $|f(x) - f(x+h)| < \varepsilon$. Para obtener (3), debemos restringir, sin embargo, el tamaño de $|h|$ en un modo que no puede predecirse hasta una vez elegido n; es por lo tanto completamente esencial que exista algún n fijo que haga que se cumpla (2), por pequeño que sea $|h|$; es precisamente en este punto donde entra en la demostración la convergencia uniforme.

TEOREMA 2

Supóngase que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas sobre $[a, b]$ y que $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f sobre $[a, b]$. Entonces f es también continua sobre $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN

Para todo x de $[a, b]$ debemos demostrar que f es continua en x. Trataremos solamente el caso en que x está en (a, b); los casos $x = a$ y $x = b$ requieren las sencillas modificaciones usuales.

Sea $\varepsilon > 0$. Al converger $\{f_n\}$ uniformemente hacia f sobre $[a, b]$, existe algún n tal que

$$|f(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para todo } y \text{ de } [a, b].$$

En particular, para todo h tal que $x + h$ está en $[a, b]$, tenemos

$$(1) \quad |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$(2) \quad |f(x + h) - f_n(x + h)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ahora bien, f_n es continua, de modo que existe algún $\delta > 0$ tal que para $|h| < \delta$ tenemos

$$(3) \quad |f_n(x) - f_n(x + h)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Así pues, si $|h| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} &|f(x + h) - f(x)| \\ &\quad = |f(x + h) - f_n(x + h) + f_n(x + h) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\quad \leq |f(x + h) - f_n(x + h)| + |f_n(x + h) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\quad < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\quad = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que f es continua en x. ▌

Después de los dos notables éxitos ofrecidos por los teoremas 1 y 2, el asunto de la derivabilidad resulta muy decepcionante. Si cada f_n es derivable, y si $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f, todavía no se cumple necesariamente que f sea derivable. Por ejemplo, la figura 8 indica que existe una sucesión de funciones derivables $\{f_n\}$ que converge uniformemente hacia la función $f(x) = |x|$. Aunque *sea* f derivable, puede no ser verdad que

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x);$$

Esto no es en ningún modo sorprendente si tenemos en cuenta que una función

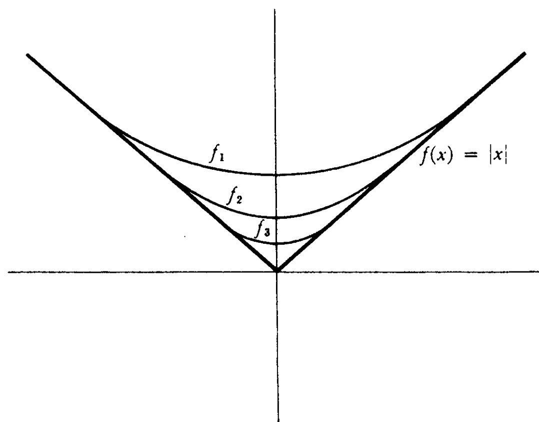


FIGURA 8

suave puede ser aproximada por funciones de oscilación muy rápida. Por ejemplo (figura 9), si

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(n^2x),$$

entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia la función $f(x) = 0$, pero

$$f_n'(x) = n\cos(n^2x),$$

y $\lim_{n\to\infty} n\cos(n^2x)$ no existe siempre (por ejemplo, no existe si $x = 0$).

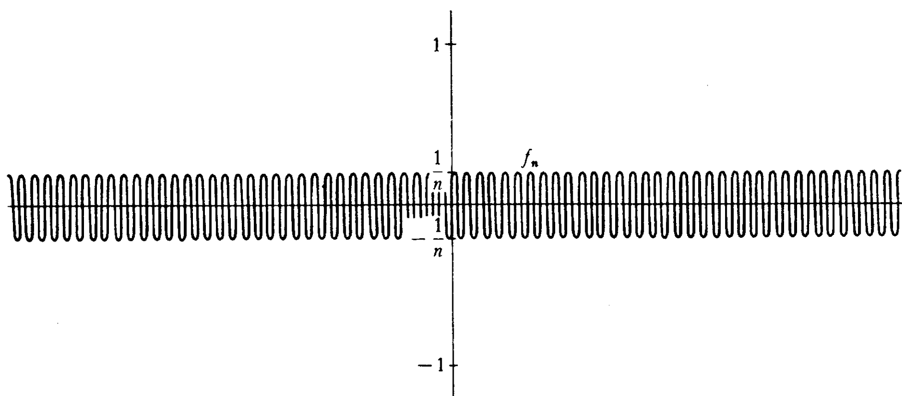


FIGURA 9

A pesar de estos ejemplos, el teorema fundamental del cálculo infinitesimal garantiza prácticamente que se podrá deducir del teorema 1 algún tipo de teorema acerca de derivadas; la hipótesis crucial es que $\{f_n'\}$ converja uniformemente (hacia *alguna* función continua).

TEOREMA 3

Supóngase que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones derivables sobre $[a, b]$, y que $\{f_n\}$ converja (puntualmente) hacia f. Supóngase, además, que $\{f_n'\}$ converja uniformemente sobre $[a, b]$ hacia alguna función continua g. Entonces f es derivable y

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

DEMOSTRACIÓN

Aplicando el teorema 1 al intervalo $[a, x]$, vemos que para todo x se tiene

$$\begin{aligned}\int_a^x g &= \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n' \\ &= \lim_{n\to\infty} [f_n(x) - f_n(a)] \\ &= f(x) - f(a).\end{aligned}$$

Al ser g continua, se sigue que $f'(x) = g(x) = \lim_{x\to\infty} f_n(x)$ para todo x del intervalo $[a, b]$. ▮

Una vez establecidos ahora los hechos fundamentales acerca de los límites uniformes, resulta claro cómo tratar las funciones definidas como sumas infinitas,

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots.$$

Esta ecuación significa que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_1(x) + \cdots + f_n(x),$$

nuestros teoremas anteriores son aplicables cuando la nueva sucesión

$$f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, \ldots$$

converge uniformemente hacia f. Puesto que éste es el único caso que va a ser de interés para nosotros, lo destacamos con una definición.

DEFINICIÓN

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge uniformemente** (con más formalidad: la sucesión $\{f_n\}$ es **uniformemente sumable) hacia** f **sobre** a, si la sucesión

$$f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, \ . \ . \ .$$

converge uniformemente hacia f sobre A.

Podemos aplicar ahora cada uno de los teoremas 1, 2 y 3 a series uniformemente convergentes; los resultados pueden enunciarse en un corolario común.

COROLARIO

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniformemente convergente hacia f sobre $[a, b]$.

(1) Si cada f_n es continua sobre $[a, b]$, entonces f es continua sobre $[a, b]$.
(2) Si f y cada f_n son integrables sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Además, si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge (puntualmente) hacia f sobre $[a, b]$, y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente sobre $[a, b]$ hacia alguna función continua, entonces

$$(3) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \text{ para todo } x \text{ de } [a, b].$$

DEMOSTRACIÓN

(1) Si cada f_n es continua, entonces también lo es cada $f_1 + \ldots + f_n$, y f es el límite uniforme de la sucesión f_1, $f_1 + f_2$, $f_1 + f_2 + f_3$, ..., de modo que f es continua según el teorema 2.

(2) Puesto que $f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, \ldots$, converge uniformemente hacia f, se sigue del teorema 1 que

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_1 + \cdots + f_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_1 + \cdots + \int_a^b f_n\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.\end{aligned}$$

(3) Cada función $f_1 + \ldots + f_n$ es derivable, con derivada $f_1' + \ldots + f_n'$, y $f_1', f_1' + f_2', f_1' + f_2' + f_3', \ldots$, converge por hipótesis uniformemente hacia una función continua. Se sigue del teorema 3 que

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{n\to\infty} [f_1'(x) + \cdots + f_n'(x)]\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x). \ \blacksquare\end{aligned}$$

Por el momento este corolario no resulta muy útil, puesto que parece muy difícil predecir cuándo la sucesión $f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, \ldots$, va a converger uniformemente. La condición más importante que asegura tal convergencia uniforme es ofrecida por el siguiente teorema; la demostración resulta ser casi una trivialidad debido al ingenio con que han sido elegidas las muy sencillas hipótesis.

TEOREMA 4
(PRUEBA M DE WEIERSTRASS)

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas sobre A, y supóngase que $\{M_n\}$ es una sucesión de números tales que

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \text{para todo } x \text{ de } A.$$

Supóngase, además, que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converja. Entonces para todo x de A la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (de hecho, converge absolutamente), y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge unifor-

memente sobre A hacia la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

DEMOSTRACIÓN

Para cada x de A la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge, según la prueba de comparación; en consecuencia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (absolutamente). Además, para todo x de A tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - [f_1(x) + \cdots + f_n(x)]| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n. \end{aligned}$$

Al ser $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergente, el número $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, eligiendo N suficientemente grande. ▌

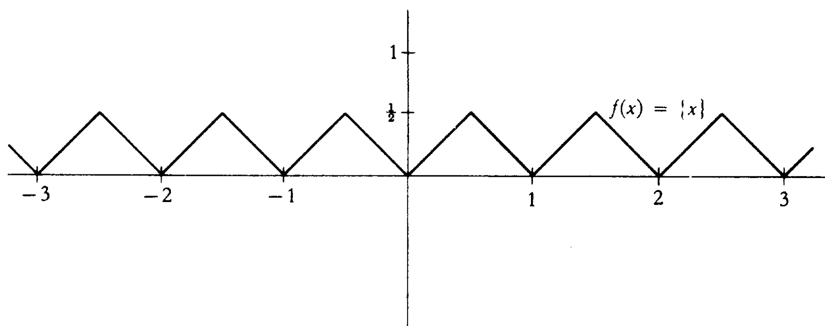


FIGURA 10

La siguiente sucesión $\{f_n\}$ ilustra una aplicación sencilla de la prueba M de Weierstrass. Sea $\{x\}$ la distancia de x al entero más próximo (la gráfica de $f(x)=\{x\}$ puede verse en la figura 10). Defínase ahora

$$f_n(x) = \frac{1}{10^n}\{10^n x\}.$$

Las funciones f_1 y f_2 pueden verse en la figura 11 (pero para simplificar los dibujos, se ha sustituido 10^n por 2^n). Esta sucesión de funciones ha sido definida de tal manera que la prueba M de Weierstrass es automáticamente aplicable: evidentemente

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{10^n} \quad \text{para todo } x,$$

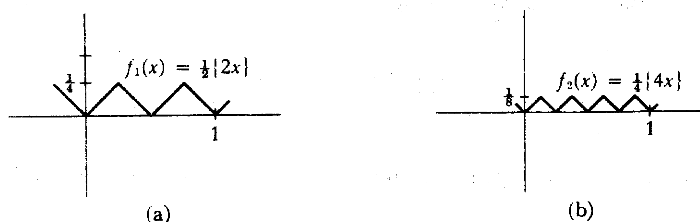


FIGURA 11

y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/10^n$ converge. Así pues, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente; al ser cada f_n continua, el corolario implica que la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\{10^n x\}$$

es también continua. En la figura 12 puede verse la gráfica de las primeras sumas parciales $f_1 + \ldots + f_n$. Cuando n aumenta, las gráficas se hacen cada vez más difíciles de dibujar y la suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es absolutamente no dibujable, según demuestra el siguiente teorema (incluido principalmente a modo de interesante ilustración, que el lector puede pasar por alto, si se le hace demasiado difícil).

TEOREMA 5

La función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \{10^n x\}$$

es continua por todas partes y derivable en ninguna.

DEMOSTRACIÓN

Acabamos de demostrar que f es continua; ésta es la única parte de la demostración en que se aplica la convergencia uniforme. Demostraremos que f no es derivable en a, cualquiera que sea a, por el método directo de exhibir una sucesión particular $\{h_m\}$ que tiende hacia 0, para la cual

$$\lim_{m \to \infty} \frac{f(a + h_m) - f(a)}{h_m}$$

no existe. Basta evidentemente considerar sólo aquellos números a que satisfacen $0 < a \leq 1$.

Supóngase que el desarrollo decimal de a es

$$a = 0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots .$$

Sea $h_m = 10^{-m}$ si $a_m \neq 4$ ó 9, pero pongamos $h_m = -10^{-m}$ si $a_m = 4$ ó 9 (la razón de estas dos excepciones aparecerá pronto). Entonces

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h_m) - f(a)}{h_m} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \cdot \frac{\{10^n(a + h_m)\} - \{10^n a\}}{\pm 10^{-m}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \pm\, 10^{m-n}[\{10^n(a + h_m)\} - \{10^n a\}]. \end{aligned}$$

Esta serie finita es en realidad una suma finita, ya que si $n \geq m$, entonces $10^n h_m$ es entero, de modo que

$$\{10^n(a + h_m)\} - \{10^n a\} = 0.$$

Por otra parte, para $n < m$ podemos escribir

$$\begin{aligned} 10^n a &= \text{entero} + 0.a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} \ldots a_m \ldots \\ 10^n(a + h_m) &= \text{entero} + 0.a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} \ldots (a_m \pm 1) \ldots \end{aligned}$$

(para que se cumpla la segunda ecuación es esencial elegir $h_m = -10^{-m}$ cuando $a_m = 9$). Supóngase ahora que

$$0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} \ldots a_m \ldots \leq \tfrac{1}{2}.$$

Entonces tenemos también

$$0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} \ldots (a_m \pm 1) \ldots \leq \tfrac{1}{2}$$

(en el caso especial $m = n + 1$ la segunda ecuación se cumple porque elegimos $h_m = -10^{-m}$ cuando $a_m = 4$). Esto significa que

$$\{10^n(a + h_m)\} - \{10^n a\} = \pm 10^{n-m},$$

y exactamente la misma ecuación puede deducirse cuando $0{,}a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\ldots > \tfrac{1}{2}$. Así, para $n < m$ tenemos

$$10^{m-n}[\{10^n(a + h_m)\} - \{10^n a\}] = \pm 1.$$

Dicho de otro modo,

$$\frac{f(a + h_m) - f(a)}{h_m}$$

es la suma de $m - 1$ números, cada uno de los cuales es ± 1. Al sumar ahora $+1$ o -1 a un número se cambia la paridad de éste. La suma de $m - 1$ números cada uno de ellos igual a ± 1 es, por lo tanto, un *entero par* si m es impar, y un *entero impar* si m es par. En consecuencia, la sucesión de cocientes

$$\frac{f(a + h_m) - f(a)}{h_m}$$

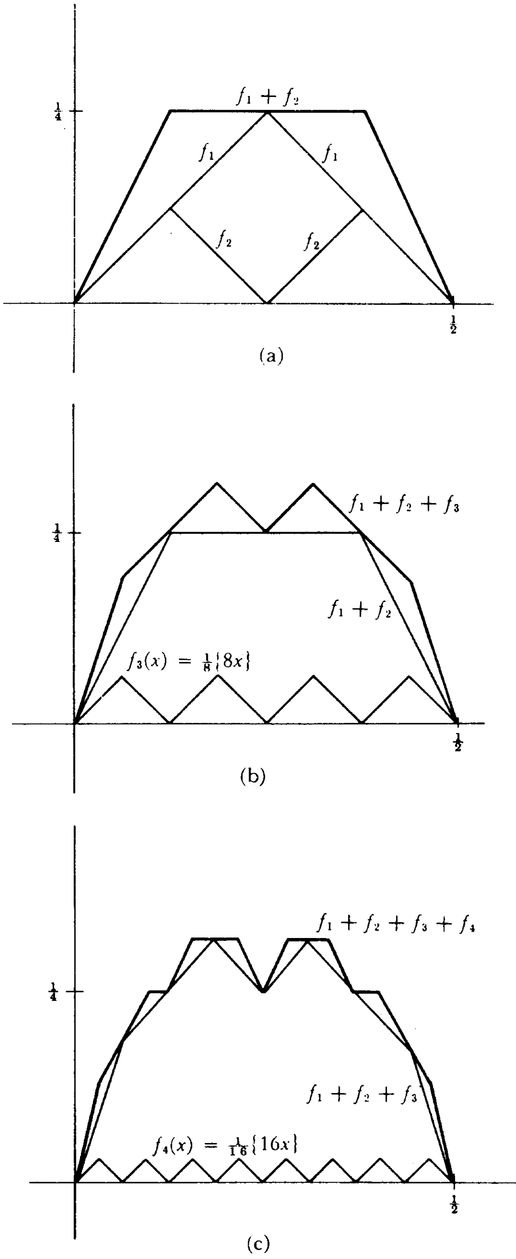

$f_1 + f_2$
$\frac{1}{4}$
f_1
f_1
f_2
f_2
$\frac{1}{2}$
(a)
$f_1 + f_2 + f_3$
$\frac{1}{4}$
$f_1 + f_2$
$f_3(x) = \frac{1}{8}\{8x\}$
$\frac{1}{2}$
(b)
$f_1 + f_2 + f_3 + f_4$
$\frac{1}{4}$
$f_1 + f_2 + f_3$
$f_4(x) = \frac{1}{16}\{16x\}$
$\frac{1}{2}$
(c)

FIGURA 12

no puede converger, puesto que es una sucesión de enteros alternativamente impares y pares. ▮

Además del papel que desempeña en el teorema anterior, la prueba M de Weierstrass constituye un instrumento ideal para analizar funciones de cierta regularidad. Pondremos atención especial a funciones de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

las cuales pueden ser también descritas mediante la ecuación

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$$

para $f_n(x) = a_n(x - a)^n$. Una tal suma de funciones que dependen solamente de potencias de $(x - a)$, recibe el nombre de **serie de potencias centrada** en a. Por razón de sencillez, nos concentraremos por lo general en series de potencias centradas en 0,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Un grupo especialmente importante de series de potencias son las de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

donde f es alguna función que tiene derivadas de todos los órdenes en a; esta serie recibe el nombre de **serie de Taylor para** f **en** a. Por supuesto, no se cumple necesariamente que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n;$$

esta ecuación se cumple solamente cuando los restos satisfacen $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$.

Sabemos ya que una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ no converge necesariamente para todo x. Por ejemplo, la serie de potencias

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

converge solamente para $|x| \leq 1$, mientras que la serie de potencias

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

converge solamente para $-1 < x \leq 1$. Es incluso posible obtener una serie de potencias que converja solamente para $x = 0$. Por ejemplo, la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

no converge para $x \neq 0$; efectivamente, los cocientes

$$\frac{(n+1)!(x^{n+1})}{n!x^n} = (n+1)x$$

no están acotados, cualquiera que sea $x \neq 0$. Sin embargo, si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para algún $x_0 \neq 0$, entonces pueden decirse muchas cosas acerca de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $|x| < |x_0|$.

TEOREMA 6

Supóngase que la serie

$$f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0{}^n$$

converja, y sea a un número cualquiera con $0 < a < |x_0|$. Entonces sobre $[-a, a]$ la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge uniformemente (y absolutamente). Además, se cumple lo mismo para la serie

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Finalmente, f es derivable y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

para todo x con $|x| < |x_0|$.

DEMOSTRACIÓN

Al ser $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0{}^n$ convergente, los términos $a_n x_0{}^n$ tienden hacia 0. Están por lo tanto acotados: existe algún número M tal que

$$|a_n x_0{}^n| = |a_n| \cdot |x_0{}^n| \leq M \text{ para todo } n.$$

Ahora bien, si x está en $[-a, a]$, entonces $|x| \leq |a|$, de modo que

$$\begin{aligned} |a_n x^n| &= |a_n| \cdot |x^n| \\ &\leq |a_n| \cdot |a^n| \\ &= |a_n| \cdot |x_0|^n \cdot \left| \frac{a}{x_0} \right|^n \quad \text{(éste es el paso ingenioso)} \\ &\leq M \left| \frac{a}{x_0} \right|^n. \end{aligned}$$

Pero $|a/x_0| < 1$, de modo que la serie (geométrica)

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{a}{x_0}\right|^n = M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{a}{x_0}\right|^n$$

converge. Eligiendo $M\cdot|a/x_0|^n$ como el número M_n de la prueba M de Weierstrass, se sigue que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente sobre $[-a, a]$.

Para demostrar lo mismo para $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ obsérvese que

$$\begin{aligned} |na_n x^{n-1}| &= n|a_n|\cdot|x^{n-1}| \\ &\le n|a_n|\cdot|a^{n-1}| \\ &= \frac{|a_n|}{|a|}\cdot|x_0|^n\, n\left|\frac{a}{x_0}\right|^n \\ &\le \frac{M}{|a|}\, n\left|\frac{a}{x_0}\right|^n. \end{aligned}$$

Al ser $|a/x_0| < 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{|a|}\, n\left|\frac{a}{x_0}\right|^n = \frac{M}{|a|}\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\frac{a}{x_0}\right|^n$$

converge (este hecho se demostró en el capítulo 22 como aplicación de la prueba del cociente). Recurriendo de nuevo a la prueba M de Weierstrass se demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ converge uniformemente sobre $[-a, a]$.

Finalmente, nuestro corolario demuestra, en primer lugar, que g es continua, y después que

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \quad \text{para } x \text{ en } [-a, a].$$

Puesto que hubiésemos podido elegir cualquier número a con $0 < a < |x_0|$, este resultado se cumple para todo x con $|x| < |x_0|$. ▮

Estamos ahora en condiciones de manejar cómodamente las series de potencias. La mayor parte de las manipulaciones algebraicas resultan ser consecuencias bastante directas de teoremas generales referentes a series infinitas. Por ejemplo, supongamos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, siendo convergentes las dos series para algún x_0. Tenemos entonces para $|x| < |x_0|$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n + b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n.$$

Así pues, la serie $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n$ converge también para $|x|<|x_0|$, y para tales x es $h = f + g$.

El tratamiento de los productos es sólo un poco más complicado. Sabemos que si $|x|<|x_0|$, las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergen *absolutamente.* De aquí se sigue por el teorema 22-9 que el producto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ viene dado por

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i x^i b_j x^j,$$

donde los elementos $a_i x^i b_j x^j$ pueden ir dispuestos en cualquier orden. En particular se puede elegir el orden

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots$$

que se puede poner en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ siendo } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Este es el «producto de Cauchy» introducido en el problema 22-8. Así pues, el producto de Cauchy $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge también para $|x|<|x_0|$ y para tales x es $h = fg$.

Podemos suponer finalmente que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, siendo $a_0 \neq 0$, de modo que $f(0) = a_0 \neq 0$. Tratamos ahora de hallar una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ que represente a $1/f$. Significa esto que queremos tener

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots.$$

Puesto que el primer miembro de esta ecuación viene dado por el producto de Cauchy, tendremos que tener

$$\begin{aligned} &a_0 b_0 = 1 \\ &a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\ &a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Al ser $a_0 \neq 0$ podemos despejar b_0 de la primera de estas ecuaciones. Después podremos despejar b_1 de la segunda, etc. Por supuesto queda todavía por demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge efectivamente para algún $x \neq 0$. Esto se deja como ejercicio (problema 17).

Para las derivadas, el teorema 6 nos proporciona toda la información que necesitamos. En particular, al aplicar el teorema 6 a la serie infinita

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots, \\ e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \end{aligned}$$

obtenemos precisamente los resultados esperados. Cada una de éstas converge para cualquier x_0, de donde las conclusiones del teorema 6 son aplicables para cualquier x:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}'(x) &= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \cdots = \cos x, \\ \cos'(x) &= -\frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + \cdots = -\operatorname{sen} x, \\ \exp'(x) &= 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \cdots = \exp(x). \end{aligned}$$

Para las funciones arctg y $f(x) = \log(1 + x)$, la situación es sólo algo más complicada. Al ser la serie

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

convergente para $x_0 = 1$, es también convergente para $|x| < 1$, y

$$\operatorname{arctg}'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1 + x^2} \text{ para } |x| < 1.$$

En este caso, ocurre que la serie converge también para $x = -1$. Sin embargo, la fórmula para la derivada no es correcta para $x = 1$ o $x = -1$; en efecto, la serie

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

diverge para $x = 1$ y $x = -1$. Obsérvese que esto no contradice al teorema 6, el cual demuestra que la derivada viene dada mediante la fórmula esperada sólo para $|x| < |x_0|$.

Al ser la serie

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

convergente para $x_0 = 1$, es también convergente para $|x| < 1$, y

$$\frac{1}{1 + x} = \log'(1 + x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \text{ para } |x| < 1.$$

En este caso, la serie original no converge para $x = -1$; además, la serie derivada no converge para $x = 1$.

Todas las consideraciones que son aplicables a series de potencias serán automáticamente aplicables a sus derivadas, en los puntos en que la derivada esté representada mediante una serie de potencias. Si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge para todo x de algún intervalo $(-R, R)$, entonces el teorema 6 implica que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

para todo x de $(-R, R)$. Aplicando de nuevo el teorema 6 encontramos que

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2},$$

y procediendo por inducción encontramos que

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \cdot \cdot (n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Así pues, una función definida mediante una serie de potencias que converja en algún intervalo $(-R, R)$, es automáticamente infinitamente derivable en este intervalo. Además, la ecuación anterior implica que

$$f^{(k)}(0) = k!a_k,$$

de modo que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Dicho de otro modo, *una serie de potencias convergente centrada en 0 es siempre la serie de Taylor en 0 de la función que define.*

Llegados a este punto feliz podríamos dar por terminado aquí nuestro estudio de series de potencias y de series de Taylor. Sin embargo, un examen cuidadoso de nuestra situación va a revelar algunos hechos todavía inexplicados.

Las series de Taylor de sen, cos y exp son tan satisfactorias como se pueda desear; convergen para todo x, y pueden ser derivadas término a término para todo x. La serie de Taylor de la función $f(x) = \log(1 + x)$ es algo menos complaciente, ya que converge solamente para $-1 < x \leq 1$, pero esta deficiencia es una consecuencia obligada de la naturaleza básica de las series de potencias. Si la serie de Taylor para f convergiera para cualquier x_0 con $|x_0| > 1$, entonces convergería sobre el intervalo $(-|x_0|, |x_0|)$; y sobre este intervalo la función que define sería derivable, y por lo tanto continua. Pero esto es imposible, ya que no está acotada sobre el intervalo $(-1, 1)$, donde es igual a $\log(1 + x)$.

La serie de Taylor para arctg es más difícil de comprender —parece no haber excusa posible para que esta serie deje de converger cuando $|x| > 1$. Este misterioso comportamiento queda ejemplificado de modo todavía más sorprendente por la función $f(x) = 1/(1 + x^2)$, función infinitamente derivable que es lo mejor que se puede obtener fuera de una función polinómica. El polinomio de Taylor de f viene dado por

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots .$$

Si $|x| \geq 1$, la serie de Taylor no converge en absoluto. ¿Por qué? ¿Qué obstáculo invisible impide que la serie de Taylor se extienda más allá de 1 y —1? Resulta siempre peligroso hacer preguntas de este tipo, ya que es posible que la respuesta resulte poco grata: sucede porque sucede; las cosas son así. En este caso, existe una explicación, pero esta explicación es imposible darla ahora; si bien se trata de una cuestión acerca de números reales, solamente tiene solución adecuada cuando se coloca en un contexto más amplio. Será por lo tanto necesario, antes de completar nuestro estudio de las series de Taylor en el capítulo 26, dedicar dos capítulos a una materia completamente nueva.

PROBLEMAS

1. Para cada una de las sucesiones $\{f_n\}$ siguientes, determinar el límite puntual de $\{f_n\}$ (si existe) sobre el intervalo indicado, y decir si $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia esta función.

(i) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, sobre $[0, 1]$.

(ii) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq n \\ x - n, & x \geq n, \end{cases}$ sobre $[a, b]$ y sobre $\mathbf{R}$.

(iii) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$, sobre $(1, \infty)$.

(iv) $f(x) = e^{-nx^2}$, sobre $[-1, 1]$.

(v) $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{n}$, sobre $\mathbf{R}$.

2. En este problema se pide lo mismo que en el problema 1, pero las funciones no son tan fáciles de analizar. Al final se ofrecen algunas ayudas.

(i) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ en $[0, 1]$.

(ii) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n + x}$ en $[0, \infty)$.

(iii) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ en $[a, \infty)$, $a > 0$.

(iv) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ en $\mathbf{R}$.

(v) $f_n(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}$ en $[a, \infty)$, $a > 0$.

(vi) $f_n(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}$ en $\mathbf{R}$.

(vii) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ en $[a, \infty)$, $a > 0$.

(viii) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ en $[0, \infty)$.

Ayudas: (i) Para cada n, hallar el máximo de $|f - f_n|$ en $[0, 1]$. (ii) Para cada n, considerar $|f(x) - f_n(x)|$ para valores grandes de n. (iii) Expresar $f(x) - f_n(x)$ en forma de fracción y estimar $|f(x) - f_n(x)|$ para $x \geq a$. (iv) Hacer otra estimación de $|f(x) - f_n(x)|$ para valores pequeños de $|x|$. (vii) Aplicar (v).

3. Hallar la serie de Taylor en 0 para cada una de las siguientes funciones.

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x - a}$, $a \neq 0$.

(ii) $f(x) = \log(x - a)$, $a \neq 0$.

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}} = (1 - x)^{-1/2}$. (Utilizar el problema 19-7).

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

(v) $f(x) = \operatorname{arcsen} x$.

4. Hallar cada una de las siguientes sumas infinitas.

(i) $1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots$.

(ii) $1 - x^3 + x^6 - x^8 + \cdots$. Indicación: ¿Qué es $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$?

(iii) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3 \cdot 2} + \dfrac{x^4}{4 \cdot 3} - \dfrac{x^5}{5 \cdot 4} + \cdots$ para $|x| < 1$. Indicación: Derívese.

5. Calcular las siguientes sumas infinitas. (En la mayoría de los casos la suma es de la forma $f(a)$ siendo a un número que surge con evidencia y viniendo $f(x)$ dado mediante una serie de potencias. Para calcular las distintas series de potencias, manipúlese con ellas hasta que salgan series de potencias bien conocidas.)

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

(v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}$.

(vi) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}$.

6. Si $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$, hallar $f^{(k)}(0)$. Indicación: Hallar la serie de potencias para f.

7. En este problema deducimos la serie binomial $(1 + x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $|x| < 1$ sin recurrir a todo el trabajo del problema 22-18, aunque utilizando

un hecho establecido en la parte (a) de aquel problema: la serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ converge para $|x| < 1$.

(a) Demostrar que $(1 + x)f'(x) = \alpha f(x)$ para $|x| < 1$.

(b) Demostrar ahora que cualquier función f que satisfaga la parte (a) es de la forma $f(x) = c(1 + x)^\alpha$ para alguna constante c, y utilizar este hecho para establecer la serie binomial. Indicación: Considérese $g(x) = f(x)/(1 + x)^\alpha$.

8. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1 + nx^2)}$$

converge uniformemente en **R**.

9. (a) Demostrar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \operatorname{sen} \frac{1}{3^n x}$$

converge uniformemente en $[a, \infty)$ para $a > 0$. Ayuda: $\lim_{h \to 0} (\operatorname{sen} h)/h = 1$.

(b) Considerando la suma desde N hasta ∞ para $x = 2/(\pi 3^N)$, demostrar que la serie no converge uniformemente en $(0, \infty)$.

10. (a) Demostrar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^4 x^2}$$

converge uniformemente en $[a, \infty)$ para $a > 0$. Ayuda: Hallar primero el máximo de $nx/(1 + n^4x^2)$ en $[0, \infty)$.

(b) Demostrar que

$$f\left(\frac{1}{N}\right) \geq \frac{n}{2} \sum_{n \geq \sqrt{N}} \frac{1}{n^3},$$

y haciendo uso de la integral para estimar la suma, demostrar que

$f\left(\frac{1}{N}\right) \geq 1/4.$

Concluir que la serie no converge uniformemente en **R**.

(c) ¿Qué ocurrirá con la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5x^2}?$$

11. (a) Utilizar el problema 15-33 y la prueba de Dirichlet (problema 22-19) para demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{n}$$

converge uniformemente en $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$, $\epsilon > 0$.

(b) Para $x = \pi/N$, siendo N grande, demostrar que

$$\left|\sum_{k=N}^{2N} \text{sen } kx\right| = \left|\sum_{k=0}^{N} \text{sen } kx\right| \geq \frac{N}{\pi}.$$

Concluir que

$$\left|\sum_{k=N}^{2N} \frac{\text{sen } kx}{k}\right| \geq \frac{1}{2\pi},$$

y que la serie no converge uniformemente en $[0, 2\pi]$.

12. (a) Supóngase que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ converge para todo x de algún intervalo $(-R, R)$ y que $f(x) = 0$ para todo x de $(-R, R)$. Demostrar que cada $a_n = 0$. (Esto es fácil si se recuerda la fórmula para a_n.)

(b) Supóngase que sólo sabemos que $f(x_n) = 0$ para alguna sucesión $\{x_n\}$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Demostrar de nuevo que cada $a_n = 0$. Indicación: Demostrar primero que $f(0) = a_0 = 0$; después que $f'(0) = a_1 = 0$, etc.

Este resultado indica que si $f(x) = e^{-1/x^2}$ sen $1/x$ para $x \neq 0$, entonces f no puede expresarse como serie de potencias. Demuestra también que una función definida mediante una serie de potencias no puede ser 0 para $x \leq 0$ y distinta de 0 para $x > 0$; de este modo, una serie de po-

tencias no puede describir el movimiento de una partícula que ha permanecido en reposo hasta el tiempo 0 y después se pone en movimiento.

(c) Supóngase que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergen para todo x de algún intervalo que contiene 0 y que $f(t_m) = g(t_m)$ para alguna sucesión $\{t_m\}$ que converge hacia 0. Demostrar que $a_n = b_n$ para todo n. En particular, *una función tiene una representación única como serie de potencias centrada en 0.*

13. Demostrar que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es una función par, entonces $a_n = 0$ para n impar, y si f es una función impar, entonces $a_n = 0$ para n par.

14. Demostrar que la serie de potencias para $f(x) = \log(1 - x)$ converge solamente para $-1 \leq x < 1$, y que la serie de potencias para $g(x) =$ logaritmo$[(1 + x)/(1 - x)]$ converge solamente para los x de $(-1, 1)$.

***15.** Recuérdese que la sucesión de Fibonacci $\{a_n\}$ está definida por $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

(a) Demostrar que $a_{n+1}/a_n \leq 2$.

(b) Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots .$$

Utilizar la prueba del cociente para demostrar que $f(x)$ converge si $|x| < 1/2$.

(c) Demostrar que si $|x| < 1/2$, entonces

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}.$$

Indicación: Esta ecuación puede escribirse como $f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1$.

(d) Utilizar la descomposición en fracciones simples para $1/(x^2 + x - 1)$, y la serie de potencias para $1/(x - a)$, para obtener otra serie de potencias para f.

(e) Se sigue del problema 12 que las dos series de potencias obtenidas para f deben ser idénticas. Utilizar este hecho para demostrar que

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

16. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Supóngase que sabemos únicamente que para ciertos c_n es $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, pero que no sabemos como se multiplican las series en general. Utilizando la fórmula de Leibnitz (problema 10-18) demostrar directamente que esta serie para fg tiene efectivamente que coincidir con el producto de Cauchy de las series para f y para g.

17. Supóngase que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para algún x_0 y que $a_0 \neq 0$; para mayor sencillez supondremos $a_0 = 1$. Sea $\{b_n\}$ la sucesión definida de manera recursiva por

$$b_0 = 1$$

$$b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k}.$$

Este problema tiene por objeto demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge también para algún $x \neq 0$, de modo que representa $1/f$ para valores suficientemente pequeños de $|x|$.

(a) Si todos los $|a_n x_0^n| \leq M$, demostrar que

$$|b_n x^n| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |b_k x^k|.$$

(b) Tomar $M \geq \sqrt{2}$ con todos los $|a_n x_0^n| \leq M$. Demostrar que

$$|b_n x_0{}^n| \leq M^{2n}.$$

(c) Concluir que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge para valores de $|x|$ suficientemente pequeños.

18. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2}$$

converge uniformemente hacia ½ log$(x + 1)$ en $[-a, a]$ para $0 < a < 1$, pero que en 1 converge hacia log 2.

***19.** Supóngase que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Sabemos que la serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ debe converger uniformemente sobre $[-a, a]$ para $0 < a < 1$, pero puede no converger uniformemente sobre $[-1, 1]$; de hecho, puede incluso no converger en el punto -1 (por ejemplo, si $f(x) = \log(1 + x)$). Sin embargo, un elegante teorema de Abel demuestra que la serie converge uniformemente sobre $[0, 1]$. En consecuencia, f es continua sobre $[0, 1]$ y, en particular, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Demostrar el teorema de Abel observando que si $|a_m + \ldots + a_n| < \varepsilon$, entonces $|a_m x^m + \ldots + a_n x^n| < \varepsilon$, según el lema de Abel (problema 18-48).

20. Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es **sumable Abel** si existe $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; el problema 19 indica que una sucesión sumable es necesariamente sumable Abel. Hallar una sucesión que sea sumable Abel, pero que no sea sumable. Indicación: Repasar la lista de las series de Taylor hasta que se encuentre una que no converja en 1, aunque la función que representa sea continua en 1.

21. (a) Utilizando el problema 19, hallar las siguientes sumas infinitas:

(i) $\dfrac{1}{2 \cdot 1} - \dfrac{1}{3 \cdot 2} + \dfrac{1}{4 \cdot 3} - \dfrac{1}{5 \cdot 4} + \cdots$.

(ii) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots$.

(b) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ el producto de Cauchy de dos series convergentes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, y supóngase únicamente que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge. Demostrar que converge efectivamente hacia el producto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

22. (a) Supóngase que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones acotadas (no necesariamente continuas) sobre $[a, b]$ que converge uniformemente hacia f sobre $[a, b]$. Demostrar que f es acotada sobre $[a, b]$.

(b) Hallar una sucesión de funciones continuas sobre $[a, b]$ que converja

puntualmente hacia una función no acotada sobre $[a, b]$.

***23.** Supóngase que f es derivable. Demostrar que la función f' es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas. (Puesto que ya conocemos ejemplos de derivadas discontinuas, esto ofrece otro ejemplo en que el límite puntual de funciones continuas no es una función continua.)

24. Hallar una sucesión de funciones integrables $\{f_n\}$ que converja hacia la función (no integrable) f que toma el valor 1 para los números racionales y 0 para los irracionales. Indicación: Cada f_n será 0 excepto en unos pocos puntos.

25. (a) Demostrar que si f es el límite uniforme de $\{f_n\}$ en $[a, b]$ y cada f_n es integrable en $[a, b]$, entonces también lo es f. (Siendo esto así, una de las hipótesis del teorema 1 era innecesaria.)

(b) En el teorema 3 postulábamos solamente la convergencia puntual de $\{f_n\}$ hacia f. Demostrar que las hipótesis restantes aseguran que $\{f_n\}$ converge de hecho uniformemente hacia f.

(c) Supóngase que en el teorema 3 no se toma como hipótesis que $\{f_n\}$ converge hacia una función f, sino que se dice solamente que $f_n(x_0)$ converge para algún x_0 de $[a, b]$. Demostrar que f_n converge de hecho (uniformemente) hacia un cierto f (con $f' = g$).

(d) Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

converge uniformemente en $[0, \infty)$.

26. Supóngase que f_n son funciones continuas en $[0, 1]$ que convergen uniformemente hacia f. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-1/n} f_n = \int_0^1 f.$$

¿Se sigue cumpliendo esto si la convergencia no es uniforme?

27. (a) Supóngase que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en $[a, b]$ que tienden puntualmente hacia 0. Supóngase además que tenemos $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq 0$ para todos los n y todos los x de $[a, b]$. Demostrar que $\{f_n\}$ de hecho tiende hacia 0 uniformemente en $[a, b]$. Ayuda: Suponiendo lo contrario, elíjase una sucesión adecuada de puntos x_n de $[a, b]$ y aplicar el teorema de Bolzano-Weierstrass.

(b) Demostrar el teorema de Dini: Si $\{f_n\}$ es una sucesión no creciente de

funciones continuas en $[a, b]$ que tienden puntualmente hacia la función continua f, entonces $\{f_n\}$ tiende también uniformemente hacia f en $[a, b]$. (Vale el mismo resultado si $\{f_n\}$ es una sucesión no decreciente.)

(c) ¿Se cumple el teorema de Dini si f no es continua? ¿Qué ocurre si se sustituye $[a, b]$ por el intervalo abierto (a, b)?

28. (a) Supóngase que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en $[a, b]$ que converge uniformemente hacia f. Demostrar que si x_n tiende hacia x, entonces $f_n(x_n)$ tiende hacia $f(x)$.

(b) ¿Sigue siendo verdad este aserto si se prescinde de la hipótesis de ser las f_n continuas?

(c) Demostrar la recíproca de (a): Si f es continua en $[a, b]$ y $\{f_n\}$ es una sucesión con la propiedad de que $f_n(x_n)$ tiende hacia $f(x)$ siempre que x_n tiende hacia x, entonces f_n converge uniformemente hacia f en $[a, b]$. Ayuda: De no ser así, existiría un $\epsilon > 0$ y una sucesión x_n con $|f_n(x_n) - f(x_n)| > \epsilon$. Aplicar entonces el teorema de Bolzano-Weierstrass.

29. Este problema describe a grandes rasgos un enfoque completamente distinto de la integral; no sería por lo tanto justo hacer uso de hechos acerca de integrales sabidos con anterioridad.

(a) Sea s una función escalonada en $[a, b]$, de tal modo que s es constante en (t_{i+1}, t_i) para una cierta partición $\{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$. Definir $\int_a^b s$ como $\sum_{i=1}^{n} s_i(t_i - t_{i-1})$ siendo s_i el valor (constante) de s en (t_{i-1}, t_i). Demostrar que esta definición no depende de la partición $\{t_0, \ldots, t_n\}$.

(b) De una función f se dice que es **reglada** en $[a, b]$ si es el límite uniforme de funciones $\{s_n\}$ escalonadas en $[a, b]$. Demostrar que en este caso, para cada $\epsilon > 0$ existe un N tal que para $m, n > N$ tenemos $|s_n(x) - s_m(x)| < \epsilon$ para todos los x de $[a, b]$.

(c) Demostrar que la sucesión de números $\left\{\int_a^b s_n\right\}$ será una sucesión de Cauchy.

(d) Supóngase que $\{t_n\}$ es otra sucesión de funciones escalonadas en $[a, b]$ que converge uniformemente hacia f. Demostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe un N tal que para $n > N$ tenemos $|s_n(x) - t_n(x)| < \epsilon$ para x en $[a, b]$.

(e) Concluir que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n$. Esto significa que podemos *definir* $\int_a^b f$ como el límite $\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n$ para cualquier sucesión $\{s_n\}$ de fun-

ciones escalonadas que converjan uniformemente hacia f. Lo único que queda ahora por aclarar es ¿cuáles son las funciones regladas? Vamos a dar a esto una respuesta parcial.

*(f) Demostrar que toda función continua es reglada. Ayuda: Para hallar una función escalonada s en $[a, b]$ con $|f(x) - s(x)| < \epsilon$ para todos los x de $[a, b]$, considerar todos los y para los que existe una tal función escalonada en $[a, y]$.

***30.** Hallar una sucesión $\{f_n\}$ que tienda uniformemente hacia f en $[0, 1]$ y para la que $\lim_{n \to \infty}$ (longitud de f_n en $[0, 1]$) $\neq$ longitud de f en $[0, 1]$. (La longitud viene definida en el problema 13-26, pero el ejemplo más sencillo incluirá funciones cuyas gráficas tendrán longitudes que aparecerán claras.)

CAPÍTULO

24

NÚMEROS COMPLEJOS

Con excepción de los últimos párrafos del capítulo anterior, este libro no ha cesado de proclamar las excelencias de los números reales. Sin embargo, los números reales tienen una gran deficiencia: la de que no toda función polinómica tiene una raíz. El ejemplo más sencillo y notable es el hecho de que no existe ningún número x que satisfaga $x^2 + 1 = 0$. Esta deficiencia es tan grave que, desde hace mucho tiempo, los matemáticos han sentido la necesidad de «inventar» un número i con la propiedad de que $i^2 + 1 = 0$. Por mucho tiempo la situación del «número» i fue misteriosa del todo: al no existir ningún número x que satisfaga $x^2 + 1 = 0$, no tiene sentido decir «sea i el número que satisface $i^2 + 1 = 0$». No obstante, la admisión del número «imaginario» i en la familia de los números parecía simplificar grandemente muchos cálculos algebraicos, especialmente cuando se admitían los «números complejos» $a + bi$ (para a y b en **R**), y se suponían válidas todas las leyes del cálculo aritmético enumeradas en el capítulo 1. Por ejemplo, toda ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

puede resolverse de manera formal dando

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si $b^2 - 4ac \geq 0$, estas fórmulas proporcionan las soluciones correctas; cuando se admiten números complejos las fórmulas parecen tener sentido en todos los casos. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + x + 1 = 0$$

carece de raíces reales, puesto que

$$x^2 + x + 1 = (x + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4} > 0, \text{ para todo } x.$$

Pero la fórmula para las raíces de una ecuación cuadrática sugiere las «soluciones»

$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2};$$

si interpretamos $\sqrt{-3}$ como $\sqrt{3 \cdot (-1)} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = 3i$, entonces estos números serían

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

No es difícil comprobar que estos números, por el momento puramente formales, satisfacen efectivamente la ecuación

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Es incluso posible «resolver» ecuaciones cuadráticas cuyos coeficientes son a su vez números complejos. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + x + 1 + i = 0$$

debería tener las soluciones

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1 + i)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 - 4i}}{2},$$

donde el símbolo $\sqrt{-3 - 4i}$ significa un número complejo $\alpha + \beta i$ cuyo cuadrado es $-3 - 4i$. Para obtener

$$(\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i = -3 - 4i$$

necesitamos que sea

$$\alpha^2 - \beta^2 = -3,$$
$$2\alpha\beta = -4.$$

Estas dos ecuaciones pueden resolverse fácilmente para α y β reales; efectivamente, existen dos soluciones posibles:

$$\begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} \alpha = -1 \\ \beta = 2. \end{matrix}$$

Así, las dos «raíces cuadradas» de $-3-4i$ son $1-2i$ y $-1+2i$. No existe ninguna manera razonable de decidir cuál de éstas debe ser designada por $\sqrt{-3-4i}$, y cuál por $-\sqrt{-3-4i}$; el uso convencional de $\sqrt{x}$ tiene solamente sentido para $x \geq 0$ reales, en cuyo caso $\sqrt{x}$ designa la raíz (real) no negativa. Por esta razón, la solución

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3-4i}}{2}$$

debe entenderse como abreviación de:

$$x = \frac{-1+r}{2}, \quad \text{donde } r \text{ es una de las raíces cuadradas de } -3-4i.$$

Con este convenio llegamos a las soluciones

$$x = \frac{-1+1-2i}{2} = -i,$$
$$x = \frac{-1-1+2i}{2} = -1+i;$$

como fácilmente puede comprobarse, estos números suministran efectivamente soluciones formales para la ecuación

$$x^2 + x + 1 + i = 0.$$

Los números complejos son igualmente útiles para ecuaciones cúbicas. Toda ecuación cúbica

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$$

con coeficientes reales a, b, c y d, tiene, según sabemos, una raíz real α, y si dividimos $ax^3 + bx^2 + cx + d$ por $x - \alpha$ obtenemos un polinomio de segundo grado cuyas raíces son las raíces restantes de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$; las raíces de este polinomio de segundo grado pueden ser números complejos. Así, una ecuación cúbica tendrá o bien tres raíces reales o bien una raíz real y dos raíces complejas. La existencia de la raíz real queda garantizada por nuestro teorema de que toda ecuación de grado impar tiene una raíz real, pero en realidad no hace falta apelar a este teorema (el cual es totalmente inaplicable si los coeficientes son complejos); en el caso de una ecuación cúbica podemos encontrar en realidad, con destreza suficiente, una fórmula que nos dé todas las raíces. La siguiente deducción de tal fórmula la presentamos aquí no sólo como una demostración interesante del ingenio de matemáticos antepasados, sino como prueba de la importancia de los números complejos (sean éstos lo que sean).

Para resolver la ecuación cúbica más general, basta evidentemente considerar sólo ecuaciones de la forma

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Es incluso posible eliminar el término en x^2, mediante una manipulación bastante directa. Si ponemos

$$x = y - \frac{b}{3},$$

entonces

$$x^3 = y^3 - by^2 + \frac{b^2y}{3} - \frac{b^3}{27},$$

$$x^2 = y^2 - \frac{2by}{3} + \frac{b^2}{9},$$

de modo que

$$\begin{aligned}0 &= x^3 + bx^2 + cx + d\\ &= \left(y^3 - by^2 + \frac{b^2y}{3} - \frac{b^3}{27}\right) + \left(by^2 - \frac{2b^2y}{3} + \frac{b^3}{9}\right) + \left(cy - \frac{bc}{3}\right) + d\\ &= y^3 + \left(\frac{b^2}{3} - \frac{2b^2}{3} + c\right)y + \left(\frac{b^3}{9} - \frac{b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right).\end{aligned}$$

El segundo miembro no contiene ahora ningún término en y^2. Si podemos despejar y en la ecuación podremos hallar x. Esto demuestra que es suficiente considerar en primer lugar solamente ecuaciones de la forma

$$x^3 + px + q = 0.$$

En el caso particular $p = 0$ obtenemos la ecuación $x^3 = -q$. Veremos más adelante que todo número complejo que tiene una raíz cúbica, en realidad tiene tres, de modo que tiene tres soluciones. El caso $p \neq 0$, por otra parte, exige un paso artificioso del todo. Pongamos

$$(*)\quad x = w - \frac{p}{3w}\quad \left(w = \frac{p}{1 - 3x} \neq 0\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned}0 = x^3 + px + q &= \left(w - \frac{p}{3w}\right)^3 + p\left(w - \frac{p}{3w}\right) + q\\ &= w^3 - \frac{3w^2p}{3w} + \frac{3wp^2}{9w^2} - \frac{p^3}{27w^3} + pw - \frac{p^2}{3w} + q\\ &= w^3 - \frac{p^3}{27w^3} + q.\end{aligned}$$

Esta ecuación puede escribirse

$$27(w^3)^2 + 27q(w^3) - p^3 = 0,$$

la cual es una ecuación cuadrática en w^3 (!!).

Así pues,

$$w^3 = \frac{-27q \pm \sqrt{(27)^2q^2 + 4 \cdot 27p^3}}{2 \cdot 27}$$
$$= -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Recuérdese que esto significa en realidad:

$$w^3 = -\frac{q}{2} + r, \quad \text{donde } r \text{ es una raíz cuadrada de } \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Podemos escribir, por lo tanto,

$$w = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}};$$

esta ecuación significa que w es alguna raíz cúbica de $-q/2 + r$, donde r es alguna raíz cuadrada de $q^2/4 + p^3/27$. Esto da lugar a seis posibilidades para w, pero al sustituir éstas en (*), dando

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}},$$

resulta que se obtienen solamente tres valores distintos para x. Una característica todavía más sorprendente de esta solución surge al considerar una ecuación cúbica cuyas raíces son todas reales; la fórmula antes deducida puede, a pesar de todo, contener números complejos en forma esencial. Por ejemplo, las raíces de

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

son 4, $-2 + \sqrt{3}$ y $-2 - \sqrt{3}$. Por otra parte, la fórmula antes deducida (con $p = -15$, $q = -4$) da como una de sus soluciones

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} - \frac{-15}{3 \cdot \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}}}$$

$$= \sqrt[3]{2 + 11i} + \frac{15}{3 \cdot \sqrt[3]{2 + 11i}}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}(2 + i)^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 \\ &= 8 + 12i - 6 - i \\ &= 2 + 11i,\end{aligned}$$

de modo que una de las raíces cúbicas de $2 + 11i$ es $2 + i$. Así pues, obtenemos como una de las soluciones de la ecuación

$$\begin{aligned}x &= 2 + i + \frac{15}{6 + 3i} \\ &= 2 + i + \frac{15}{6 + 3i} \cdot \frac{6 - 3i}{6 - 3i} \\ &= 2 + i + \frac{90 - 45i}{36 + 9} \\ &= 4(!).\end{aligned}$$

Las restantes raíces pueden también obtenerse si son conocidas las demás raíces cúbicas de $2 + 11i$. El hecho de que se pueda obtener incluso una de estas raíces reales a partir de una expresión que depende de números complejos es suficientemente impresionante para dar a entender que el uso de los números complejos no puede ser totalmente absurdo. De hecho, las fórmulas que dan las soluciones de las ecuaciones cuadráticas y cúbicas pueden interpretarse enteramente en términos de números reales.

Supóngase que convenimos, por el momento, en escribir todos los números complejos en la forma $a + bi$, escribiendo el número real a como $a + 0i$ y el número i como $0 + 1i$. Las leyes ordinarias de la aritmética y la relación $i^2 = -1$ demuestran que

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i, \\ (a + bi) \cdot (c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

Así pues, una ecuación tal como

$$(1 + 2i) \cdot (3 + 1i) = 1 + 7i$$

puede ser considerada sencillamente como abreviación para las *dos* ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 &= 1, \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 &= 7. \end{aligned}$$

La solución de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con coeficientes reales puede parafrasearse como sigue:

$$\text{Si} \begin{cases} u^2 - v^2 = b^2 - 4ac, \\ uv = 0, \end{cases}$$

$$\text{(es decir, si } (u + vi)^2 = b^2 - 4ac\text{)},$$

$$\text{entonces} \begin{cases} a\left[\left(\dfrac{-b+u}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{v}{2a}\right)^2\right] + b\left[\dfrac{-b+u}{2a}\right] + c = 0, \\ a\left[2\left(\dfrac{-b+u}{2a}\right)\left(\dfrac{v}{2a}\right)\right] + b\left[\dfrac{v}{a}\right] = 0, \end{cases}$$

$$\left(\text{es decir, entonces } a\left(\frac{-b+u+vi}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b+u+vi}{2a}\right) + c = 0\right).$$

No resulta muy difícil comprobar esta afirmación acerca de números reales sin escribir ningún «i», pero las complicaciones del mismo enunciado deben convencer al lector que vale la pena introducir ecuaciones acerca de números complejos como abreviaciones para pares de ecuaciones acerca de números reales. (Si el lector todavía no está convencido, intente parafrasear la solución de la ecuación cúbica.) Sin embargo, si pretendemos de verdad utilizar los números complejos de manera consecuente, va a ser necesario presentar alguna definición razonable.

En toda esta discusión ha estado implícita una posibilidad. Todas las propiedades matemáticas de un número complejo $a + bi$ están completamente determinadas por los números reales a y b; cualquier objeto matemático con esta misma propiedad puede ser utilizado razonablemente para definir un número complejo. El candidato que tenemos más a mano es el par ordenado (a, b) de números reales; *definiremos*, en consecuencia, un número complejo como un par de números reales y del mismo modo *definiremos* el significado que se ha de dar a la suma y a la multiplicación de números complejos.

DEFINICIÓN

Un **número complejo** es un par ordenado de números reales; si $z = (a, b)$ es un número complejo, se dice entonces que a es la **parte real** de z, y que b es la **parte imaginaria** de z. El conjunto de todos los números complejos es designado por **C**. Si (a, b) y (c, d) son dos números complejos, definimos

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c).$$

(El + y el · que aparecen en la izquierda son símbolos nuevos que se están definiendo, mientras que el + y el · que aparecen en la derecha representan la suma y la multiplicación conocidas de los números reales.)

Cuando se introdujeron por primera vez los números complejos, se entendía que los números reales eran, en particular, números complejos; esto no es así si tomamos en serio nuestra definición: un número real no es, después de todo, lo mismo que un par de números reales. Esta dificultad es, sin embargo, sólo un estorbo de menor importancia. Obsérvese que

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0 + 0) = (a + b, 0),$$
$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (a \cdot b, 0);$$

esto indica que los números complejos de la forma $(a, 0)$ se comportan respecto a la suma y a la multiplicación de números complejos, exactamente de la misma manera en que lo hacen los números reales respecto a su suma y multiplicación propias. Por esta razón convendremos en designar $(a, 0)$ simplemente por a. La notación corriente $a + bi$ de los números complejos puede obtenerse ahora mediante otra definición.

DEFINICIÓN

$$i = (0, 1).$$

Obsérvese que $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ (el último signo de igualdad se justifica por nuestro convenio). Además

$$\begin{aligned}(a, b) &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) \\ &= a + bi.\end{aligned}$$

El lector puede haber recibido la impresión de que nuestra definición era sólo un artificio complicado para definir números complejos como «expresiones de la forma $a + bi$». Esto es esencialmente correcto; constituye un prejuicio firmemente establecido de la matemática moderna el que los objetos nuevos deben definirse como algo específico, no como «expresiones». Sin embargo, es interesante observar que hasta que se propuso la definición moderna, los matemáticos se sentían molestos en su fuero interno cuando utilizaban los números complejos. Además, la definición precisa hace resaltar otro punto importante. Nuestro objetivo al introducir los números complejos fue el de evitar la necesidad de parafrasear enunciados acerca de números complejos en términos de sus partes real e imaginaria. Esto quiere decir que pretendemos trabajar con números complejos de la misma manera en que trabajamos con números racionales o reales. Por ejemplo, la solución de la ecuación cúbica requería escribir $x = w - p/3w$, de modo que queremos saber que $1/w$ tiene sentido. Además, w^2 se obtuvo resolviendo una ecuación cuadrática, lo cual exige muchas otras manipulaciones algebraicas. En resumen, es probable que tengamos que utilizar, en un momento o en otro, cualquier manipulación con números reales. Ciertamente no queremos detenernos cada vez para justificar todos los pasos. Esto afortunadamente no es necesario. Puesto que todas las manipulaciones algebraicas efectuadas con números reales pueden justificarse mediante las propiedades enumeradas en el capítulo 1, sólo hace falta comprobar que estas propiedades se cumplen también para los números complejos. En la mayor parte de los casos esto es muy sencillo, y estos hechos no van a ser establecidos como teormas formales. Por ejemplo, la demostración de P1,

$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)]$$

exige solamente la aplicación de la definición de sumas para números complejos. El primer miembro se convierte en

$$([a + c] + e, [b + d] + f),$$

y el segundo miembro se convierte en

$$(a + [c + e], b + [d + f]);$$

los dos son iguales porque P1 se cumple para números reales. Conviene comprobar P2-P7 y P9. Obsérvese que los números complejos que desempeñan el papel de 0 y 1 en P2 y P6 son, respectivamente, (0, 0) y (1, 0). No es difícil imaginar cómo ha de ser $-(a, b)$, pero el inverso de (a, b) exigido en P8 resulta algo más artificioso: si $(a, b) \neq (0, 0)$, entonces $a^2 + b^2 \neq 0$ y

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0).$$

Se hubiese podido predecir este hecho de dos maneras. Para hallar (x, y) con

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$$

basta resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned} ax - by &= 1, \\ bx + ay &= 0. \end{aligned}$$

Las soluciones son $x = a/(a^2 + b^2)$, $y = -b/(a^2 + b^2)$. Es también posible razonar que si $1/(a + bi)$ ha de significar algo, entonces debe cumplirse que

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Una vez demostrada la existencia de inversos (después de obtener de alguna manera el inverso), se sigue que esta manipulación es efectivamente válida; es la más fácil de recordar cuando se busca el inverso de un número complejo; fue éste precisamente el artificio que utilizamos para calcular

$$\begin{aligned} \frac{15}{6 + 3i} &= \frac{15}{6 + 3i} \cdot \frac{6 - 3i}{6 - 3i} \\ &= \frac{90 - 45i}{36 + 9}. \end{aligned}$$

Contrariamente a lo que ocurre con P1-P9, las reglas P10-P12 carecen de análogas: es fácil demostrar que *no* existe ningún conjunto P de números *complejos* tal que P10-P12 se cumplan para todos los números *complejos*. En efecto, si un tal conjunto existiese, entonces P tendría que contener 1 (puesto que $1 = 1^2$)

y también -1 (puesto que $-1 = i^2$), lo cual estaría en contradicción con P10. La ausencia de P10-P12 no tendrá consecuencias desastrosas, pero significa efectivamente que no podemos definir $z < w$ para z y w complejos. Puede también recordar el lector que para los números reales, P10-P12 se utilizaron para demostrar que $1 + 1 \neq 0$. Afortunadamente, el hecho correspondiente para los números complejos puede reducirse a éste: evidentemente $(1, 0) + (1, 0) \neq (0, 0)$.

Si bien escribiremos por lo general los números complejos en la forma $a + bi$, vale la pena recordar que el conjunto de todos los números complejos **C** no es más que la colección de todos los pares de números reales. Hace mucho que esta colección fue identificada con el plano, y por esta razón el plano recibe muchas veces el nombre de «plano complejo». El eje horizontal, que consiste en todos los puntos $(a, 0)$ para a en **R**, recibe muchas veces el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*. Dos importantes definiciones están también relacionadas con esta representación geométrica.

DEFINICIÓN

Si $z = x + iy$ es un número complejo (con x e y reales),entonces el **conjugado** $\bar{z}$ de z se define como

$$\bar{z} = x - iy,$$

y el **valor absoluto** o **módulo** $|z|$ de z está definido por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

(Obsérvese que $x^2 + y^2 \geq 0$, de modo que $\sqrt{x^2 + y^2}$ está definido sin ambigüidad; designa la raíz cuadrada real no negativa de $x^2 + y^2$.)

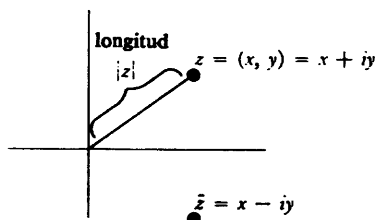


FIGURA 1

Geométricamente, $\bar{z}$ es sencillamente la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$ es la distancia de z a $(0, 0)$ (figura 1). Obsérvese que la notación

para el valor absoluto de los números complejos es consistente con la de los números reales. La **distancia** entre dos números complejos z y w puede definirse muy fácilmente como $|z - w|$. El siguiente teorema enumera todas las propiedades importantes de conjugados y valores absolutos.

TEOREMA 1

Sean z y w números compuestos. Entonces

(1) $\bar{\bar{z}} = z$.
(2) $\bar{z} = z$ si y sólo si z es real (es decir, es de la forma $a + 0i$, para algún número real a).
(3) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.
(4) $\overline{-z} = -(\bar{z})$.
(5) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
(6) $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$, if $z \neq 0$.
(7) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.
(8) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
(9) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

DEMOSTRACIÓN

Los enunciados (1) y (2) son evidentes: Las ecuaciones (3) y (5) pueden comprobarse mediante cálculos directos y (4) y (6) pueden después demostrarse mediante un artificio:

$$0 = \bar{0} = \overline{z + (-z)} = \bar{z} + \overline{-z}, \text{ de modo que } \overline{-z} = -(\bar{z}),$$
$$1 = \bar{1} = \overline{z \cdot (z^{-1})} = \bar{z} \cdot \overline{z^{-1}}, \quad \text{ de modo que } \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}.$$

Las ecuaciones (7) y (8) pueden también demostrarse mediante cálculo directo. La única parte difícil del teorema es (9). En realidad, esta desigualdad ya se ha presentado (problema 4-9) pero repetiremos aquí la demostración utilizando una terminología ligeramente distinta.

Está claro que en (9) se cumple la igualdad si $z = 0$ ó $w = 0$. Es también fácil ver que (9) se cumple si $z = \lambda w$ para cualquier número real λ (considérense por separado los casos $\lambda > 0$ y $\lambda < 0$). Supóngase, por otra parte, que $z \neq \lambda w$

para un número real cualquiera λ, y que $w \neq 0$. Entonces, para todos los números reales λ,

$$(*) \quad 0 < |z - \lambda w|^2 = (z - \lambda w) \cdot \overline{(z - \lambda w)}$$
$$= (z - \lambda w) \cdot (\bar{z} - \lambda \bar{w})$$
$$= z\bar{z} + \lambda^2 w\bar{w} - \lambda(w\bar{z} + z\bar{w})$$
$$= \lambda^2|w|^2 + |z|^2 - \lambda(w\bar{z} + z\bar{w}).$$

Obsérvese que $w\bar{z} + z\bar{w}$ es real, puesto que

$$\overline{w\bar{z} + z\bar{w}} = \bar{w}\bar{\bar{z}} + \bar{z}\bar{\bar{w}} = \bar{w}z + \bar{z}w = w\bar{z} + z\bar{w}.$$

De este modo el segundo miembro de (*) es una ecuación cuadrática en λ con coeficientes reales y sin soluciones reales; su discriminante debe ser, por lo tanto, negativo. Así pues,

$$(w\bar{z} + z\bar{w})^2 - 4|w|^2 \cdot |z|^2 < 0;$$

se sigue, al ser $w\bar{z} + z\bar{w}$ y $|w|\cdot|z|$ números reales, y $|w|\cdot|z| \geq 0$, que

$$(w\bar{z} + z\bar{w}) < 2|w| \cdot |z|.$$

De esta desigualdad se sigue que

$$|z + w|^2 = (z + w) \cdot (\bar{z} + \bar{w})$$
$$= |z|^2 + |w|^2 + (w\bar{z} + z\bar{w})$$
$$< |z|^2 + |w|^2 + 2|w| \cdot |z|$$
$$= (|z| + |w|)^2,$$

lo cual implica que

$$|z + w| < |z| + |w|. \blacksquare$$

Las operaciones de suma y multiplicación de números complejos tienen ambas importantes interpretaciones geométricas. La representación de la suma es muy sencilla (figura 2). Dos números complejos $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$ determinan un paralelogramo, dos de cuyos lados son el segmento rectilíneo de $(0, 0)$ a z, y el segmento rectilíneo de $(0, 0)$ a w; el vértice opuesto a $(0, 0)$ es $z + w$. (La demostración de este hecho geométrico se deja para el lector.)

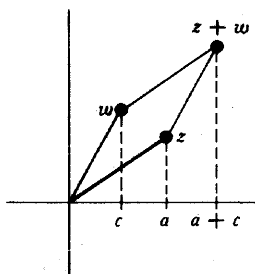


FIGURA 2

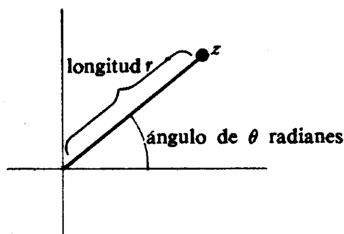


FIGURA 3

La interpretación de la multiplicación es más complicada. Si $z = 0$ ó $w = 0$, entonces $z \cdot w = 0$ (puede darse una demostración de una línea, pero ni siquiera ésta es necesaria; se ha demostrado ya que la afirmación es consecuencia de P1-P9), de modo que podemos limitar nuestra atención a números complejos no nulos. Empezamos poniendo cada número complejo no nulo en forma especial. (Comparemos con lo expuesto en el apéndice al capítulo 4.)

Para cualquier número complejo $z \neq 0$ podemos escribir

$$z = |z| \frac{z}{|z|};$$

en esta expresión $|z|$ es un número real positivo, mientras que

$$\left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{|z|} = 1,$$

de modo que $z/|z|$ es un número complejo de valor absoluto 1. Ahora cualquier número complejo $a = x + iy$ con $1 = |a| = x^2 + y^2$ puede escribirse en la forma

$$a = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

para algún número θ. Así todo número complejo z no nulo puede escribirse

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

para algún $r > 0$ y algún número θ. El número r es único (es igual a $|z|$), pero θ no es único; si una posibilidad es θ_0, entonces las demás son $\theta_0 + 2k\pi$ para k en $\mathbf{Z}$; cualquiera de estos números recibe el nombre de **argumento** de z. La figura 3 hace ver z en términos de r y θ. (Para hallar un argumento θ de $z = x + iy$ podemos observar que la ecuación

$$x + iy = z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

significa que

$$x = |z|\cos \theta,$$
$$y = |z| \operatorname{sen} \theta.$$

Si $x \neq 0$ podemos tomar por lo tanto $\theta = \operatorname{arctg} y/x$, y si $x = 0$ podemos tomar $\theta = \pi/2$ cuando $y > 0$ y $\theta = 3\pi/2$ cuando $y < 0$.)

El producto de dos números complejos no nulos

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$
$$w = s(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi),$$

es ahora

$$\begin{aligned} z \cdot w &= rs(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) \\ &= rs[(\cos \theta \cos \phi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi) + i(\operatorname{sen} \theta \cos \phi + \cos \theta \operatorname{sen} \phi)] \\ &= rs[\cos (\theta + \phi) + i \operatorname{sen} (\theta + \phi)]. \end{aligned}$$

Así pues, el valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos de los factores, mientras que la suma de cualquier argumento para cada uno de los factores será un argumento para el producto. Para un número complejo no nulo

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

es ahora cosa fácil demostrar mediante inducción la siguiente fórmula muy importante (conocida a veces como teorema de De Moivre):

$$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta), \text{ para un argumento cualquiera } \theta \text{ de } z.$$

Esta fórmula describe z^n tan explícitamente que es fácil decidir cuándo es precisamente $z^n = w$:

TEOREMA 2

Todo número complejo no nulo tiene exactamente n raíces n-ésimas complejas. Con más precisión, para cualquier número complejo $w \neq 0$, y cualquier número

natural n, existen precisamente n números complejos distintos z que satisfacen $z^n = w$.

DEMOSTRACIÓN

Sea

$$w = s(\cos\phi + i \text{ sen } \phi)$$

para $s = |w|$ y algún número ϕ. Entonces un número complejo

$$z = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$$

satisface $z^n = w$ si y sólo si

$$r^n(\cos n\theta + i \text{ sen } n\theta) = s(\cos\phi + i \text{ sen } \phi),$$

lo cual sucede si y sólo si

$$r^n = s,$$
$$\cos n\theta + i \text{ sen } n\theta = \cos\phi + i \text{ sen } \phi.$$

De la primera ecuación se sigue que

$$r = \sqrt[n]{s},$$

donde $\sqrt[n]{s}$ designa la raíz enésima real positiva de s. De la segunda ecuación se sigue que para algún entero k tenemos

$$\theta = \theta_k = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Recíprocamente, si elegimos $r = \sqrt[n]{s}$ y $\theta = \theta_k$ para algún k, entonces el número $z = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$ satisfará $z^n = w$. Para determinar el número de raíces n-ésimas de w, basta por lo tanto determinar cuáles de estos z son distintos. Ahora bien, cualquier entero k puede escribirse

$$k = nq + k'$$

para algún entero q, y algún entero k' entre 0 y $n-1$. Entonces

$$\cos\theta_k + i\,\text{sen}\,\theta_k = \cos\theta_{k'} + i\,\text{sen}\,\theta_{k'}.$$

Esto indica que todo z que satisface $z^n = w$ puede escribirse

$$z = \sqrt[n]{s}\,(\cos\theta_k + i\,\text{sen}\,\theta_k) \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Además, es fácil ver que estos números son todos distintos, ya que dos θ_k cualesquiera para $k = 0, \ldots, n-1$ difieren en menos de 2π. ▌

En el curso de la demostración del teorema 2 hemos desarrollado, en realidad, un método para hallar las raíces n-ésimas de un número complejo. Por ejemplo,

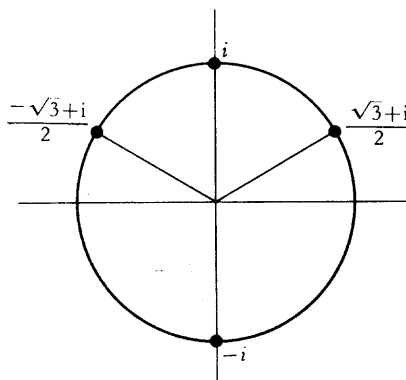


FIGURA 4

para hallar las raíces cúbicas de i (figura 4) obsérvese que $|i| = 1$ y que $\pi/2$ es un argumento para i. Las raíces cúbicas de i son por lo tanto

$$1 \cdot \left[\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right],$$

$$1 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6},$$

$$1 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)\right] = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}.$$

Puesto que es

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$
$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2},$$
$$\cos\frac{3\pi}{2} = 0, \qquad \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1,$$

las raíces cúbicas de i son

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \quad \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \quad -i.$$

En general, no se pueden esperar siempre resultados tan sencillos. Por ejemplo, para hallar las raíces cúbicas de $2 + 11i$, obsérvese que $|2 + 11i| = \sqrt{2^2 + 11^2} = \sqrt{125}$ y que arctg $\frac{11}{2}$ es un argumento para $2 + 11i$. Una de las raíces cúbicas de $2 + 11i$ es por lo tanto

$$\sqrt[6]{125}\left[\cos\left(\frac{\operatorname{arctg}\ \frac{11}{2}}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}\ \frac{11}{2}}{3}\right)\right]$$
$$= \sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\operatorname{arctg}\ \frac{11}{2}}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}\ \frac{11}{2}}{3}\right)\right].$$

Observamos antes que $2 + i$ es también una raíz cúbica de $2 + 11i$. Al ser $|2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, y puesto que arctan $\frac{1}{2}$ es un argumento de $2 + i$, podemos escribir esta raíz cúbica como

$$2 + i = \sqrt{5}\,(\cos\ \operatorname{arctg}\ \tfrac{1}{2} + i\operatorname{sen}\ \operatorname{arctg}\ \tfrac{1}{2}).$$

Estas dos raíces cúbicas son en realidad el mismo número, porque

$$\frac{\operatorname{arctg}\ \frac{11}{2}}{3} = \operatorname{arctg}\ \frac{1}{2}$$

(el lector puede comprobar esto utilizando la fórmula del problema 15-9), pero esto es de las cosas que hubiese sido difícil observar a primera vista.

El hecho de que todo número complejo tiene una raíz n-ésima, cualquiera

que sea n no es sino un caso particular de un teorema muy importante. En su origen el número i fue introducido para suministrar una solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. El *teorema fundamental del álgebra* afirma el hecho notable de que esta introducción suministra automáticamente soluciones para todas las demás ecuaciones polinómicas: toda ecuación

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \qquad a_0, \ldots, a_{n-1} \text{ en } \mathbf{C}$$

tiene una raíz compleja.

En el próximo capítulo vamos a dar una demostración casi completa del teorema fundamental del álgebra. La pequeña laguna que se deja en el texto puede ser llenada como ejercicio (problema 25-5). La demostración del teorema se basará sobre varios conceptos nuevos que surgirán de un modo completamente natural en una investigación más a fondo de los números complejos.

PROBLEMAS

1. Hallar el valor absoluto y el argumento de cada uno de los siguientes números.

(i) $3 + 4i$.
(ii) $(3 + 4i)^{-1}$.
(iii) $(1 + i)^5$.
(iv) $\sqrt[7]{3 + 4i}$.
(v) $|3 + 4i|$.

2. Resolver las ecuaciones siguientes

(i) $x^2 + ix + 1 = 0$.
(ii) $x^4 + x^2 + 1 = 0$.
(iii) $x^2 + 2ix - 1 = 0$.
(iv) $\begin{cases} ix - (1 + i)y = 3, \\ (2 + i)x + iy = 4. \end{cases}$
(v) $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$.

3. Describir el conjunto de todos los números complejos z tales que

(i) $\bar{z} = -z$.
(ii) $\bar{z} = z^{-1}$.

(iii) $|z - a| = |z - b|$.
(iv) $|z - a| + |z - b| = c$.
(v) $|z| < 1 -$ parte real de z.

4. Demostrar que $|z| = |\bar{z}|$, y que la parte real de z es $(z + \bar{z})/2$, mientras que la parte imaginaria es $(z - \bar{z})/2i$.
5. Demostrar que $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$, e interpretar geométricamente este enunciado.
6. ¿Cuál es la relación entre z y $\sqrt{i}\cdot\overline{z\sqrt{-i}}$ en la representación gráfica? Indicación: ¿Cuál es la recta que se transforma en el eje real al multiplicar por $\sqrt{-i}$?
7. (a) Demostrar que si $a_0, \ldots, a_{n-1}$ son reales y $a + bi$ (siendo a y b reales) satisface la ecuación $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, entonces $a - bi$ satisface también esta ecuación. (Así pues, las raíces no reales de una tal ecuación se presentan siempre por pares, y el número de estas raíces es par.)
   (b) Concluir que $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ es divisible por $z^2 - 2az + (a^2 + b^2)$ (cuyos coeficientes son reales).

*8. (a) Sea c un entero que no sea el cuadrado de ningún otro entero. Si a y b son enteros, definimos el **conjugado** de $a + b\sqrt{c}$, designado por $\overline{a + b\sqrt{c}}$, como $a - b\sqrt{c}$. Demostrar que el conjugado está bien definido haciendo ver que un número puede expresarse en la forma $a + b\sqrt{c}$, para enteros a y b, solamente de una manera.
   (b) Demostrar que para todo α y β de la forma $a + b\sqrt{c}$, tenemos $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$, $\bar{\alpha} = \alpha$ si y sólo si α es un entero, $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$, $\overline{-\alpha} = -\bar{\alpha}$, $\overline{\alpha\cdot\beta} = \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$, y $\overline{\alpha^{-1}} = (\bar{\alpha})^{-1}$ si $\alpha \neq 0$.
   (c) Demostrar que si $a_0, \ldots, a_{n-1}$ son *enteros* y $z = a + b\sqrt{c}$ satisface la ecuación $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, entonces $\bar{z} = a - b\sqrt{c}$ satisface también esta ecuación.

9. Hallar todas las raíces cuartas de i; expresar la que tenga un argumento más pequeño sin hacer intervenir ninguna función trigonométrica.

*10. (a) Demostrar que si ω es una raíz n-ésima de 1, entonces también lo es ω^k.
   (b) Se dice que un número ω es una **raíz primitiva n-ésima** de 1 si $\{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$ es el conjunto de todas las raíces n-ésimas de 1. ¿Cuántas raíces enésimas primitivas de 1 existen para $n = 3, 4, 5, 9$?
   (c) Sea ω una raíz n-ésima de 1, con $\omega \neq 1$. Demostrar que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.

*11. (a) Demostrar que si $z_1, \ldots, z_k$ quedan del mismo lado que alguna recta que pase por 0, entonces $z_1 + \ldots + z_k \neq 0$. Indicación: Esto es evidente

partiendo de la interpretación geométrica de la suma, pero también puede darse fácilmente una demostración analítica: El enunciado es evidente si la recta es el eje real, y el caso general puede reducirse a éste mediante un artificio.

(b) Demostrar, además, que $z_1^{-1}, \ldots, z_k^{-1}$ quedan todos del mismo lado de una recta por 0, de modo que $z_1^{-1} + \ldots + z_k^{-1} \neq 0$.

***12.** Demostrar que si $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ y $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, entonces z_1, z_2 y z_3 son los vértices de un triángulo equilátero. Indicación: Convendrá suponer que z_1 es real, y esto puede hacerse sin restringir la generalidad. ¿Por qué?

CAPÍTULO

25

FUNCIONES COMPLEJAS

El lector probablemente no se sorprenderá al darse cuenta de que una investigación más profunda de los números reales ha de basarse necesariamente en el concepto de función. Hasta ahora una función era (intuitivamente) una regla que asignaba números reales a ciertos otros números reales. Pero no existe razón alguna para que no se pueda extender este concepto; se puede considerar igualmente una regla que asigne números complejos a ciertos otros números complejos. La definición rigurosa no presenta problemas (ni siquiera le vamos a conceder los honores de una definición formal): una función es una colección de pares de números complejos que no contiene dos pares distintos con el mismo primer elemento. Puesto que consideramos los números reales como ciertos números complejos, la definición antigua es en realidad un caso particular de la nueva. Sin embargo recurriremos algunas veces a una terminología particular para poner en claro el contexto en que se está considerando una función. Una función f se dice que es de **valores reales** si $f(z)$ es un número real para todos los z del dominio de f, y de **valores complejos** para destacar que no es necesariamente de valores reales. Análogamente estableceremos por lo general explícitamente que una función f está definida sobre [un subconjunto de] **R** en aquellos casos en que el dominio de f es [un subconjunto de] **R**; en otros casos mencionaremos a veces que f está definida sobre [un subconjunto de] **C** para destacar que $f(z)$ está definida para valores tanto reales como complejos de z.

Entre la multitud de funciones definidas sobre **C**, algunas son particularmente importantes. Entre éstas se encuentran en primer lugar las funciones de la forma

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0,$$

donde $a_0, \ldots, a_n$ son números complejos. Estas funciones son llamadas, lo mismo que en el caso real, funciones polinómicas; incluyen la función $f(z) = z$ (la «función identidad») y las funciones de la forma $f(z) = a$ para algún número complejo a («funciones constantes»). Otra importante generalización de una función conocida es la «función valor absoluto» $f(z) = |z|$ para todo z de **C**.

Dos funciones de particular importancia para los números complejos son Re (la «función parte real») e Im (la «función parte imaginaria»), definidas por

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(x+iy) &= x, \\ \operatorname{Im}(x+iy) &= y, \end{aligned} \quad \text{para } x \text{ e } y \text{ reales.}$$

La «función conjugada» está definida por

$$f(z) = \bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z).$$

Las conocidas funciones reales definidas sobre **R** pueden combinarse de muchas maneras para dar lugar a nuevas funciones de valores complejos definidas sobre **C**; un ejemplo es la función

$$f(x+iy) = e^y \operatorname{sen}(x-y) + ix^3 \cos y.$$

La fórmula para esta función particular hace ver una descomposición que siempre es posible. Cualquier función f de valores complejos puede escribirse en la forma

$$f = u + iv$$

para algunas funciones u y v de valores reales; defínase simplemente $u(z)$ como la parte real de $f(z)$, y $v(z)$ como la parte imaginaria. Esta descomposición es útil muchas veces, pero no siempre; por ejemplo, no sería conveniente describir una función polinómica de esta manera.

Otra función va a desempeñar un papel importante en este capítulo. Recuérdese que un *argumento* de un número complejo z no nulo es un número (real) θ tal que

$$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Existen infinitos argumentos para z, pero sólo uno que satisface $0 \le \theta < 2\pi$. Si

designamos por $\theta(z)$ a este argumento único, entonces θ es una función (de valores reales, la «función argumento») sobre $\{z \text{ en } \mathbf{C}: z \neq 0\}$.

Las «gráficas» de las funciones de valores complejos definidas sobre **C**, al estar en el espacio de cuatro dimensiones, son, como se puede suponer, poco útiles para la visualización. Puede utilizarse en vez de la representación alternativa de una función mencionada en el capítulo 4: trazamos dos copias de **C**, y flechas desde z en una de las copias, a $f(z)$ en la otra (figura 1).

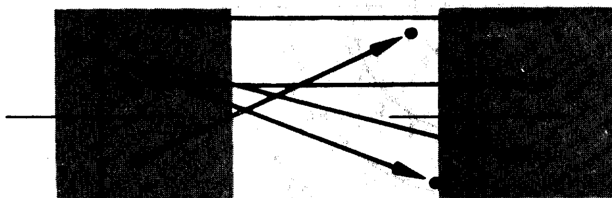


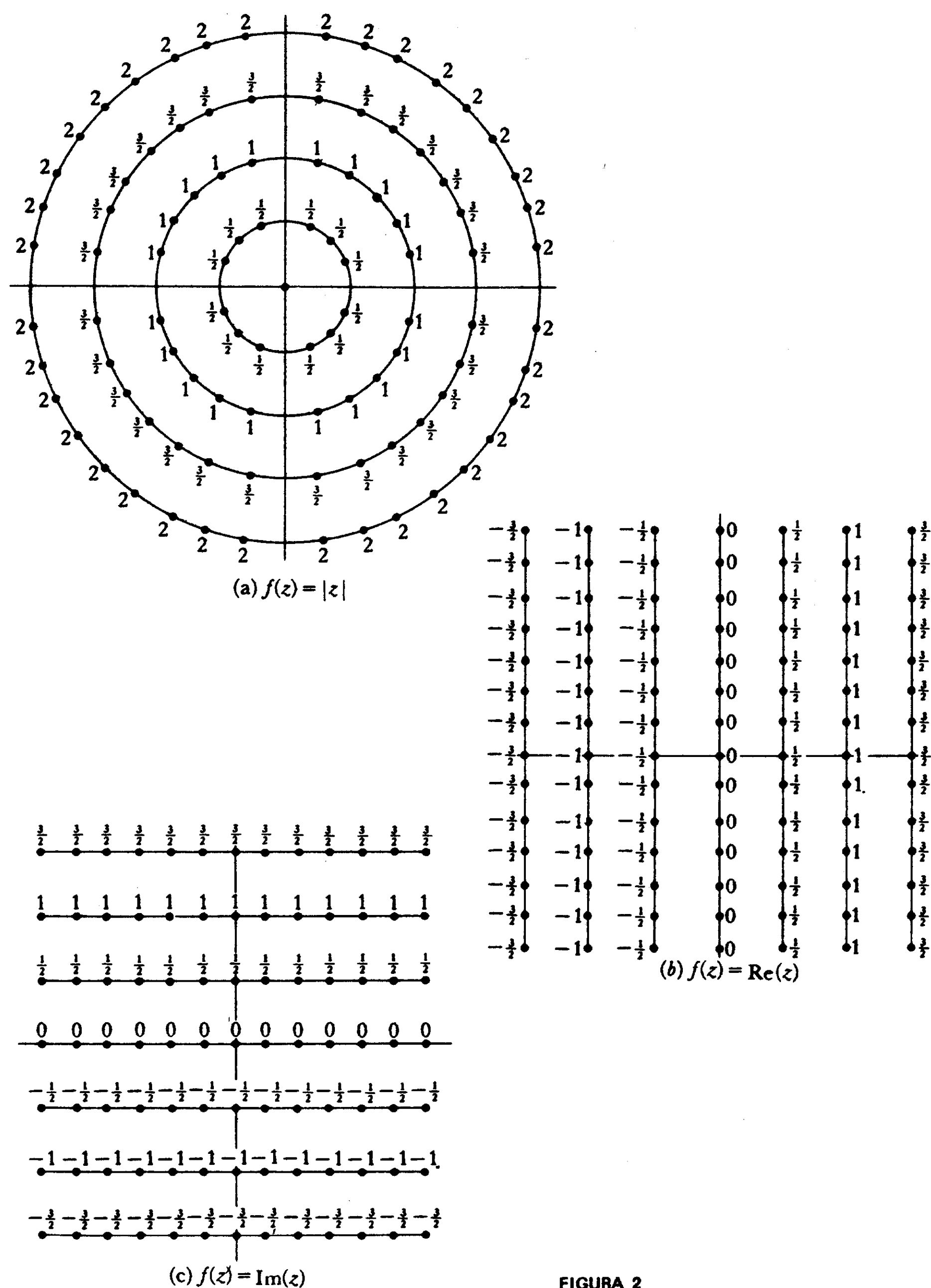
FIGURA 1

La representación gráfica más común de una función de valores complejos se obtiene rotulando un punto del plano con el valor $f(z)$, en vez de con z (el cual puede estimarse por la posición del punto en la figura). La figura 2 indica este tipo de representación para varias funciones distintas. Ciertas características de la función quedan ilustradas muy claramente mediante esta «gráfica». Por ejemplo, la función valor absoluto es constante sobre círculos concéntricos alrededor de 0, las funciones Re e Im son constantes sobre los ejes vertical y horizontal, respectivamente, y la función $f(z) = z^2$ envuelve dos veces el círculo de radio r alrededor del círculo de radio r^2.

A pesar de los problemas planteados por la visualización de funciones de valores complejos en general, es todavía posible definir propiedades análogas de propiedades importantes definidas con anterioridad para funciones de valores reales sobre **R**, y en algunos casos estas propiedades pueden ser más fáciles de visualizar en el caso complejo. Por ejemplo, la noción de límite puede definirse como sigue:

$\lim_{z \to a} f(z) = l$ significa que para todo número (real) $\varepsilon > 0$ existe un número (real) $\delta > 0$ tal que, para todo z, si $0 < |z - a| < \delta$, entonces $|f(z) - l| < \varepsilon$.

Aunque la definición es exactamente la misma que antes, la interpretación es algo diferente. Al ser $|z - w|$ la distancia entre los números complejos z y w, la ecuación $\lim_{z \to a} f(z) = l$ significa que los valores de $f(z)$ puede conseguirse que queden

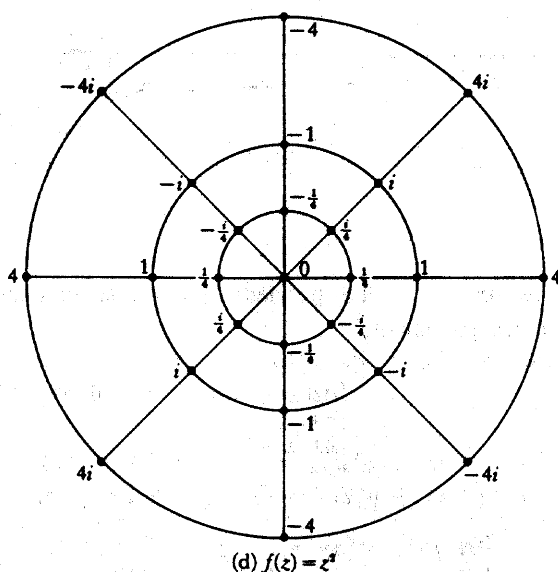


(a) $f(z) = |z|$

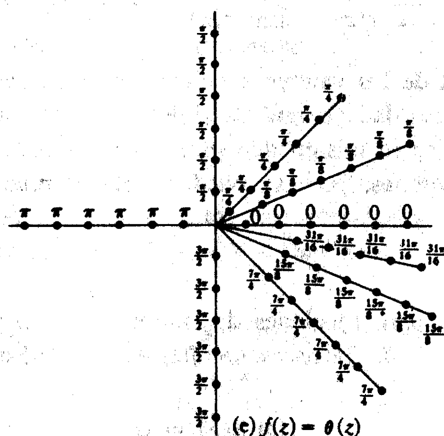
(b) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$

(c) $f(z) = \mathrm{Im}(z)$

FIGURA 2



(d) $f(z) = z^2$



(e) $f(z) = \theta(z)$

FIGURA 2 (Continuación)

dentro de cualquier círculo dado alrededor de l, siempre que se restrinja z a estar dentro de un círculo suficientemente pequeño alrededor de a. Este enunciado es prácticamente fácil de visualizar utilizando la representación de «dos copias» de una función (figura 3).

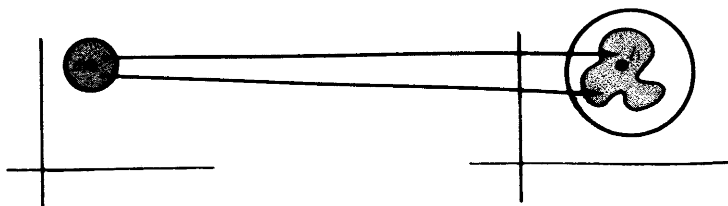


FIGURA 3

Ciertos hechos acerca de límites pueden demostrarse exactamente lo mismo que en el caso real. En particular,

$$\lim_{z\to a} c = c,$$
$$\lim_{z\to a} z = a,$$
$$\lim_{z\to a} [f(z) + g(z)] = \lim_{z\to a} f(z) + \lim_{z\to a} g(z),$$
$$\lim_{z\to a} f(z)\cdot g(z) = \lim_{z\to a} f(z)\cdot \lim_{z\to a} g(z),$$
$$\lim_{z\to a} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{\lim_{z\to a} g(z)}, \quad \text{si } \lim_{z\to a} g(z) \neq 0.$$

La propiedad esencial de los valores absolutos sobre la cual están basados estos resultados es la desigualdad $|z + w| \leq |z| + |w|$, y esta desigualdad se cumple para números complejos lo mismo que para números reales. Estos hechos suministran ya bastantes límites, pero se pueden obtener muchos más del siguiente teorema.

TEOREMA 1

Sea $f(z) = u(z) + iv(z)$ para funciones de valores reales u y v, y sea $l = \alpha + i\beta$ para números reales α y β. Entonces $\lim_{z\to a} f(z) = l$ si y sólo si

$$\lim_{z\to a} u(z) = \alpha,$$
$$\lim_{z\to a} v(z) = \beta.$$

DEMOSTRACIÓN

Supóngase en primer lugar que $\lim_{z\to a} f(z) = l$. Si $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo z,

$$\text{si } 0 < |z - a| < \delta, \text{ entonces } |f(z) - l| < \varepsilon.$$

La segunda desigualdad puede escribirse

$$|[u(z) - \alpha] + i[v(z) - \beta]| < \varepsilon,$$

o

$$[u(z) - \alpha]^2 + [v(z) - \beta]^2 < \varepsilon^2.$$

Al ser $u(z) - \alpha$ y $v(z) - \beta$ números reales, sus cuadrados son positivos; esta desigualdad implica por lo tanto que

$$[u(z) - \alpha]^2 < \varepsilon^2 \quad \text{y} \quad [v(z) - \beta]^2 < \varepsilon^2,$$

lo cual implica que

$$|u(z) - \alpha| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |v(z) - \beta| < \varepsilon.$$

Al cumplirse esto para todo $\varepsilon > 0$, se sigue que

$$\lim_{z \to a} u(z) = \alpha \quad \text{y} \quad \lim_{z \to a} v(z) = \beta.$$

Supóngase ahora que se cumplen estas dos ecuaciones. Si $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo z, si $0 < |z - a| < \delta$, entonces

$$|u(z) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |v(z) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2},$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} |f(z) - l| &= |[u(z) - \alpha] + i[v(z) - \beta]| \\ &\leq |u(z) - \alpha| + |i| \cdot |v(z) - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\lim_{z \to a} f(z) = l$. ▮

Para aplicar con fruto el teorema 1, obsérvese que, puesto que ya conocemos el límite $\lim_{z \to a} z = a$, podemos concluir que

$$\lim_{z \to a} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(a),$$
$$\lim_{z \to a} \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(a).$$

Un límite tal como

$$\lim_{z \to a} \mathrm{sen}(\mathrm{Re}(z)) = \mathrm{sen}(\mathrm{Re}(a))$$

se deduce fácilmente, utilizando la continuidad de sen. Aplicaciones reiteradas de estos principios demuestran límites tales como los siguientes:

$$\lim_{z \to a} \bar{z} = \bar{a},$$
$$\lim_{z \to a} |z| = |a|,$$
$$\lim_{(x+iy) \to a+bi} e^y \,\mathrm{sen}\, x + ix^3 \cos y = e^b \,\mathrm{sen}\, a + ia^3 \cos b.$$

Una vez que hemos extendido ahora el concepto de límite a funciones complejas, puede extenderse también el concepto de continuidad: f es **continua en a** si $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$, y f es **continua** si f es continua en a para todo a del dominio de f. Lo visto anteriormente acerca de límites demuestra que son continuas todas las funciones siguientes:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0,$$
$$f(z) = \bar{z},$$
$$f(z) = |z|,$$
$$f(x + iy) = e^y \,\mathrm{sen}\, x + ix^3 \cos y.$$

Es fácil obtener ejemplos de funciones discontinuas, y algunas de ellas surgen de modo muy natural. Un ejemplo en particular decepcionante es la «función argumento» θ, la cual es discontinua para todos los números reales no negativos (véase la «gráfica» en la figura 2). Variando convenientemente la definición de θ es posible cambiar las discontinuidades; por ejemplo (figura 4), si $\theta'(z)$ designa el argumento único de z con $\pi/2 \leq \theta'(z) < 5\pi/2$, entonces θ' es discontinua en ai para cualquier número real no negativo a. Pero, de cualquier manera que se vuelva a definir θ, se presentarán siempre algunas discontinuidades.

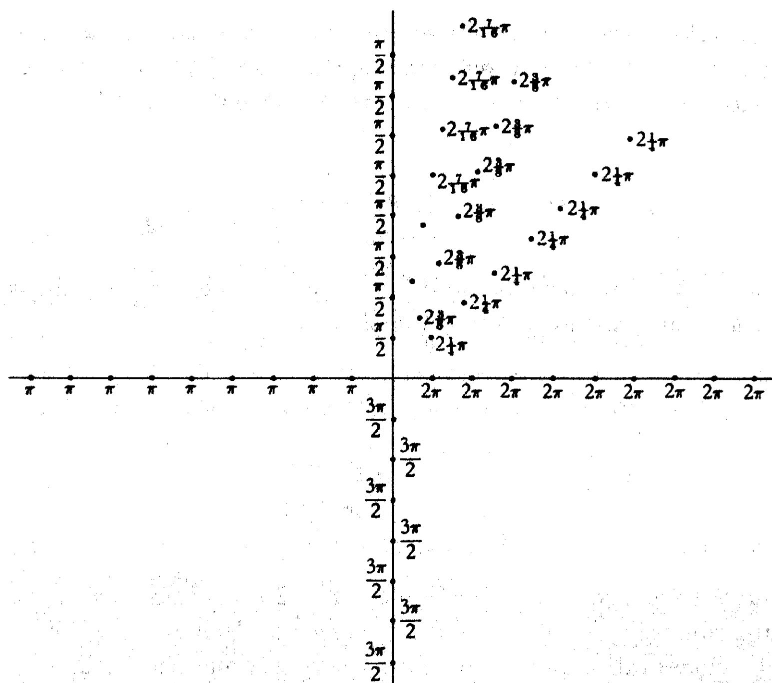


FIGURA 4

La discontinuidad de θ tiene una relación importante con el problema de definir una «función raíz cuadrada», es decir, una función f tal que $(f(z))^2 = z$ para todo z. Para los números reales la función $\sqrt{\ }$ tiene como dominio solamente los números reales no negativos. Si se admiten los números complejos, entonces todo número tiene dos raíces cuadradas (excepto 0, que tiene sólo una). Aunque esta situación parezca ser mejor, resulta ser peor en algún aspecto; al ser las raíces cuadradas de z números complejos, no existe ningún criterio claro para seleccionar una de las raíces como $f(z)$, con preferencia a la otra. Una manera de definir f es la siguiente. Ponemos $f(0) = 0$, y para $z \neq 0$ ponemos

$$f(z) = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\theta(z)}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\theta(z)}{2}\right).$$

Evidentemente $(f(z))^2 = z$, pero la función f es discontinua, ya que θ es discontinua. De hecho es imposible encontrar una f continua tal que $(f(z))^2 = z$ para

todo z. De hecho, es incluso imposible definir $f(z)$ para todo z con $|z| = 1$. Para demostrarlo por contradicción, podemos suponer que $f(1) = 1$ (puesto que siempre podemos reemplazar f por $-f$). Entonces para todo θ, con $0 \leq \theta < 2\pi$, tenemos

$$(*) \qquad f(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}.$$

El razonamiento de esta igualdad lo dejamos para el lector (es una discusión clásica de menor cota superior). Pero (*) implica que

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 2\pi} f(\cos\theta + i\sin\theta) &= \cos\pi + i\sin\pi \\ &= -1 \\ &\neq f(0),\end{aligned}$$

incluso aunque fuera $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \to 0$ con $\theta \to 2\pi$. En consecuencia, hemos llegado a una contradicción. Razonamientos parecidos demuestran que es imposible definir «funciones raíz n-ésima» continuas cualquiera que sea $n \geq 2$.

Para funciones continuas complejas existen importantes teoremas análogos de ciertos teoremas que describen el comportamiento de funciones de valores reales sobre intervalos cerrados. Lo análogo del intervalo $[a, b]$ es el conjunto de los números complejos $z = x + iy$ con $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$ (figura 5). Este conjunto recibe el nombre de **rectángulo cerrado,** y se designa por $[a, b] \times [c, d]$.

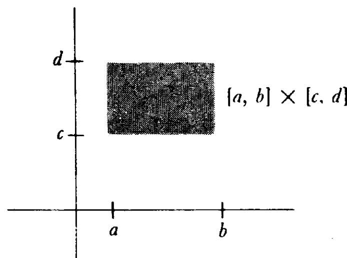


FIGURA 5

Si f es una función continua de valores complejos cuyo dominio es $[a, b] \times [c, d]$, entonces parece razonable, y además se cumple, que f es acotada sobre $[a, b] \times [c, d]$. Es decir, existe algún número real M tal que

$$|f(z)| \leq M \quad \text{para todo } z \text{ de } [a, b] \times [c, d].$$

No tiene sentido decir que f tiene un máximo y un mínimo sobre $[a, b] \times [c, d]$, puesto que no existe el concepto de orden para los números complejos. Sin embargo, si f es una función de valores reales, entonces esta afirmación tiene sentido y es verdad. En particular, si f es una función continua cualquiera de valores complejos sobre $[a, b] \times [c, d]$, entonces $|f|$ es también continua, de modo que existe algún z_0 en $[a, b] \times [c, d]$ tal que

$$|f(z_0)| \leq |f(z)| \quad \text{para todo } z \text{ de } [a, b] \times [c, d];$$

un enunciado análogo se cumple con la desigualdad invertida. Se dice a veces que «f alcanza sus módulos máximo y mínimo sobre $[a, b] \times [c, d]$».

No demostraremos aquí los distintos hechos mencionados en el párrafo anterior, si bien indicaremos algunas demostraciones en el problema 5. Sin embargo, aceptando estos hechos, podemos dar ahora una demostración del teorema fundamental del álgebra, el cual es verdaderamente muy sorprendente, ya que hasta el momento hemos dicho pocas cosas que distingan funciones polinómicas de otras funciones continuas.

TEOREMA 2
(TEOREMA FUNDAMENTAL
DEL ÁLGEBRA)

Sean $a_0, \ldots, a_{n-1}$ números complejos cualesquiera. Entonces existe un número complejo z tal que

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_0 = 0.$$

DEMOSTRACIÓN

Sea

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0.$$

entonces f es continua, y también lo es la función $|f|$ definida por

$$|f|(z) = |f(z)| = |z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0|.$$

Nuestra demostración está basada en la observación de que un punto z_0 con $f(z_0) = 0$ tiene que ser evidentemente un punto mínimo para $|f|$. Para demostrar el teorema haremos ver primero que $|f|$ tiene efectivamente un valor mínimo sobre *todo el plano complejo.* La demostración va a ser casi idéntica a la demostración, del capítulo 7, de que una función polinómica de grado par (con coeficientes reales) tiene un valor mínimo sobre todo $\mathbf{R}$; las dos demostraciones se basan en el hecho de que si $|z|$ es grande, entonces $|f(z)|$ es grande.

Empezamos poniendo, para $z \neq 0$,

$$f(z) = z^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right),$$

de modo que

$$|f(z)| = |z|^n \cdot \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right|.$$

Pongamos

$$M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|).$$

Entonces para todo z con $|z| \geq M$, tenemos $|z^k| \geq |z|$ y

$$\frac{|a_{n-k}|}{|z^k|} \leq \frac{|a_{n-k}|}{|z|} \leq \frac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}|} = \frac{1}{2n},$$

de modo que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \leq \left|\frac{a_{n-1}}{z}\right| + \cdots + \left|\frac{a_0}{z^n}\right| \leq \frac{1}{2},$$

lo cual implica que

$$\left|1 - \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq 1 - \left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq \frac{1}{2}.$$

Esto significa que

$$|f(z)| \geq \frac{|z|^n}{2} \text{ para } |z| \geq M.$$

En particular, si $|z| \geq M$ y también $|z| \geq \sqrt[n]{2|f(0)|}$, entonces

$$|f(z)| \geq |f(0)|.$$

Sea ahora $[a, b] \times [c, d]$ un rectángulo cerrado (figura 6) que contiene $\{z\colon |z| \leq \max(M, \sqrt[n]{2|f(0)|})\}$, y supóngase que el mínimo de $|f|$ sobre $[a, b] \times [c, d]$ es alcanzado en z_0, de modo que

$$(1) \quad |f(z_0)| \leq |f(z)| \quad \text{para } z \text{ en } [a, b] \times [c, d].$$

Se sigue, en particular, que $|f(z_0)| \leq |f(0)|$. Así pues,

$$(2) \quad \text{si } |z| \geq \max(M, \sqrt[n]{2|f(0)|}), \text{ entonces } |f(z)| \geq |f(0)| \geq |f(z_0)|.$$

Combinando (1) y (2) vemos que $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para todo z, de modo que $|f|$ alcanza en z_0 su valor mínimo sobre todo el plano complejo.

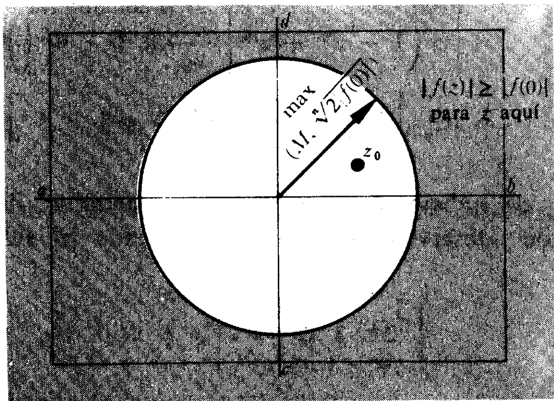


FIGURA 6

Para completar la demostración del teorema demostramos ahora que $f(z_0) = 0$. Resulta conveniente introducir la función g definida por

$$g(z) = f(z + z_0).$$

Entonces g es una función polinómica de grado n, cuyo valor absoluto mínimo se presenta en 0. Queremos demostrar que $g(0) = 0$.

Supongamos, por el contrario, que $g(0) = \alpha \neq 0$. Si m es la potencia más pequeña de z que se presenta en la expresión de g, podemos escribir

$$g(z) = \alpha + \beta z^m + c_{m+1}z^{m+1} + \cdots + c_n z^n,$$

donde $\beta \neq 0$. Ahora bien, según el teorema 24-2, existe un número complejo γ tal que

$$\gamma^m = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Poniendo entonces $d_k = c_k\gamma^k$, tenemos

$$\begin{aligned}
|g(\gamma z)| &= |\alpha + \beta\gamma^m z^m + d_{m+1}z^{m+1} + \cdots + d_n z^n| \\
&= |\alpha - \alpha z^m + d_{m+1}z^{m+1} + \cdots| \\
&= \left|\alpha\left(1 - z^m + \frac{d_{m+1}}{\alpha}z^{m+1} + \cdots\right)\right| \\
&= \left|\alpha\left(1 - z^m + z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right)\right| \\
&= |\alpha| \cdot \left|1 - z^m + z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right|.
\end{aligned}$$

Esta expresión, tan trabajosamente obtenida, nos permitirá llegar rápidamente a una contradicción. Obsérvese primero que, eligiendo $|z|$ suficientemente pequeño, tendremos

$$\left|\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right| < 1.$$

Si elegimos, entre todos los z para los que se cumple esta desigualdad, algún z que sea *real y positivo*, entonces

$$\left|z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right| < |z^m| = z^m.$$

En consecuencia, si $0 < z < 1$ tenemos

$$\begin{aligned}\left|1 - z^m + z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right| &\leq |1 - z^m| + \left|z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right| \\ &= 1 - z^m + \left|z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right| \\ &< 1 - z^m + z^m \\ &= 1.\end{aligned}$$

Ésta es la contradicción deseada: para un tal número z tenemos

$$|g(\gamma z)| < |\alpha|,$$

en contradicción con el hecho de que $|\alpha|$ es el mínimo de $|g|$ sobre todo el plano. Por lo tanto, la suposición original tiene que ser incorrecta, y $g(0) = 0$. Esto implica, finalmente, que $f(z_0) = 0$. ▮

Aun teniendo en cuenta nuestra omisión de las demostraciones de los hechos básicos acerca de funciones complejas continuas, esta demostración ha verificado un hecho profundo con sorprendentemente poco trabajo. Parece natural esperar que surjan otros interesantes desarrollos si seguimos buscando las análogas de las propiedades de las funciones reales. El próximo paso obligado es el de definir derivadas: una función f es **derivable en** a si

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(a+z) - f(a)}{z} \text{ existe,}$$

en cuyo caso el límite es designado por $f'(a)$. Es fácil demostrar que

$$\begin{aligned}f'(a) &= 0 \quad \text{si } f(z) = c, \\ f'(a) &= 1 \quad \text{si } f(z) = z, \\ (f+g)'(a) &= f'(a) + g'(a), \\ (f\cdot g)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a), \\ \left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \frac{-g'(a)}{[g(a)]^2} \quad \text{si } g(a) \neq 0, \\ (f\circ g)'(a) &= f'(g(a))\cdot g'(a);\end{aligned}$$

las demostraciones de todas estas fórmulas son exactamente las mismas que antes.

Se sigue, en particular, que si $f(z) = z^n$, entonces $f'(z) = nz^{n-1}$. Sin embargo, estas fórmulas demuestran solamente la derivabilidad de funciones racionales. Hay muchas funciones que no son derivables, contrariamente a lo que podría parecer a primera vista. Supóngase, por ejemplo, que

$$f(x + iy) = x - iy \quad (\text{es decir, } f(z) = \bar{z}).$$

Si f ha de ser derivable en 0, entonces debe existir el límite

$$\lim_{(x+iy)\to 0} \frac{f(x + iy) - f(0)}{x + iy} = \lim_{(x+iy)\to 0} \frac{x - iy}{x + iy}$$

Obsérvese, sin embargo, que

$$\text{si } y = 0, \text{entonces} \frac{x - iy}{x + iy} = 1,$$

y

$$\text{si } x = 0, \text{ entonces } \frac{x - iy}{x + iy} = -1;$$

por lo tanto, este límite no puede existir, puesto que el cociente alcanza ambos valores 1 y —1 para $x + iy$ arbitrariamente próximos a 0.

A la vista de este ejemplo, no está claro en absoluto de dónde van a proceder otras funciones derivables. Recordando las definiciones de sen y exp, se verá que no existe ninguna esperanza de poder generalizar estas definiciones a números complejos. Por el momento las perspectivas son sombrías, pero pronto se verán resueltos todos nuestros problemas.

PROBLEMAS

1. (a) Para cualquier número real y, defínase $\alpha(x) = x + iy$ (de modo que α es una función de valores complejos definida sobre **R**). Demostrar que α es continua. (Esto se sigue inmediatamente de un teorema de este capítulo.) Demostrar análogamente que $\beta(y) = x + iy$ es continua.

(b) Sea f una función continua definida sobre **C**. Para y fijo, sea $g(x) = f(x + iy)$. Demostrar que g es una función continua (definida sobre **R**).

Demostrar análogamente que $h(y) = f(x + iy)$ es continua. Indicación: Utilizar la parte (a).

2. (a) Supóngase que f es una función continua de valores reales definida sobre un rectángulo cerrado $[a, b] \times [c, d]$. Demostrar que si f toma los valores $f(z)$ y $f(w)$ para z y w en $[a, b] \times [c, d]$, entonces f toma también todos los valores comprendidos entre $f(z)$ y $f(w)$. Indicación: Considérese $g(t) = f(tz + (1 - t)w)$ para t en $[0, 1]$.

*(b) Si f es una función continua de valores complejos definida sobre $[a, b] \times [c, d]$, el enunciado de la parte (a) ya no tiene sentido, puesto que no podemos hablar de números complejos entre $f(z)$ y $f(w)$. Podríamos conjeturar que f toma todos los valores del segmento rectilíneo entre $f(z)$ y $f(w)$, pero incluso esto es falso. Hallar un ejemplo que lo demuestre.

3. (a) Demostrar que si $a_0, \ldots, a_{n-1}$ son números complejos cualesquiera, entonces existen números complejos $z_1, \ldots, z_n$ (no necesariamente distintos) tales que

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i).$$

(b) Demostrar que si $a_0, \ldots, a_{n-1}$ son *reales*, entonces $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ puede escribirse como producto de factores lineales $z + a$ y factores cuadráticos $z^2 + az + b$ cuyos coeficientes son todos reales. (Utilizar el problema 24-7.)

4. En este problema vamos a considerar solamente polinomios con coeficientes reales. Un polinomio de este tipo recibe el nombre de **suma de cuadrados** si puede escribirse en la forma $h_1^2 + \ldots + h_n^2$ para polinomios h_i de coeficientes reales.

(a) Demostrar que si f es una suma de cuadrados, entonces $f(x) \geq 0$ para todo x.

(b) Demostrar que si f y g son sumas de cuadrados, entonces también lo es $f \cdot g$.

(c) Supóngase que $f(x) \geq 0$ para todo x. Demostrar que f es una suma de cuadrados. Indicación: Escríbase primero $f(x) = x^k g(x)$, donde $g(x) \neq 0$ para todo x. Entonces k debe ser par (¿por qué?), y $g(x) > 0$ para todo x. Utilizar ahora el problema 3 (b).

5. (a) Sea A un conjunto de números complejos. Lo mismo que en el caso real, un número z recibe el nombre de **punto de acumulación** del con-

junto A si para todo ε (real) > 0, existe un punto a en A con $|z-a| < \varepsilon$ pero $z \neq a$. Demostrar la versión bidimensional del teorema de Bolzano-Weierstrass. Si A es un subconjunto infinito de $[a, b] \times [c, d]$, entonces A tiene un punto de acumulación en $[a, b] \times [c, d]$. Indicación: Divídase primero $[a, b] \times [c, d]$ por la mitad mediante una recta vertical como en la figura 7 (a). Puesto que A es infinito, por lo menos una de las dos mitades contendrá infinitos puntos de A. Divídase ésta por la mitad mediante una recta horizontal, como en la figura 7 (b). Continúese de esta manera, dividiendo alternativamente mediante rectas verticales y horizontales.

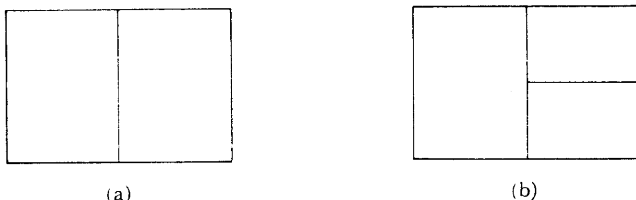


FIGURA 7

(El argumento de bisección bidimensional indicado aquí es tan clásico que el título «Bolzano-Weierstrass» sirve muchas veces para describir el método de demostración, además del teorema mismo. Véase, por ejemplo, H. Petard, «A Contribution to the Mathematical Theory of Big Game Hunting», *Amer. Math. Monthly,* **45** (1938), 446-447.)

(b) Demostrar que una función continua (de valores complejos) sobre $[a, b] \times [c, d]$ es acotada sobre $[a, b] \times [c, d]$. (Imitar el problema 21-31.)

(c) Demostrar que si f es una función continua de valores reales sobre $[a, b] \times [c, d]$, entonces f toma un valor máximo y uno mínimo sobre $[a, b] \times [c, d]$. (Se puede usar el mismo artificio que da resultado para el teorema 7-3.)

***6.** La demostración del teorema 2 no puede considerarse como completamente elemental porque la posibilidad de elegir γ con $\gamma^m = -\alpha/\beta$ depende del teorema 24-2, y por lo tanto de las funciones trigonométricas. Presenta, por lo tanto, cierto interés proporcionar una demostración elemental de que existe una solución para la ecuación $z^n - c = 0$.

(a) Hacer un cálculo explícito para demostrar que las soluciones de $z^2 - c = 0$ pueden hallarse, cualquiera que sea el número complejo c.

(b) Explicar por qué la solución de $z^n - c = 0$ puede ser reducida al caso de ser n impar.

(c) Sea z_0 el punto en que la función $f(z) = z^n — c$ alcanza su valor absoluto mínimo. Si $z_0 \neq 0$, demostrar que el entero m de la demostración del teorema 2 es igual a 1; puesto que podemos encontrar ciertamente γ con $\gamma^1 = —\alpha/\beta$, el resto de la demostración va bien para f. Basta por lo tanto demostrar que el valor absoluto mínimo de f no se presenta en 0.

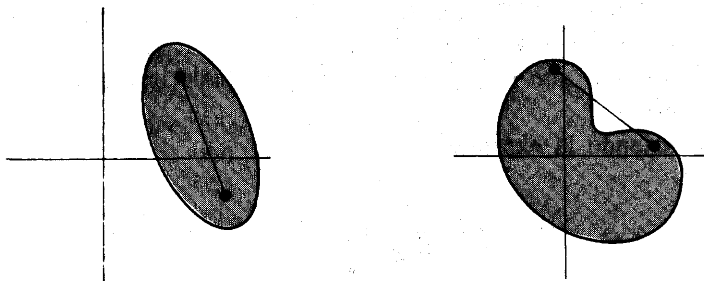
(d) Supóngase por el contrario que f alcanza un valor absoluto mínimo en 0. Al ser n impar, los puntos $\pm\delta$, $\pm\delta i$ se aplican por f en $—c \pm \delta^n$, $—c \pm \delta^n i$. Demostrar que para δ pequeños, por lo menos uno de estos puntos tiene un valor absoluto menor que el de $—c$, obteniendo así una contradicción.

7. Sea $f(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdot \cdot \cdot (z - z_k)^{m_k}$.

(a) Demostrar que $f'(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdot \cdot \cdot (z - z_k)^{m_k} \cdot \sum_{\alpha=1}^{k} m_k(z - z_k)^{-1}$.

(b) Sea $g(z) = \sum_{\alpha=1}^{k} m_k(z - z_k)^{-1}$. Demostrar que si $g(z) = 0$, entonces $z_1, \ldots, z_k$ no pueden estar todos sobre el mismo lado de una recta por z. Indicación: Utilícese el problema 24-11.

(c) Se dice que un subconjunto K del plano es **convexo** si K contiene el segmento rectilíneo que une dos cualesquiera de sus puntos (figura 8). Para un conjunto cualquiera A existe un conjunto convexo mínimo que lo contiene, el cual recibe el nombre de **envoltura convexa** de A (figura 9);



(a) subconjunto convexo del plano (b) subconjunto no convexo del plano

FIGURA 8

si un punto P no está en la envoltura convexa de A, entonces todo A está contenido en un mismo lado de alguna recta por P. Utilizando esta información, demostrar que las raíces de $f'(z) = 0$ están dentro de la en-

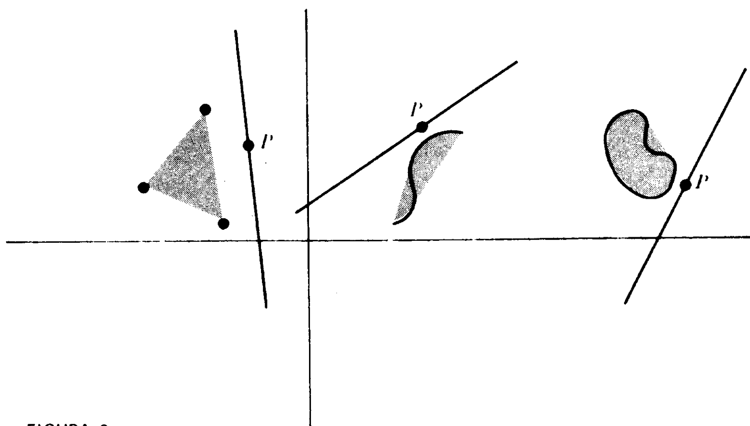


FIGURA 9

voltura convexa del conjunto $\{z_1, \ldots, z_k\}$. (Se encontrarán más detalles acerca de conjuntos convexos en la referencia 19 de la bibliografía.)

8. Demostrar que si f es derivable en z, entonces f es continua en z.

***9.** Supóngase que $f = u + iv$, donde u y v son funciones de valores reales.

(a) Para y_0 fijo sea $g(x) = u(x + iy_0)$ y $h(x) = v(x + iy_0)$. Demostrar que si $f'(x_0 + iy_0) = \alpha + i\beta$ para α y β reales, entonces $g'(x) = \alpha$ y $h'(x_0) = \beta$.

(b) Supóngase, por otra parte, que $k(y) = u(x_0 + iy)$ y $l(y) = v(x_0 + iy)$. Demostrar que $l'(y_0) = \alpha$ y $k'(y_0) = -\beta$.

(c) Supóngase que $f'(z) = 0$ para todo z. Demostrar que f es una función constante.

10. (a) Utilizando la expresión

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i}\right),$$

haiiar $f^{(k)}(x)$ para todo k.

(b) Utilizar este resultado para hallar $\operatorname{arctg}^{(k)}(0)$ para todo k.

CAPÍTULO

26

SERIES COMPLEJAS DE POTENCIAS

Si el lector no ha adivinado ya de dónde van a proceder las funciones complejas derivables, el título de este capítulo debería descubrir el secreto: pretendemos definir funciones por medio de series infinitas. Para esto hará falta un estudio de sucesiones infinitas de números complejos, y de sumas de tales sucesiones, pero (como en el caso de los límites y de la continuidad) las definiciones básicas son casi exactamente las mismas que para sucesiones y series reales.

Formalmente, una **sucesión infinita** de números complejos es una función de valores complejos cuyo dominio es **N**; la adecuada notación con subíndices de las sucesiones de números reales será también utilizada para las sucesiones de números complejos. La mejor representación de una sucesión $\{a_n\}$ de números complejos se obtiene rotulando los puntos a_n en el plano (figura 1).



FIGURA 1

La sucesión indicada en la figura 1 converge hacia 0, estando definida la «convergencia» de números complejos exactamente de la misma manera que para sucesiones reales: la sucesión $\{a_n\}$ **converge** hacia l, en símbolos

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que, para todo n,

$$\text{si } n > N, \text{ entonces } |a_n - l| < \varepsilon.$$

Esta condición significa que cualquier círculo trazado alrededor de l contendrá a_n para todo n suficientemente grande (figura 2); expresado de modo más coloquial, la sucesión queda eventualmente dentro de cualquier círculo trazado alrededor de l.

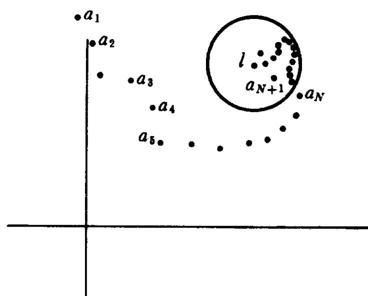


FIGURA 2

La definición de convergencia de sucesiones complejas no sólo abarca las sucesiones reales, sino que incluso puede reducirse a este caso conocido.

TEOREMA 1

Sea

$$a_n = b_n + ic_n \text{ para } b_n \text{ y } c_n \text{ reales,}$$

y sea

$$l = \beta + i\gamma \quad \text{para } \beta \text{ y } \gamma \text{ reales.}$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \gamma.$$

DEMOSTRACIÓN

La demostración se deja como ejercicio. Si queda alguna duda acerca de cómo proceder, consúltese el análogo teorema 1 del capítulo 25. ▌

La **suma** de una sucesión $\{a_n\}$ se define, una vez más, como $\lim_{n\to\infty} s_n$, donde

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Las sucesiones para las cuales este límite existe se llaman **sumables**; podemos decir también que la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** si este límite existe, y **diverge** en caso contrario. No hace falta desarrollar nuevas pruebas de convergencia de series infinitas, gracias al siguiente teorema.

TEOREMA 2

Sea

$$a_n = b_n + ic_n \text{ para } b_n \text{ y } c_n \text{ reales.}$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergen ambas, y en este caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + i\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right).$$

DEMOSTRACIÓN

Esto es una consecuencia inmediata del teorema 1 aplicado a la sucesión de sumas parciales de $\{a_n\}$. ▌

Para las series complejas existe también el concepto de convergencia absoluta:

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge absolutamente** si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge (ésta es una serie de números reales, a la cual son, por lo tanto, aplicables nuestras pruebas anteriores). El siguiente teorema ya no es tan fácil como el anterior.

TEOREMA 3

Sea

$$a_n = b_n + ic_n \text{ para } b_n \text{ y } c_n \text{ reales.}$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergen ambas absolutamente.

DEMOSTRACIÓN

Supóngase primero que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergen ambas absolutamente, es decir, que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ convergen ambas. Se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| + |c_n|$ converge. Ahora bien,

$$|a_n| = |b_n + ic_n| \leq |b_n| + |c_n|.$$

De la prueba de comparación se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge (los números $|a_n|$ y $|b_n| + |c_n|$ son reales y no negativos). Así pues, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

Supóngase ahora que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Al ser

$$|a_n| = \sqrt{b_n^2 + c_n^2},$$

está claro que

$$|b_n| \leq |a_n| \quad \text{y} \quad |c_n| \leq |a_n|.$$

Una vez más, la prueba de comparación demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ convergen. ▌

Son en particular dignas de mención dos consecuencias del teorema 3. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergen también absolutamente; en consecuencia, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergen, según el teorema 22-4, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge según el teorema 2. Dicho de otro modo, la convergencia absoluta implica la convergencia. Razonamientos análogos demuestran que cualquier reordenación de una serie absolutamente convergente tiene la misma suma. Estos hechos se pueden demostrar también directamente, sin aplicar los teoremas correspondientes para los números reales, estableciendo primero un análogo del criterio de Cauchy (véase problema 12).

Una vez establecidos estos preliminares, podemos considerar ahora **series de potencias complejas,** es decir, funciones de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$$

Aquí los números a y a_n pueden ser complejos, y como es natural estamos interesados en el comportamiento de f para z complejo. Lo mismo que en el caso real, consideraremos generalmente series de potencias centradas en 0,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n;$$

en este caso, si $f(z_0)$ converge, entonces $f(z)$ también convergerá para $|z| < |z_0|$. La demostración de este hecho será parecida a la demostración del teorema 23-6, pero, por razones que pronto se verán, no vamos a utilizar todo el aparato de la convergencia uniforme y de la prueba M de Weierstrass, a pesar de que todo esto tiene su análogo en el campo complejo. Nuestro próximo teorema generaliza por lo tanto sólo una pequeña parte del teorema 23-6.

TEOREMA 4

Supóngase que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \cdots$$

converge para algún $z_0 \neq 0$. Entonces si $|z| < |z_0|$, las dos series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots$$

convergen ambas absolutamente.

DEMOSTRACIÓN

Lo mismo que en la demostración del teorema 23-6, necesitaremos solamente el hecho de que el conjunto de los números $a_n z_0^n$ es acotado: existe un número M tal que

$$|a_n z_0^n| \leq M \text{ para todo } n.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \\ &\leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n, \end{aligned}$$

y, para $z \neq 0$,

$$\begin{aligned} |n a_n z^{n-1}| &= \frac{1}{|z|} n |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \\ &\leq \frac{M}{|z|} n \left|\frac{z}{z_0}\right|^n. \end{aligned}$$

Al ser convergentes las series $\sum_{n=0}^{\infty} |z/z_0|^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n|z/z_0|^n$, esto demuestra que tanto

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ como $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ convergen absolutamente. (El razonamiento para $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ suponía que $z \neq 0$, pero ciertamente esta serie converge también para $z = 0$.) ▮

El teorema 4 restringe evidentemente en gran manera la extensión del conjunto

$$\{z: \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{converge}\}.$$

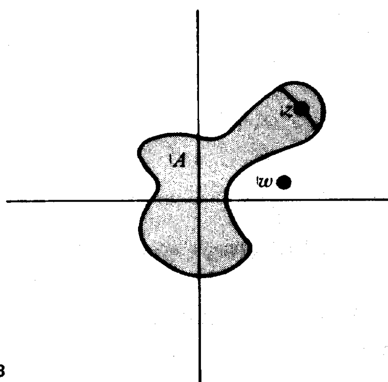


FIGURA 3

Por ejemplo, el conjunto sombreado A de la figura 3 no puede ser el conjunto de todos los z en que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge, puesto que contiene z, pero no el número w que satisface $|w| < |z|$.

Parece poco probable que el conjunto de los puntos en que una serie de potencias converge pueda ser otra cosa que el conjunto de los puntos interiores a un círculo. Si admitimos «círculos de radio 0» (en los que la serie de potencias converge solamente en 0) y «círculos de radio ∞» (cuando la serie de potencias converge en todos los puntos), entonces este enunciado se cumple (con una complicación que pronto mencionaremos); la demostración requiere sólo el teorema 4 y cierta habilidad para organizarse bien.

TEOREMA 5

Para una serie de potencias cualquiera

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^n + a_3 z^2 + \cdots$$

se cumple necesariamente una de las tres posibilidades siguientes:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge sólo para $z = 0$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente para todo z de $\mathbf{C}$.

(3) Existe un número $R > 0$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente si $|z| < R$ y diverge si $|z| > R$. (Obsérvese que no mencionamos lo que ocurre cuando $|z| = R$.)

DEMOSTRACIÓN

Sea

$$S = \{x \text{ en } \mathbf{R}\colon \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \text{ converge para algún } w \text{ con } |w| = x\}.$$

Supóngase primero que S no está acotado. Entonces para cualquier número complejo z existe un número x en S tal que $|z| < x$. Según la definición de S, esto significa que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ converge para algún w con $|w| = x > |z|$. Se sigue del teorema 4 que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente. Así pues, en este caso se cumple la posibilidad (2).

Supóngase ahora que S es acotado, y sea R la cota superior mínima de S. Si $R = 0$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge solamente para $z = 0$, de modo que se cumple la posibilidad (1). Supóngase, por otra parte, que $R > 0$. Entonces, si z es un número complejo con $|z| < R$, existe un número x en S con $|z| < x$. Una vez más, esto significa que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ converge para algún w con $|z| < |w|$, de modo que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente. Además, si $|z| > R$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ no converge, puesto que $|z|$ no está en S. ∎

El número R que se presenta en el caso (3) recibe el nombre de **radio de convergencia** de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. En los casos (1) y (2) se acostumbra a decir que el radio de convergencia es 0 e ∞, respectivamente. Cuando $0 < R < \infty$, el círculo $\{z: |z| = R\}$ recibe el nombre de **círculo de convergencia** de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Si z está fuera del círculo, entonces, por supuesto, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ no converge, pero en realidad se puede hacer una afirmación mucho más fuerte: los términos $a_n z^n$ ni siquiera están acotados. Para demostrar esto, sea w un número cualquiera con $|z| > |w| > |R|$; si los términos $a_n z^n$ estuviesen acotados, entonces la demostración del teorema 4 indicaría que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ converge, lo cual es falso. Así pues (figura 4), dentro del círculo de convergencia la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge de la mejor manera posible (absolutamente) y fuera del círculo la serie diverge de la peor manera posible (los términos $a_n z^n$ no están acotados).

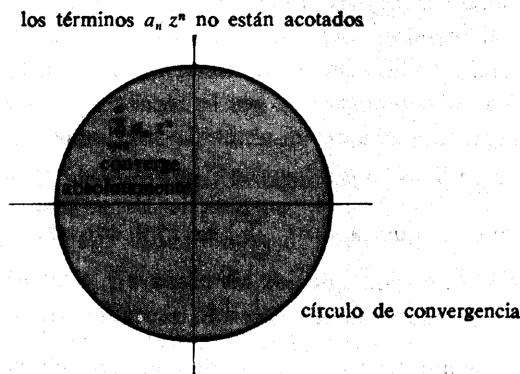


FIGURA 4

Lo que ocurre *sobre* el círculo de convergencia es una cuestión mucho más difícil. No vamos a considerar en absoluto esta cuestión, y sólo mencionaremos que existen series de potencias que convergen por todas partes sobre el círculo de convergencia, series de potencias que no convergen en ningún punto sobre dicho círculo, y series de potencias en las que se da un caso intermedio. (Véase el problema 5.)

Las manipulaciones algebraicas de las series complejas se justifican de la misma manera que en el caso real. Así pues, si las series $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ tienen ambas un radio de convergencia $\geq R$, entonces $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ tendrá también radio de convergencia $\geq R$ y $h = f + g$ en el interior del círculo de radio R. Del mismo modo, el producto de Cauchy $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, siendo $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, tiene radio de convergencia $\geq$ R y $h = fg$ dentro del círculo de radio R. Y si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia > 0 y $a_0 \neq 0$, será entonces posible hallar una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ con radio de convergencia > 0 que represente a $1/f$ dentro de su círculo de convergencia.

Pero lo que nos proponemos en este capítulo es obtener funciones derivables. Necesitamos, por lo tanto, generalizar el resultado, demostrado en el capítulo 23 para series de potencias reales, de que una función definida mediante una serie de potencias puede ser derivada término a término dentro del círculo de convergencia. En este punto ya no podemos imitar la demostración del capítulo 23, ni siquiera introduciendo la convergencia uniforme, puesto que no disponemos de ningún análogo del teorema 23-3. Utilizaremos en su lugar un razonamiento directo (el cual hubiera podido usarse también en el capítulo 23). Antes de empezar la demostración, observamos que por lo menos no existe ningún problema en cuanto a la convergencia de las series obtenidas mediante derivación término a término. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia R, entonces el teorema 4 implica inmediatamente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ converge también para $|z| < R$. Además, si $|z| > R$, de modo que los términos $a_n z^n$ no están acotados, entonces los términos $n a_n z^{n-1}$ evidentemente no están acotados, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ no converge. Esto demuestra que el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ es también exactamente R.

TEOREMA 6

Si la serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces f es derivable en z para todo z con $|z| < R$, y

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}.$$

DEMOSTRACIÓN

Vamos a utilizar otro «razonamiento $\varepsilon/3$». El hecho de que el teorema se cumple claramente para funciones polinómicas hace aconsejable poner

$$(*) \left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} \right|$$
$$\leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right|$$
$$+ \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=1}^{N} na_n z^{n-1} \right|$$
$$+ \left| \sum_{n=1}^{N} na_n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} \right|.$$

Demostraremos que para cualquier $\varepsilon > 0$, cada uno de los valores absolutos de la derecha puede hacerse $< \varepsilon/3$ eligiendo N suficientemente grande y h suficientemente pequeño. Esto demostrará claramente el teorema.

Solamente presentará alguna dificultad el primer término de la derecha de (*). Para empezar, elíjase algún z_0 con $|z| < |z_0| < R$; en adelante consideraremos solamente valores de h con $|z+h| \leq |z_0|$. La expresión $((z+h)^n - z^n)/h$ puede escribirse de manera más conveniente si recordamos que

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1}.$$

Aplicando esto a

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \frac{(z+h)^n - z^n}{(z+h) - z},$$

obtenemos

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = (z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}.$$

Al ser

$$|(z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}| \leq n|z_0|^{n-1},$$

obtenemos

$$\left| a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right| \leq n|a_n| \cdot |z_0|^{n-1}.$$

Pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| \cdot |z_0|^{n-1}$ converge, de modo que si N es suficientemente grande, entonces

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| \cdot |z_0|^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Esto significa que

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n ((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right|$$
$$= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right|$$
$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| \cdot |z_0|^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En resumen, si N es suficientemente grande, entonces

$$(1) \quad \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para *todo* h con $|z+h| \leq |z_0|$.

El tercer término de la derecha de (*) resulta fácil de tratar: Al ser $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ convergente, se sigue que si N es suficientemente grande, entonces

$$(2)\quad \left|\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{N} na_n z^{n-1}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Finalmente, eligiendo un N tal que (1) y (2) se cumplan, observamos que

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} = \sum_{n=1}^{N} na_n z^{n-1},$$

puesto que la función polinómica $g(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ es ciertamente derivable. Por lo tanto,

$$(3)\quad \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=1}^{N} na_n z^{n-1}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

para h suficientemente pequeño.

Según hemos indicado ya, (1), (2) y (3) demuestran el teorema. ▮

El teorema 6 tiene un corolario evidente: una función representada mediante una serie de potencias es infinitamente derivable dentro del círculo de convergencia, y la serie de potencias es su serie de Taylor en 0. Se sigue en particular que f es continua dentro del círculo de convergencia, ya que una función derivable en z es continua en z (problema 25-8).

La continuidad de una serie de potencias dentro de su círculo de convergencia ayuda a explicar el comportamiento de ciertas series de Taylor obtenidas para funciones reales, y proporciona las soluciones prometidas a las cuestiones que surgieron al final del capítulo 23. Hemos visto ya que la serie de Taylor para la función $f(z) = 1/(1 + z^2)$, a saber,

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots,$$

converge para valores de z reales solamente cuando $|z| < 1$, y en consecuencia tiene radio de convergencia 1. No es accidental que el círculo de convergencia contenga los dos puntos i y $-i$ en los cuales f no está definida. Si esta serie de potencias convergiera en un círculo de radio mayor que 1, entonces (figura 5) representaría una función que sería continua en aquel círculo, en particular en i y en $-i$. Pero esto es imposible, puesto que es igual a $1/(1 + z^2)$ dentro del círculo unidad, y $1/(1 + z^2)$ no tiende hacia ningun límite cuando z tiende hacia i o $-i$ desde dentro del círculo unidad.

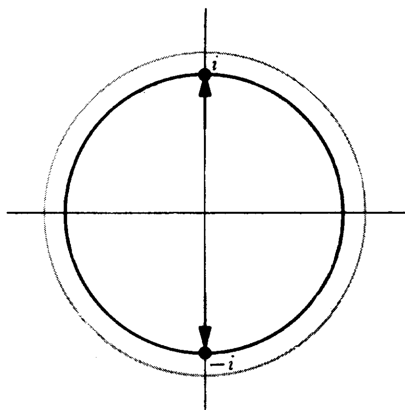


FIGURA 5

El uso de los números complejos arroja también alguna luz sobre el extraño comportamiento de la serie de Taylor para la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Aunque no hemos definido todavía e^z para z complejo, es de esperar que se cumpla que si y es real y distinto de 0, entonces

$$f(iy) = e^{-1/(iy)^2} = e^{1/y^2}.$$

El hecho interesante acerca de esta expresión es que se hace grande cuando y se hace pequeño. Así pues, f no será ni siquiera continua en 0 cuando se defina para números complejos, de modo que apenas puede sorprender que sea igual a su serie de Taylor solamente para $z = 0$.

El método que utilizaremos en realidad para definir e^z (lo mismo que sen z y cos z) para z complejo debería ahora estar claro. Para x reales sabemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \\
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots
\end{aligned}$$

Para z complejo *definimos* por lo tanto

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots, \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \\
\exp(z) = e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \cdots
\end{aligned}$$

Entonces $\operatorname{sen}'(z) = \cos z$, $\cos'(z) = -\operatorname{sen} z$, y $\exp'(z) = \exp(z)$ según el teorema 6. Además, si sustituimos z por iz en la serie para e^z, y hacemos una reordenación de los términos (justificada por la convergencia absoluta), ocurre algo particularmente interesante:

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \cdots \\
&= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} + \cdots \quad . \\
&= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

de modo que

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z.$$

Según las definiciones (es decir, las series de potencias), está claro que

$$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z,$$
$$\cos(-z) = \cos z,$$

de modo que tenemos también

$$e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z.$$

A partir de las ecuaciones para e^{iz} y e^{-iz} podemos deducir las fórmulas

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2},$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

El desarrollo de las series complejas de potencias coloca así a la función exponencial en el verdadero centro del desarrollo de las funciones elementales: pone de manifiesto una conexión entre las funciones trigonométricas y la exponencial que nunca pudo imaginarse cuando se definieron por primera vez estas funciones, y que nunca se hubiese descubierto de no haber sido por la introducción de los números complejos. Como producto secundario de esta relación, obtenemos una conexión, hasta aquí insospechada, entre los números e y π: si en la fórmula

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$$

hacemos $z = \pi$, obtenemos el notable resultado

$$e^{i\pi} = -1.$$

(Con mayor generalidad, $e^{2\pi i/n}$ es una raíz n-ésima de 1.)

Con estas observaciones concluimos nuestra investigación de las funciones complejas. Y a pesar de todo quedan todavía sin mencionar algunos hechos básicos acerca de series de potencias. Hasta aquí, apenas hemos considerado series de potencias centradas en a,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

excepto para $a = 0$. Esta omisión se hizo en parte para simplificar la exposición.

Para las series de potencias centradas en a existen versiones evidentes de todos los teoremas de este capítulo (las demostraciones requieren solamente modificaciones triviales): existe un número R (posiblemente 0 o «∞») tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ converge absolutamente para z con $|z-a| < R$, y tiene términos no acotados para z con $|z-a| > R$; además, para todo z con $|z-a| < R$ la función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

tiene derivada

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}.$$

Resulta menos directo investigar la posibilidad de representar una función mediante una serie de potencias centrada en b, si ya está escrita como serie de potencias centrada en a. Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

tiene radio de convergencia R, y b es un punto con $|b-a| < R$ (figura 6), entonces se cumple que $f(z)$ puede expresarse también como serie de potencias centrada en b,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$$

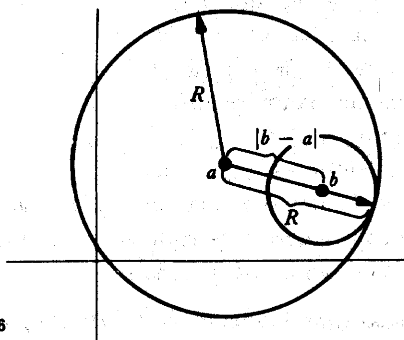


FIGURA 6

(los números b_n son necesariamente $f^{(n)}(b)/n!$); además, esta serie tiene un radio de convergencia que es por lo menos $R - |b - a|$ *(puede ser mayor).*

No vamos a demostrar los hechos mencionados en el párrafo anterior, y quedan otros hechos importantes que tampoco vamos a demostrar. Por ejemplo, si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

y $g(b) = a$, esperaríamos que $f \circ g$ tendría que ser expresable como serie de potencias centrada en b. Todos estos hechos podrían demostrarse ahora sin necesidad de introducir nuevos conceptos básicos, pero las demostraciones no resultarían tan fáciles como las demostraciones acerca de sumas, productos e inversas de series de potencias. La posibilidad de cambiar una serie de potencias centrada en a en una centrada en b resulta todavía más complicado, y el tratamiento de $f \circ g$ exige verdadera habilidad. En vez de terminar esta sección con una exhibición de potencia calculatoria, vamos a dar una visión anticipada del «análisis complejo», una de las ramas más elegantes de la matemática, donde todos estos hechos se deducen como consecuencias directas de algunos resultados fundamentales.

Las series de potencias fueron introducidas en este capítulo con el fin de obtener funciones complejas derivables. Puesto que estas funciones resultan ser en realidad infinitamente derivables, resulta natural suponer que sólo hemos seleccionado una colección muy especial de funciones complejas derivables. Los teoremas fundamentales de análisis complejo demuestran que esto no es así en absoluto:

> *Si una función compleja está definida en alguna región A del plano y es derivable en A, entonces automáticamente es infinitamente derivable en A. Además, para todo punto a de A la serie de Taylor para f en a convergerá hacia f en cualquier círculo contenido en A (figura 7).*

Estos hechos son los primeros que hay que demostrar en el análisis complejo. Es imposible dar una idea de las demostraciones mismas: los métodos utilizados difieren esencialmente de los del análisis elemental. Sin embargo, admitido esto, los hechos mencionados pueden demostrarse fácilmente.

Supóngase, por ejemplo, que f y g son funciones que pueden expresarse como series de potencias. Entonces, según hemos demostrado, f y g son derivables; se sigue entonces de fáciles teoremas generales que $f+g$, $f \cdot g$, $1/g$ y $f \circ g$ son también derivables. Recurriendo a los resultados del análisis complejo, se sigue que pueden expresarse como series de potencias.

Sabemos ya como se calculan las series de potencias para $f+g$, $f \cdot g$ y $1/g$ a par-

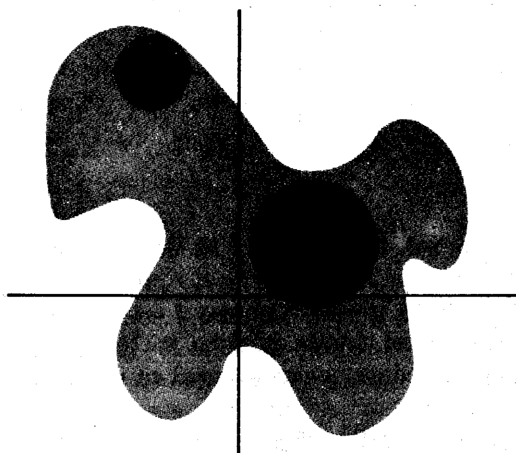


FIGURA 7

tir de las series para f y g. Resulta también fácil conjeturar como se calcularía una expresión para $f \circ g$ en forma de serie de potencias en $(z - b)$ partiendo de los desarrollos en serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - b)^k,$$

con $a = g(b) = b_0$, de modo que

$$g(z) - a = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z - b)^k.$$

Sabemos en primer lugar como se calcula la serie de potencias

$$(g(z) - a)^l = \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k(z - b)^k\right)^l,$$

y esta serie de potencias empezará con $(z - b)^l$. En consecuencia, el coeficiente de z^n en

$$f(g(z)) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(g(z) - a)^l$$

se podrá calcular como suma finita con coeficientes que serán sólo los que surjan

del desarrollo de las n primeras potencias de $g(z) - a$.

Análogamente, si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$$

tiene radio de convergencia R, entonces f es derivable en la región

$$A = \{z: |z - a| < R\}.$$

Así pues, si b está en A, es posible expresar f como serie de potencias centrada en b, la cual convergerá en el círculo de radio $R - |b - a|$. El coeficiente de z^n será $f^{(n)}(b)/n!$ Esta serie puede converger en realidad en un círculo más amplio, ya que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$ puede ser la serie para una función derivable en una región más amplia que A. Por ejemplo, supóngase que $f(z) = 1/(1 + z^2)$. Entonces f es derivable, excepto en i y $-i$, donde no está definida. Así pues, $f(z)$ puede expresarse como serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con radio de convergencia 1 (sabemos de hecho que $a_{2n} = (-1)^n$ y $a_k = 0$ si k es impar). Es también posible escribir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - \tfrac{1}{2})^n,$$

donde los números b_n son necesariamente $b_n = f^{(n)}(\frac{1}{2})/n!$. Podemos predecir fácilmente el radio de convergencia de esta serie: es $\sqrt{1 + (\frac{1}{2})^2}$, la distancia de $\frac{1}{2}$ a i o $-i$ (figura 8).

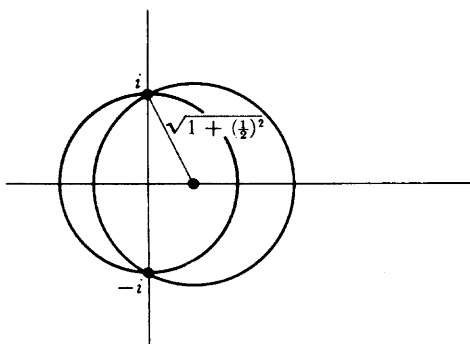


FIGURA 8

Como un incentivo más para proseguir el estudio del análisis complejo, mencionamos otro resultado que está muy cerca de la superficie y que se encuentra en cualquier tratado sobre la materia.

Para valores de z reales, los valores de sen z están siempre entre —1 y 1, pero para los z complejos esto no se cumple en absoluto. Efectivamente, si $z = iy$, para y real, entonces

$$\text{sen } iy = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2}.$$

Si y es grande, entonces sen iy es también grande en valor absoluto. Este comportamiento de sen es típico de funciones que están definidas y son derivables sobre todo el plano complejo (tales funciones reciben el nombre de *enteras*). Un resultado que se presenta muy pronto en análisis complejo es el siguiente:

Teorema de Liouville: Las únicas funciones enteras acotadas son las funciones constantes.

Como aplicación sencilla del teorema de Liouville, considérese una función polinómica

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-} + \cdots + a_n,$$

donde $n > 1$, de modo que f no es constante. Sabemos ya que $f(z)$ es grande cuando z es grande, de modo que el teorema de Liouville no nos dice nada interesante acerca de f. Pero considérese la función

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

Si $f(z)$ no fuese nunca 0, entonces g sería entera; al hacerse $f(z)$ grande para z grande, la función g sería también acotada, en contradicción con el teorema de Liouville. Así pues, $f(z) = 0$ para algún z, con lo que hemos demostrado el teorema fundamental del álgebra.

PROBLEMAS

1. Decir si converge cada una de las siguientes series, y si converge absolutamente.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2i}{2^n}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)^n$.

(v) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n} + i^n \frac{\log n}{n}$.

2. Utilizar la prueba del cociente para demostrar que el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias es 1. (En cada caso los cocientes de términos sucesivos tenderán a un límite < 1 si $|z| < 1$, pero para $|z| > 1$ los cocientes tenderán hacia ∞ o hacia un límite > 1.)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (n + 2^{-n})z^n$.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n!}$.

3. Utilizar la prueba de la raíz (problema 22-7) para hallar el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias.

(i) $\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{3}+\dfrac{z^3}{2^2}+\dfrac{z^4}{3^2}+\dfrac{z^5}{2^3}+\dfrac{z^6}{3^3}+\cdots.$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!z^n}{n^n}.$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n.$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}z^n.$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n!}.$

4. La prueba de la raíz puede utilizarse siempre, por lo menos en teoría, para hallar el radio de convergencia de una serie de potencias; de hecho, un análisis detenido de la situación lleva a una fórmula para el radio de convergencia conocida por «fórmula de Cauchy-Hadamard». Supóngase primero que el conjunto de los números $\sqrt[n]{|a_n|}$ es acotado.

(a) Utilizar el problema 22-7 para demostrar que si $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}|z|<1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ converge.

(b) Demostrar también que si $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}|z|>1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ tiene términos no acotados.

(c) Las partes (a) y (b) demuestran que el radio de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ es $1/\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ (donde «1/0» significa «∞»). Para completar la fórmula defínase $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$ si el conjunto de todos los $\sqrt[n]{|a_n|}$ es no acotado. Demostrar que en este caso $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ diverge para $z\neq 0$, de modo que el radio de convergencia es 0 (el cual puede ser considerado como «1/∞»).

5. Considérese las tres series siguientes del problema 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

Demostrar que la primera serie converge por todas partes sobre el círculo unidad; que la tercera serie no converge en ninguna parte sobre el círculo unidad, y que la segunda serie converge para un punto por lo menos del círculo unidad y diverge también sobre dicho círculo por lo menos en un punto.

6. (a) Demostrar que $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$ para todos los números complejos z y w. demostrando que la serie infinita para e^{z+w} es el producto de Cauchy de las series para e^z y e^w.

(b) Demostrar que $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$ y $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$ para todos los complejos z y w.

7. (a) Demostrar que todo número complejo de valor absoluto 1 puede expresarse como e^{iy} para algún número real y.

(b) Demostrar que $|e^{x+iy}| = e^x$ para x e y reales.

8. (a) Demostrar que exp toma todos los valores complejos excepto 0.

(b) Demostrar que sen toma todos los valores complejos.

9. Trabajando con series de potencias, calcular, para cada una de las funciones que siguen, los tres primeros términos no nulos de la serie de Taylor centrada en 0.

(i) $f(z) = \operatorname{tg} z.$

(ii) $f(z) = z(1 - z)^{-1/2}.$

(iii) $f(z) = \dfrac{e^{\operatorname{sen} z} - 1}{z}.$

(iv) $f(z) = \log(1 - z^2).$

(v) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 z}{z^2}.$

(vi) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z^2)}{z \cos^2 z}.$

(vii) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 - 2z^2 + 3z}.$

(viii) $f(z) = \dfrac{1}{z}\left[e^{(\sqrt{1+z}-1)} - 1\right].$

10. (a) Supóngase que ponemos una función compleja derivable f en la forma $f = u + iv$, siendo u y v reales. Designemos por $\bar{u}$ y $\bar{v}$ las restricciones de u y v a valores reales. Más claramente, $\bar{u}(x) = u(x)$ para números reales x (pero $\bar{u}$ no está definida por otros x). Aplicando el problema 25-9, demostrar que para x reales se tiene

$$f'(x) = \bar{u}'(x) + i\bar{v}'(x),$$

designando por f' la derivada compleja y por $\bar{u}'$ y $\bar{v}'$ las derivadas ordinarias de estas funciones reales en **R**.

(b) De un modo más general, demostrar que

$$f^{(k)}(x) = \bar{u}^{(k)}(x) + i\bar{v}^{(k)}(x).$$

(c) Supóngase que f satisface la ecuación

$$(*) \qquad f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_0 f = 0,$$

siendo los a_i números reales y designando por $f^{(k)}$ las derivadas de orden superior. Demostrar que $\bar{u}$ y $\bar{v}$ satisfacen la misma ecuación, designando por $\bar{u}^{(k)}$ y $\bar{v}^{(k)}$ las derivadas de orden superior de funciones reales de **R**.

(d) Demostrar que si $a = b + ci$ es una raíz compleja de la ecuación $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, entonces $f(x) = e^{bx} \cos cx$ y $f(x) = e^{bx} \cos x$ son ambas soluciones de (*).

11. (a) Demostrar que exp *no* es uno-uno sobre **C**.

(b) Dado $w \neq 0$, demostrar que $e^z = w$ si y sólo si $z = x + iy$ con $x = \log |w|$ (aquí log denota la función logarítmica real), e y un argumento de w.

*(c) Demostrar que no existe ninguna función continua log definida sobre números complejos no nulos, tal que $\exp(\log(z)) = z$ para todo $z \neq 0$. (Demostrar que log no puede ni siquiera ser definida de manera continua para $|z| = 1$.) Al no haber manera de definir una función logarítmica continua no podemos hablar de *el* logaritmo de un número complejo, sino sólo de «un logaritmo para w», significando uno de los infinitos números z con $e^z = w$. Y para los números complejos a y b, definimos a^b como un *conjunto* de números complejos, a saber, el conjunto de todos los números $e^{b \log a}$ o, más exactamente, el conjunto de todos los números e^{bz}, donde z es un logaritmo de a.

(d) Si m es un entero, entonces a^m consiste en un número único, el que viene dado por la definición elemental corriente de a^m.

(e) Si m y n son enteros, entonces el conjunto $a^{m/n}$ coincide con el conjunto de los valores dados mediante la definición elemental corriente, o sea el conjunto de los b^m en los que b es una raíz n-ésima de a.
(f) Si a y b son reales y b es irracional, entonces a^b contiene infinitos miembros, incluso para $a > 0$.
(g) Hallar todos los logaritmos de i y hallar todos los valores de i^i.
(h) Designamos por $(a^b)^c$ el conjunto de todos los números de la forma z^c para algún número z del conjunto a^b. Demostrar que $(1^i)^i$ tiene infinitos valores, mientras que $1^{i.i}$ tiene sólo uno.
(i) Demostrar que todos los valores de $a^{b.c}$ son también valores de $(a^b)^c$. De aquí se sigue, por supuesto, que todos los valores de $a^{b.c}$ son también valores de $(a^c)^b$. ¿Es $a^{b.c} = (a^b)^c \cap (a^c)^b$?

12. (a) Para x real, demostrar que podemos elegir $\log(x + i)$ y $\log(x - i)$ como

$$\log(x + i) = \log(1 + x^2) + i\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right),$$

$$\log(x - i) = \log(1 + x^2) - i\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right).$$

(Servirá de ayuda observar que $\pi/2 - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1/x$ para $x \neq 0$.)

(b) De la expresión

$$\frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i}\right)$$

se obtiene, formalmente,

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2i}[\log(x - i) - \log(x + i)].$$

Utilizar la parte (a) para comprobar que esta solución concuerda con la usual.

13. (a) Una sucesión $\{a_n\}$ de números complejos recibe el nombre de **sucesión de Cauchy** si $\lim_{m,n\to\infty} |a_m - a_n| = 0$. Supóngase que $a_n = b_n + ic_n$, donde b_n y c_n son reales. Demostrar que $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si y sólo si $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son sucesiones de Cauchy.
(b) Demostrar que toda sucesión de Cauchy de números complejos converge.
(c) Dar demostraciones directas, sin aplicar los teoremas acerca de series reales, de que una serie absolutamente convergente es convergente y de

que cualquier reordenación tiene la misma suma. (Está permitido, y en realidad es aconsejable, utilizar las demostraciones de los teoremas correspondientes para series reales.)

14. (a) Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\,\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n}{2}\,x\right)}{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}\,e^{i(n+1)x/2}.$$

(b) Deducir las fórmulas para $\sum_{k=1}^{n} \cos kx$ y $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx$ dadas en el problema 15-33.

15. Sea $\{a_n\}$ la sucesión de Fibonacci, $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.
(a) Si $r_n = a_{n+1}/a_n$, demostrar que $r_{n+1} = 1 + 1/r_n$.
(b) Demostrar que $r = \lim_{n\to\infty} r_n$ existe, y $r = 1 + 1/r$. Concluir que $r = (1+\sqrt{5})/2$.
(c) Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia $2/(1 + \sqrt{5})$. (Utilizando los teoremas no demostrados en este capítulo, y el hecho de que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = -1/(z^2 + z - 1)$ del problema 23-8, hubiésemos podido predecir que el radio de convergencia es el valor absoluto mínimo de las raíces de $z^2 + z - 1 = 0$; puesto que las raíces son $(-1 \pm \sqrt{5})/2$, el radio de convergencia debería ser $(-1 + \sqrt{5})/2$. Obsérvese que este número es exactamente igual a $2/(1 + \sqrt{5})$.)

16. Puesto que $(e^z - 1)/z$ puede escribirse como serie de potencias, $1 + z/2! + z^2/3! + \ldots$, que es distinta de cero en 0, se sigue que existe una serie de potencias

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}\,z^n$$

con radio de convergencia distinto de cero. Utilizando los teoremas no demostrados en este capítulo, podemos incluso predecir el radio de convergen-

cia; es 2π, puesto que éste es el valor absoluto mínimo de los números $z = 2k\pi i$, para los cuales $e^z - 1 = 0$. Los números b_n que aparecen aquí reciben el nombre de **números de Bernouilli.***

(a) Claramente $b_0 = g(0) = 1$. Demostrar ahora que

$$\frac{z}{e^z - 1} = -\frac{z}{2} + \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1},$$

$$\frac{e^{-z} + 1}{e^{-z} - 1} = -\frac{e^z + 1}{e^z - 1},$$

y deducir que

$$b_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad b_n = 0 \quad \text{si } n \text{ es impar y } n > 1.$$

(b) Hallando el coeficiente de z^n en el segundo miembro de la ecuación

$$z = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k\right)\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right),$$

demostrar que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} b_i = 0 \quad \text{para } n > 1.$$

Esta fórmula nos permite calcular cualquier b_k en términos de los anteriores, y demuestra que cada uno de ellos es racional. Calcular dos o tres de los siguientes:

$$b_2 = \tfrac{1}{6}, \quad b_4 = -\tfrac{1}{30}, \quad b_6 = \tfrac{1}{42}, \quad b_8 = -\tfrac{1}{30}.$$

*(c) La parte (a) demuestra que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}}.$$

Sustituir z por $2iz$ y demostrar que

* Algunas veces los números $B_n = (-1)^{n-1} b_{2n}$ son llamados números de Bernoullí, porque $b_n = 0$ si n es impar y > 1 (véase parte (a)) y porque los números b_{2n} son de signo alternante, si bien no vamos a demostrar esto. Se usan también otras modificaciones de esta nomenclatura.

$$z \text{ ctg } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!}(-1)^n 2^{2n} z^{2n}.$$

*(d) Demostrar que

$$\text{tg } z = \text{ctg } z - 2 \text{ ctg } 2z.$$

*(e) Demostrar que

$$\text{tg } z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!}(-1)^{n-1} 2^{2n}(2^{2n}-1) z^{2n-1}.$$

(Esta serie converge para $|z| < \pi/2$.)

17. Los números de Bernoulli desempeñan un papel importante en un teorema cuya introducción se hace cómodamente mediante una notación disparatada. Utilicemos D para denotar el «operador de derivación», de modo que Df denota f'. Entonces $D^k f$ significará $f^{(k)}$ y $e^D f$ significará $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}/n!$ (por supuesto esta serie no tiene sentido en general, pero tendrá sentido si f es, por ejemplo, una función polinómica). Finalmente, sea Δ el «operador diferencia» para el cual $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. El teorema de Taylor implica ahora, prescindiendo de cuestiones de convergencia, que

$$f(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!},$$

o

$$(*) \quad f(x+1) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!};$$

podemos escribir esto simbólicamente como $\Delta f = (e^D - 1)f$, donde 1 es el «operador identidad». Esto puede escribirse, todavía más simbólicamente, $\Delta = e^D - 1$, lo cual sugiere que

$$D = \frac{D}{e^D - 1}\Delta.$$

Así pues, deberíamos tener evidentemente

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} D^k \Delta,$$

es decir,

$$(**) \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} [f^{(k)}(x+1) - f^{(k)}(x)].$$

¡Lo bueno que tiene todo este disparate es que da resultado!

(a) Demostrar que (**) es literalmente verdad si f es una función polinómica (en cuyo caso la suma infinita es en realidad una suma finita). Indicación: Aplicando (*) a $f^{(k)}$, hallar una fórmula para $f^{(k)}(x+1) - f^{(k)}(x)$; utilizar después la fórmula del problema 16(b). para hallar el coeficiente de $f^{(j)}(x)$ del segundo miembro de (**).

(b) Deducir de (**) que

$$f'(0) + \cdots + f'(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} [f^{(k)}(n+1) - f^{(k)}(0)].$$

(c) Demostrar que para cualquier función polinómica g tenemos

$$g(0) + \cdots + g(n) = \int_0^{n+1} g(t)\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k!} [g^{(k-1)}(n+1) - g^{(k-1)}(0)].$$

(d) Aplicar esto a $g(x) = x^p$ para demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{b_k}{k} \binom{p}{k-1} n^{p-k+1}.$$

Utilizando el hecho de que $b_1 = -\frac{1}{2}$, demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \sum_{k=2}^{p+1} \frac{b_k}{k} \binom{p}{k-1} n^{p-k+1}.$$

Los diez primeros ejemplares de esta fórmula fueron expuestos en el problema 2-7, el cual proponía como ejercicio descubrir la regla general. Esto puede parecer ahora una sugerencia absurda, pero los números de Bernoulli fueron descubiertos en realidad precisamente de esta manera. Después de escribir estas diez fórmulas, Bernoulli dice (en su obra póstuma *Ars Conjectandi,* 1713): «Cualquiera que examine la serie en cuanto a su regularidad puede continuar la tabla.» Escribe después la fórmula anterior sin dar de ella demostración alguna, observando solamente que los coeficientes b_k (que él denota simplemente por $A, B, C, \ldots$) satisfacen la ecuación del problema 16(b). La relación entre estos números y los coeficientes de las series de potencias para $z/(e^z - 1)$ fue descubierta por Euler.

***18.** La fórmula del problema 17 (c) puede generalizarse al caso en que g no es una función polinómica; la suma infinita debe ser sustituida por una suma finita más un resto. Para hallar una expresión del resto, resulta útil introducir algunas funciones nuevas.

(a) Los *polinomios de Bernoulli* φ_n están definidos por

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} x^k.$$

Los tres primeros son

$$\varphi_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$\varphi_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$\varphi_3(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}.$$

Demostrar que

$$\begin{aligned} \varphi_n(0) &= b_n, \\ \varphi_n(1) &= b_n \quad \text{si } n > 1, \\ \varphi_n'(x) &= n\varphi_{n-1}(x), \\ \varphi_n(x) &= (-1)^n \varphi_n(1-x) \text{ para } n > 1. \end{aligned}$$

Indicación: Demostrar la última ecuación mediante inducción sobre n, empezando con $n = 2$.

(b) Sea $R_N{}^k(x)$ el resto de la fórmula de Taylor para $f^{(k)}$, sobre el intervalo $[x, x+1]$, de modo que

$$(*) \qquad f^{(k)}(x+1) - f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(k+n)}(x)}{n!} + R_N{}^k(x).$$

Demostrar que

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!} [f^{(k)}(x+1) - f^{(k)}(x)] - \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!} R_{N-k}{}^k(x).$$

Indicación: Imitar el problema 17 (a). Obsérvese el subíndice $N-k$ de R.

(c) Utilizar la forma integral del resto para demostrar que

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!} R_{N-k}{}^k(x) = \int_x^{x+1} \frac{\varphi_N(x+1-t)}{N!} f^{(N+1)}(t)\, dt.$$

(d) Deducir la «fórmula de sumación de Euler-Maclaurin»:

$$\begin{aligned} &g(x) + g(x+1) + \cdots + g(x+n) \\ &\quad = \int_x^{x+n+1} g(t)\, dt + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{k!} [g^{(k-1)}(x+n-1) - g^{(k-1)}(x)] + S_N(x, n), \end{aligned}$$

donde

$$S_N(x, n) = -\sum_{j=0}^{n} \int_{x+j}^{x+j+1} \frac{\varphi_N(x+j+1-t)}{N!} g^{(N)}(t)\, dt.$$

(e) Sea ψ_n la función periódica, con período 1, que satisface $\psi_n(t) = \varphi_n(t)$ para $0 \leq t < 1$. (La parte (a) implica que si $n > 1$, entonces ψ_n es continua, ya que $\varphi_n(1) = \varphi_n(0)$, y también que ψ_n es par si n es par, e impar si n es impar.) Demostrar que

$$S_N(x, n) = -\int_x^{x+n+1} \frac{\psi_N(x-t)}{N!} g^{(N)}(t)\,dt$$

$$\left(= (-1)^{N+1} \int_x^{x+n+1} \frac{\psi_N(t)}{N!} g^{(N)}(t)\,dt \quad \text{si } x \text{ es un entero}\right).$$

Contrariamente a lo que ocurre con el resto del teorema de Taylor, el resto $S_N(x, n)$ no satisface por lo general $\lim_{N\to\infty} S_N(x, n) = 0$, porque los números y las funciones de Bernoulli se hacen grandes muy rápidamente (a pesar de que los primeros ejemplos no sugieren esto). Sin embargo, se puede obtener muchas veces información importante a partir de la fórmula de sumación. La situación general se comprende mejor dentro del contexto de un estudio especializado («series asintóticas»), pero el próximo problema muestra un ejemplo particularmente importante.

**19. (a) Utilizar la fórmula de Euler-Maclaurin, con $N = 2$, para demostrar que

$$\log 1 + \cdots + \log(n-1) = \int_1^n \log t\,dt - \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \int_1^n \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt.$$

(b) Demostrar que

$$\log\left(\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n+1/12n}}\right) = \frac{11}{12} + \int_1^n \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt.$$

(c) Explicar por qué existe la integral impropia $\beta = \int_1^\infty \psi_2(t)/2t^2\,dt$, y demostrar que si $\alpha = \exp(\beta + 11/12)$, entonces

$$\log\left(\frac{n!}{\alpha n^{n+1/2}e^{-n+1/12n}}\right) = -\int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt.$$

(d) El problema 18-53 (d) demuestra que

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

Utilizar la parte (c) para demostrar que

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^2 n^{2n+1} e^{-2n} 2^{2n}}{\alpha(2n)^{2n+1/2} e^{-2n}\sqrt{n}},$$

y concluir que $\alpha = \sqrt{2\pi}$.

(e) Demostrar que

$$\int_0^{1/2} \varphi_2(t)\,dt = \int_0^1 \varphi_2(t)\,dt = 0.$$

(Se puede hacer directamente los cálculos, pero el resultado es también consecuencia inmediata del problema 18 (a).) ¿Qué se puede ahora decir de las gráficas $\bar{\psi}(x) = \int_0^x \psi_2(t)\,dt$ y $\bar{\bar{\psi}}(x) = \int_0^x \bar{\psi}(t)\,dt$? Utilizando esta información y la integración por partes demostrar que

$$\int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt > 0.$$

(f) Demostrar que el valor máximo de $|\varphi_2(x)|$ para x en $[0, 1]$ es $\frac{1}{8}$, de modo que

$$\left|\int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt\right| < \frac{1}{12n}.$$

(g) Concluir finalmente que

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n+1/12n}.$$

El resultado final del problema 19, una forma sólida de la fórmula de Stirling, demuestra que $n!$ es aproximadamente $\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}$, en el sentido de que esta expresión difiere de $n!$ en una cantidad que es pequeña comparada con n cuando

n es grande. Por ejemplo, para $n = 10$ obtenemos 3 598 696 en vez de 3 628 800, con un error $< 1\ \%$.

Una forma más general de la fórmula de Stirling ilustra la naturaleza «asintótica» de la fórmula de sumación. El mismo razonamiento usado en el problema 19 puede usarse ahora para demostrar que para $N \geq 2$ tenemos

$$\log\left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}e^{-n}}\right) = \sum_{k=2}^{N} \frac{b_k}{k(k-1)n^{k-1}} \pm \int_n^\infty \frac{\psi_N(t)}{N!\, t^N}\, dt.$$

Puesto que ψ_N es acotado, podemos obtener estimaciones de la forma

$$\left|\int_n^\infty \frac{\psi_N(t)}{N!\, t^N}\, dt\right| \leq \frac{M_N}{n^{N-1}}.$$

Si N es grande, la constante M_N será también grande; pero para valores de n muy grandes el factor n^{1-N} hará el producto muy pequeño. Así pues, la expresión

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}e^{-n} \cdot \exp\left(\sum_{k=2}^{N} \frac{b_k}{k(k-1)n^{k-1}}\right)$$

puede ser una aproximación muy mala para $n!$ cuando n es pequeño, pero para n grande (*lo grande* que tenga que ser dependerá de N) será una aproximación muy buena (*lo buena* que sea dependerá de N).

PARTE 5
EPÍLOGO

Hubo una vez un ingeniosísimo arquitecto
que había concebido un método nuevo
para edificar casas,
empezando por el tejado y prosiguiendo
hacia abajo hasta los cimientos.

JONATHAN SWIFT

CAPÍTULO

27

CUERPOS

A lo largo de todo este libro hemos procurado definir concienzudamente todos los conceptos importantes, incluso términos tales como «función», para los cuales muchas veces se considera suficiente una definición intuitiva. Pero **Q** y **R**, los dos protagonistas principales de esta historia, solamente han sido nombrados, nunca definidos. Lo que no se ha definido nunca no puede ser nunca sometido a un análisis profundo, y las «propiedades» P1-P13 deben considerarse como suposiciones, no como teoremas acerca de números. Sin embargo, hemos evitado intencionadamente el término «axioma», y en este capítulo examinaremos más detenidamente el lugar que corresponde a P1-P13 desde un punto de vista lógico.

Lo mismo que **Q** y **R**, los conjuntos **N** y **Z** han quedado sin definir. Bien es verdad que en el capítulo 2 se insertaron algunas consideraciones acerca de los cuatro, pero aquellas descripciones superficiales estaban muy lejos de constituir una definición. Decir, por ejemplo, que **N** consiste en 1, 2, 3, etc., no es más que nombrar algunos elementos de **N** sin identificarlos (y el «etc.» no sirve de nada). Los números naturales *pueden* definirse, pero el procedimiento es complicado y se aparta de la tónica del resto del libro. La lista de lecturas aconsejadas contiene referencias a este problema, así como a los demás pasos que son necesarios si se quiere desarrollar el cálculo infinitesimal partiendo de su base lógica fundamental. El desarrollo ulterior de este programa procedería con la definición de **Z**, en términos de **N**, y la definición de **Q** en términos de **Z**. Este programa da como resultado cierto conjunto **Q** bien definido, ciertas operaciones explícitamente definidas + y ·, y las propiedades P1-P12 como *teoremas*. La fase

final de este programa es la construcción de **R**, en términos de **Q**. Esta última construcción es la que nos va a ocupar. Suponiendo que **Q** ha sido definido, y que P1-P12 han sido demostradas para **Q**, *definiremos* en último término **R** y *demostraremos* para **R** todas las propiedades P1-P13.

Nuestra intención de demostrar P1-P13 significa que debemos definir no sólo números reales, sino también la suma y la multiplicación de números reales. Los números reales son en efecto sólo de interés como conjunto con estas operaciones: el comportamiento de los números reales respecto a la suma y a la multiplicación es crucial; lo que los números reales puedan ser en realidad carece totalmente de importancia. Esta afirmación puede expresarse de una manera matemática significativa, utilizando el concepto de «cuerpo», el cual incluye como casos particulares los tres importantes sistemas numéricos de este libro. Esta abstracción, extraordinariamente importante, de la matemática moderna, incorpora las propiedades P1-P9 comunes a **Q**, **R** y **C**. Un **cuerpo** es un conjunto F (de objetos de cualquier especie), junto con dos «operaciones binarias» $\boldsymbol{+}$ y $\boldsymbol{\cdot}$ definidas sobre F (es decir, dos reglas que asocian a elementos a y b de F otros elementos $a \boldsymbol{+} b$ y $a \boldsymbol{\cdot} b$ de F), para el cual se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $(a \boldsymbol{+} b) \boldsymbol{+} c = a \boldsymbol{+} (b \boldsymbol{+} c)$ para todo a, b y c de F.
(2) Existe algún elemento $\mathbf{0}$ de F tal que
   (i) $a \boldsymbol{+} \mathbf{0} = a$ para todo a de F,
   (ii) para todo a de F, existe algún elemento b de F tal que $a \boldsymbol{+} b = \mathbf{0}$.
(3) $a \boldsymbol{+} b = b \boldsymbol{+} a$ para todo a y b de F.
(4) $(a \boldsymbol{\cdot} b) \boldsymbol{\cdot} c = a \boldsymbol{\cdot} (b \boldsymbol{\cdot} c)$ para todo a, b y c de F.
(5) Existe algún elemento $\mathbf{1}$ en F tal que $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ y
   (i) $a \boldsymbol{\cdot} \mathbf{1} = a$ para todo a de F,
   (ii) Para todo a de F con $a \neq \mathbf{0}$, existe algún elemento b en F tal que $a \boldsymbol{\cdot} b = \mathbf{1}$.
(6) $a \boldsymbol{\cdot} b = b \boldsymbol{\cdot} a$ para todo a y b de F.
(7) $a \boldsymbol{\cdot} (b \boldsymbol{+} c) = a \boldsymbol{\cdot} b \boldsymbol{+} a \boldsymbol{\cdot} c$ para todo a, b y c de F.

Los ejemplos corrientes de cuerpos son, según se ha indicado ya, **Q**, **R** y **C**, siendo $\boldsymbol{+}$ y $\boldsymbol{\cdot}$ las operaciones corrientes de $+$ y $\cdot$. Probablemente no hace falta explicar por qué éstos son cuerpos, pero la explicación es, en todo caso, muy breve. Cuando se interpretan $\boldsymbol{+}$ y $\boldsymbol{\cdot}$ como las $+$ y $\cdot$ corrientes, las reglas 1, 3, 4, 6, 7 son simplemente nuevos enunciados de P1, P4, P5, P8, P9; los elementos que desempeñan el papel de $\mathbf{0}$ y de $\mathbf{1}$ son los números 0 y 1 (lo cual justifica la elección de los símbolos $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$); y el número b en (2) o en (5) es $-a$ o a^{-1},

respectivamente. (Por esta razón, en un cuerpo cualquiera F designamos por $-a$ el elemento tal que $a + (-a) = \mathbf{0}$, y por a^{-1} el elemento tal que $a \cdot a^{-1} = \mathbf{1}$, para $a \neq \mathbf{0}$.)

Además de **Q**, **R** y **C**, existen otros cuerpos que pueden escribirse fácilmente. Un ejemplo es la colección F_1 de todos los números $a + b\sqrt{2}$ para a y b en **Q**. Las operaciones $+$ y $\cdot$ serán, una vez más, las $+$ y $\cdot$ corrientes de los números reales. Es necesario observar que estas operaciones producen efectivamente nuevos elementos de F_1:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}, \text{ el cual está en } F_1.$$
$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}, \text{el cual está en } F_1;$$

Las condiciones (1), (3), (4), (6), (7) para un cuerpo son evidentes para F_1: al cumplirse para todos los números reales, se cumplen ciertamente para todos los números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$. La condición (2) se cumple porque el número $0 = 0 + 0\sqrt{2}$ está en F_1, y para $\alpha = a + b\sqrt{2}$ en F_1 el número $\beta = (-a) + (-b)\sqrt{2}$ de F_1 satisface $\alpha + \beta = 0$. Análogamente, $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ está en F_1, de modo que (5i) se satisface. La verificación de (5ii) es el único punto ligeramente difícil. Si $a + b\sqrt{2} \neq 0$, entonces

$$a + b\sqrt{2} \cdot \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = 1;$$

es por lo tanto necesario demostrar que $1/(a + b\sqrt{2})$ está en F_1. Esto se cumple, ya que

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a - b\sqrt{2})(a + b\sqrt{2})} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{(-b)}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}.$$

(La división por $a - b\sqrt{2}$ es válida porque la relación $a - b\sqrt{2} = 0$ solamente puede cumplirse si $a = b = 0$ (puesto que $\sqrt{2}$ es irracional), lo cual queda excluido por la hipótesis $a + b\sqrt{2} \neq 0$.)

El siguiente ejemplo de cuerpo, F_2, es considerablemente más sencillo en un aspecto: solamente contiene dos elementos que podemos muy bien designar por $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$. Las operaciones $+$ y $\cdot$ se describen mediante las siguientes tablas.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

La verificación de las condiciones (1)-(7) se hace directamente, tratándose de comprobaciones caso por caso. Por ejemplo, la condición (1) puede demostrarse comprobando las 8 ecuaciones obtenidas al poner $a, b, c = \mathbf{0}$ o $\mathbf{1}$. Obsérvese que en este cuerpo $\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$; esta ecuación puede también escribirse $\mathbf{1} = -\mathbf{1}$.

Nuestro ejemplo final de cuerpo es bastante ingenuo: F_3 consiste en todos los pares (a, a) para a en $\mathbf{R}$, y $+$ y $\cdot$ están definidas por

$$\begin{aligned}(a, a) + (b, b) &= (a + b, a + b),\\ (a, a) \cdot (b, b) &= (a \cdot b, a \cdot b).\end{aligned}$$

(El $+$ y $\cdot$ que aparecen en el segundo miembro son la suma y la multiplicación ordinarias de $\mathbf{R}$.) La verificación de que F_3 es un cuerpo se deja para el lector como ejercicio sencillo.

La investigación detallada de las propiedades de los cuerpos constituye por sí misma una materia de estudio, pero para nuestros fines, los cuerpos ofrecen un marco ideal para estudiar las propiedades de los números con la máxima economía de pensamiento. Por ejemplo, las consecuencias de P1-P9 deducidas para los «números» en el capítulo 1 se cumplen en realidad para un cuerpo cualquiera; en particular se cumplen para los cuerpos $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}$.

Obsérvese que ciertas propiedades corrientes de $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}$ no se cumplen para todos los cuerpos. Por ejemplo, es posible que la ecuación $\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ se cumpla en algunos cuerpos, y en consecuencia $a - b = b - a$ no implica necesariamente que $a = b$. Para el cuerpo $\mathbf{C}$ el enunciado $1 + 1 \neq 0$ se dedujo de la descripción explícita de $\mathbf{C}$; sin embargo, para los cuerpos $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$, este enunciado se dedujo a partir de otras propiedades que carecen de análogas en las condiciones que definen un cuerpo. Existe un concepto relacionado que hace uso de estas propiedades. Un cuerpo **ordenado** es un cuerpo F (con las operaciones $+$ y $\cdot$) junto con cierto subconjunto $\mathbf{P}$ de F (los elementos «positivos») con las propiedades siguientes:

(8) Para todo a de F, se satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:

(i) $a = 0$,

(ii) a está en **P**,
(iii) $-a$ está en **P**.
(9) Si a y b están en **P**, entonces $a + b$ está en **P**.
(10) Si a y b están en **P**, entonces $a \cdot b$ está en **P**.

Hemos visto ya que el cuerpo **C** no puede convertirse en cuerpo ordenado. Del mismo modo, el cuerpo F_2 que tiene solamente dos elementos, no puede convertirse en cuerpo ordenado: efectivamente, la condición (8), aplicada a $\mathbf{1} = -\mathbf{1}$, indica que **1** debe estar en **P**; entonces (9) implica que $\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ está en **P**, en contradicción con (8). Por otra parte, el cuerpo F_1, que consiste en todos los números $a + b\sqrt{2}$ con a, b en **Q**, puede ciertamente convertirse en un cuerpo ordenado: sea **P** el conjunto de todos los $a + b\sqrt{2}$ que son números reales positivos (en el sentido ordinario de la palabra). El cuerpo F_3 puede convertirse también en un cuerpo ordenado; la descripción de **P** se deja para el lector.

Resulta natural introducir una notación para un cuerpo ordenado cualquiera que se corresponda con la utilizada para **Q** y **R**: definimos

$$\begin{array}{lll} a > b & \text{si} & a - b \text{ está en } \mathbf{P}, \\ a < b & \text{si} & b > a, \\ a \leq b & \text{si} & a < b \text{ o } a = b, \\ a \geq b & \text{si} & a > b \text{ o } a = b. \end{array}$$

Utilizando estas definiciones podemos reproducir, para un cuerpo ordenado cualquiera F, las definiciones del capítulo 7:

Un conjunto A de elementos de F es **acotado superiormente** si existe algún x en F tal que $x \geq a$ para todo a de A. Un tal x recibe el nombre de **cota superior** de A. Un elemento x de F es una **cota superior mínima** de A si x es una cota superior de A y $x \leq y$ para todo y de F que sea una cota superior de A.

Finalmente, es posible enunciar una propiedad análoga a la propiedad P13 de **R**; esto conduce a la última abstracción de este capítulo:

Un **cuerpo ordenado completo** es un cuerpo ordenado en el cual todo conjunto no vacío que sea acotado superiormente tiene cota superior mínima.

La consideración de los cuerpos puede parecer que nos ha llevado lejos de nuestra finalidad de construir los números reales. Sin embargo, disponemos ahora de una manera inteligible de formular esta finalidad. Hay dos interrogantes que serán contestados en los dos capítulos siguientes:

1. ¿Existe un cuerpo ordenado completo?

2. ¿Existe solamente un cuerpo ordenado completo?

Nuestro punto de partida para estas consideraciones será **Q**, que se supone ser un cuerpo ordenado, que contiene a **N** y **Z** como subconjuntos. En un punto crucial será necesario suponer otro hecho acerca de **Q**:

> Sea x un elemento de **Q** con $x > 0$. Entonces para cualquier y de **Q** existe algún n en **N** tal que $nx > y$.

Esta suposición, que afirma que los números racionales tienen la propiedad arquimediana de los reales, no es consecuencia de las demás propiedades de un cuerpo ordenado (para un ejemplo que demuestra esto de modo conclusivo, véase [17]). El punto importante para nosotros es que cuando **Q** se construye explícitamente, las propiedades P1-P12 aparecen como teoremas, y lo mismo ocurre con esta suposición adicional; si empezáramos efectivamente a partir del principio, no haría falta ninguna suposición acerca de **Q**.

PROBLEMAS

1. Sea F el conjunto $\{0, 1, 2\}$ y defínanse las operaciones $+$ y $\cdot$ sobre F mediante la siguiente tabla. (La regla para construir esta tabla es como sigue: sumar o multiplicar de la manera usual, y después restar el mayor múltiplo posible de 3; así, $2\cdot 2 = 4 = 3 + 1$, de modo que $2\cdot 2 = 1$.)

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Demostrar que F es un cuerpo, y demostrar que no puede convertirse en cuerpo ordenado.

2. Supóngase ahora que intentamos construir un cuerpo F que tenga los elementos 0, 1, 2, 3 con las operaciones $+$ y $\cdot$ definidas como en el ejemplo anterior, sumando o multiplicando de la manera usual, y después restando el mayor múltiplo posible de 4. Demostrar que F *no* será un cuerpo.

3. Sea $F = \{0, 1, \alpha, \beta\}$ y defínanse las operaciones $+$ y $\cdot$ sobre F mediante las siguientes tablas.

+	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

Demostrar que F es un cuerpo.

4. (a) Sea F un cuerpo en el cual $1 + 1 = 0$. Demostrar que $a + a = 0$ para todo a (esto también puede escribirse $a = -a$).
   (b) Supóngase que $a + a = 0$ para algún $a \neq 0$. Demostrar que $1 + 1 = 0$ (y en consecuencia $b + b = 0$ para todo b).

5. (a) Demostrar que en un cuerpo cualquiera se tiene

$$\underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{m \text{ veces}} \cdot \underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{mn \text{ veces}}$$

para todos los números naturales m y n.
   (b) Supóngase que en el cuerpo F tenemos

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m \text{ veces}} = 0$$

para algún número natural m. Demostrar que el m más pequeño con esta propiedad debe ser un número primo (este número primo recibe el nombre de **característica** de F).

6. Sea F un cuerpo cualquiera con solamente un número finito de elementos.
   (a) Demostrar que deben existir números naturales distintos m y n con

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m \text{ veces}} = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}}.$$

   (b) Concluir que existe algún número natural k con

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{k \text{ veces}} = 0.$$

7. Sean a, b, c y d elementos de un cuerpo F con $a \cdot b - b \cdot c \neq \mathbf{0}$. Demostrar que las ecuaciones

$$\begin{aligned} a \cdot x + b \cdot y &= \alpha, \\ c \cdot x + d \cdot y &= \beta, \end{aligned}$$

pueden resolverse para x e y.

8. Sea a un elemento de un cuerpo F. Una «raíz cuadrada» de a es un elemento b de F con $b^2 = b \cdot b = a$.
   (a) ¿Cuántas raíces cuadradas tiene $\mathbf{0}$?
   (b) Supóngase $a \neq \mathbf{0}$. Demostrar que a tiene dos raíces cuadradas, a menos que sea $\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$, en cuyo caso a tiene sólo una.

9. (a) Considérese una ecuación $x^2 + b \cdot x + c = \mathbf{0}$, donde b y c son elementos de un cuerpo F. Supóngase que $b^2 - 4 \cdot c$ tiene una raíz cuadrada r en F. Demostrar que $(-b + r)/2$ es una solución de esta ecuación.
   (b) En el cuerpo F_2 del texto, ambos elementos tienen evidentemente una raíz cuadrada. Por otra parte, es fácil comprobar que ninguno de ellos satisface la ecuación $x^2 + x + \mathbf{1} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, en la parte (a) debe haber algún detalle incorrecto. ¿Cuál es?

10. Sea F un cuerpo y a un elemento de F que *carece* de raíz cuadrada. Este problema indica cómo se construye un cuerpo más amplio F', que contiene F, en el cual a tiene una raíz cuadrada. (Esta construcción ya se ha ejecutado en un caso particular, a saber, $F = \mathbf{R}$ y $a = -1$; este caso particular debería servir de guía al lector en este ejemplo.)
    Hagamos consistir F' en todos los pares (x, y) con x e y en F. Si las operaciones sobre F son $+$ y $\cdot$, defínanse las operaciones $\oplus$ y $\odot$ sobre F' como sigue:

$$\begin{aligned} (x, y) \oplus (z, w) &= (x + z, y + w), \\ (x, y) \odot (z, w) &= (x \cdot z + a \cdot y \cdot w,\ y \cdot z + x \cdot w). \end{aligned}$$

   (a) Demostrar que F', con las operaciones $\oplus$ y $\odot$, es un cuerpo.
   (b) Demostrar que

$$(x, \mathbf{0}) \oplus (y, \mathbf{0}) = (x + y, \mathbf{0}),$$

$$(x, \mathbf{0}) \odot (y, \mathbf{0}) = (x \cdot y, \mathbf{0}),$$

de manera que podemos convenir en abreviar $(x, \mathbf{0})$ por x.

(c) Hallar una raíz cuadrada de $a = (a, \mathbf{0})$ en F'.

11. Sea F el conjunto de todas las cuádruplas (w, x, y, z) de números reales. Defínase $+$ y $\cdot$ mediante

$$(s, t, u, v) + (w, x, y, z) = (s + w, t + x, u + y, v + z),$$
$$(s, t, u, v) \cdot (w, x, y, z) = (sw - tx - uy - vz, sx + tw + uz - vy,$$
$$sy + uw + vx - tz, sz + vw + ty - ux).$$

(a) Demostrar que F satisface todas las condiciones de un cuerpo, excepto (6). A veces el álgebra se da perfecta, pero la existencia de inversos respecto a la multiplicación es el único punto que requiere cierta consideración.

(b) Es costumbre designar

(0, 1, 0, 0) por i,
(0, 0, 1, 0) por j,
(0, 0, 0, 1) por k.

Hallar los 9 productos de pares i, j y k. Los resultados harán ver en particular que la condición (6) es definitivamente falsa. Este «cuerpo alabeado» F es conocido como cuerpo de los **cuaterniones.**

CAPÍTULO

28

CONSTRUCCIÓN DE NÚMEROS REALES

El cúmulo de trabajo rutinario contenido por necesidad en este capítulo se hace más ligero si se tiene en cuenta una idea de importancia verdaderamente primordial. Para demostrar la existencia de un cuerpo ordenado completo tendremos que describir explícitamente uno de ellos en detalle; la verificación de las condiciones (1)-(10) para un cuerpo ordenado constituye sólo una laboriosa tarea sin complicaciones, pero la descripción del cuerpo mismo, de sus elementos, es verdaderamente ingeniosa.

Tenemos a nuestra disposición el conjunto de los números racionales, y a partir de esta materia prima es necesario obtener el cuerpo que en último término será llamado de los números reales. Para el no iniciado esto debe parecer absolutamente imposible: si solamente se conocen los números racionales, ¿de dónde van a proceder los demás? Tenemos ahora ya experiencia suficiente para darnos cuenta de que la situación puede no ser tan desesperada como hace suponer esta consideración casual. La estrategia a adoptar en nuestra construcción ha sido ya utilizada eficazmente para definir funciones y números complejos. En vez de intentar determinar la «naturaleza real» de estos conceptos, nos contentamos con una definición que describe lo suficiente acerca de ellos para determinar completamente sus propiedades matemáticas.

Un intento análogo para definir los números reales exige una descripción de los números reales en términos de números racionales. La observación de que un número real debería quedar determinado por completo mediante el conjunto de los números racionales menores que él, sugiere una posibilidad notablemente

sencilla y muy atractiva: un número real podría ser descrito (y efectivamente lo será) mediante una colección de números racionales. Sin embargo, para hacer efectivo este intento, debe encontrarse algún medio para describir «el conjunto de los números racionales menores que un número real» sin mencionar a los números reales, que por ahora no son más que ficciones heurísticas de nuestra imaginación matemática.

Si hemos de considerar a A como el conjunto de los números racionales que son menores que el número real α, entonces A debería tener la siguiente propiedad: si x está en A e y es un número racional que satisface $y < x$, entonces y está en A. Además de esta propiedad, el conjunto A debería tener unas pocas más. Puesto que debería existir algún número racional $x < \alpha$, el conjunto A no debería ser vacío. Del mismo modo, puesto que debe haber algún número $x > \alpha$, el conjunto A no debería ser todo $\mathbf{Q}$. Finalmente, si $x < \alpha$, entonces debería existir otro número racional y con $x < y < \alpha$, de modo que A no debería contener un elemento máximo.

Si consideramos de momento como conocidos a los números reales, entonces no es difícil comprobar (problema 8-17) que el conjunto A con estas propiedades es, efectivamente, el conjunto de los números racionales menores que algún número real α. Puesto que de momento los números reales están en el limbo, la demostración del lector, si es que aporta una, debe considerarse solamente como un comentario no oficial de estos procedimientos. Servirá, sin embargo, para convencerle que no hemos dejado de observar ninguna propiedad crucial del conjunto A. No parece que exista motivo alguno para seguir dudando.

DEFINICIÓN

Un **número real** es un conjunto α, de números racionales, con las cuatro siguientes propiedades:

(1) Si x está en α e y es un número racional con $y < x$, entonces y está también en α.

(2) $\alpha \neq \emptyset$.

(3) $\alpha \neq \mathbf{Q}$.

(4) No existe ningún elemento máximo en α; dicho de otro modo, si x está en α, entonces existe algún y en α con $y > x$.

El conjunto de todos los números reales se designa por $\mathbf{R}$.

Vamos a dar un ejemplo explícito de número real con el único objeto de que el lector no olvide la finalidad que perseguimos con nuestra definición:

$$\alpha = \{x \text{ en } \mathbf{Q}: x < 0 \text{ o } x^2 < 2\}.$$

Debe estar claro que α es el número real que eventualmente será conocido por $\sqrt{2}$, pero no es un ejercicio totalmente trivial demostrar que α es efectivamente un número real. Lo más importante de tal ejercicio es demostrar esto, haciendo uso solamente de hechos acerca de $\mathbf{Q}$; la parte difícil consistirá en comprobar la condición (4), pero esto ya ha aparecido como problema en un capítulo anterior (dejamos que el lector averigüe qué capítulo es). Obsérvese que la condición (4), aunque aquí muy fastidiosa, es en realidad esencial para evitar ambigüedades; si prescindimos de ella,

$$\{x \text{ en } \mathbf{Q}: x < 1\}$$

y

$$\{x \text{ en } \mathbf{Q}: x \leq 1\}$$

podrían ser tanto uno como otro el «número real 1».

El cambio de A por α en nuestra definición indica a la vez una preocupación conceptual y de notación. De aquí en adelante, un número real *es*, por definición, un conjunto de números racionales. Esto significa, en particular, que un número racional (un miembro de $\mathbf{Q}$) *no* es un número real; sin embargo, todo número racional x tiene una contrapartida natural que es un número real, a saber, $\{y \text{ en } \mathbf{Q}: y < x\}$. Después de completar la construcción de los números reales, podemos prescindir mentalmente de los elementos de $\mathbf{Q}$ y convenir en que en adelante $\mathbf{Q}$ designará estos conjuntos especiales. Sin embargo, por el momento, será necesario trabajar a la vez con números racionales, números reales (conjuntos de números racionales) e incluso conjuntos de números reales (conjuntos de conjuntos de números racionales). Quizá sea inevitable alguna confusión, pero ésta debería quedar reducida al mínimo mediante una notación adecuada. Los números racionales serán designados mediante letras minúsculas del alfabeto latino (x, y, z, a, b, c), y los números reales mediante letras minúsculas griegas (α, β, γ); las letras latinas mayúsculas (A, B, C) se utilizarán para designar conjuntos de números reales.

Lo que queda de este capítulo está dedicado a la definición de $+$, $\cdot$, y $\mathbf{P}$ para $\mathbf{R}$ y a la demostración de que con estas estructuras $\mathbf{R}$ es efectivamente un cuerpo ordenado completo.

Empezaremos en realidad con la definición de $\mathbf{P}$, y aun aquí procederemos hacia atrás. Definiremos primero $\alpha < \beta$; después, una vez que dispongamos de $+$, $\cdot$ y $\mathbf{0}$, definiremos $\mathbf{P}$ como el conjunto de todos los α con $\mathbf{0} < \alpha$, y demos-

traremos las propiedades necesarias para **P**. La razón de empezar con la definición de $<$ es la sencillez de este concepto en nuestra situación presente:

Definición. Si α y β son números reales, entonces $\alpha < \beta$ significa que α está contenido en β (es decir, todo elemento de α es también un elemento de β), pero $\alpha \neq \beta$.

Una repetición de las definiciones de $\leq$, $>$, $\geq$ constituiría una morosidad, pero es interesante observar que $\leq$ puede ahora expresarse más sencillamente que $<$; si α y β son números reales, entonces $\alpha \leq \beta$ si y sólo si α está contenido en β.

Si A es una colección acotada de números reales, resulta casi evidente que A debe tener una cota superior mínima. Cada α de A es una colección de números racionales; si estos números racionales se ponen todos en una colección β, entonces es de suponer que β sea sup A. En la demostración del siguiente teorema se comprueban todos los detalles que no se han mencionado, entre los cuales no es el menos importante el de que β *es* efectivamente un número real. (En este capítulo no nos molestaremos en numerar los teoremas, ya que todos ellos pueden resumirse en un gran teorema: Existe un cuerpo ordenado completo.)

TEOREMA

Si A es un conjunto de números reales $A \neq \emptyset$ y A es acotado superiormente, entonces A tiene una cota superior mínima.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\beta = \{x: x \text{ está en algún } \alpha \text{ de } A\}$. Entonces β es ciertamente una colección de números racionales; la demostración de que β es un número real exige la comprobación de cuatro hechos.

(1) Supóngase que x está en β e $y < x$. La primera condición significa que x está en α para algún α de A. Al ser α un número real, la suposición $y < x$ implica que y está en α. Se cumple por lo tanto ciertamente que y está en β.
(2) Al ser $A \neq \emptyset$, existe algún α en A. Puesto que α es un número real, existe algún x en α. Esto significa que x está en β, de modo que $\beta \neq \emptyset$.
(3) Puesto que A es acotado superiormente, existe algún número real γ

tal que $\alpha < \gamma$ para todo α de A. Al ser γ un número real, existe algún número racional x que no está en γ. Ahora bien, $\alpha < \gamma$ significa que α está contenido en γ, de modo que se cumple también que x no está en α para ningún α de A. Eso significa que x no está en β; así pues, $\beta \neq \mathbf{Q}$.

(4) Supóngase que x está en β. Entonces x está en α para algún α de A. Puesto que α carece de máximo elemento, existe algún número racional y con $x < y$ e y en α. Pero eso significa que y está en β; por lo tanto β carece de máximo elemento.

Estas cuatro observaciones demuestran que β es un número real. La demostración de que β es la cota superior mínima de A es más fácil. Si α está en A, entonces evidentemente α está contenido en β; eso significa que $\alpha \leq \beta$, de modo que β es una cota superior de A. Por otra parte, si γ es una cota superior de A, entonces $\alpha \leq \gamma$ para todo α de A; esto significa que α está contenido en γ, para todo α de A, y esto con seguridad implica que β está contenido en γ. *Esto* significa a su vez que $\beta \leq \gamma$; así pues, β es la cota superior mínima de A. ▌

La definición de $+$ es a la vez evidente y fácil, pero debe ser complementada con una demostración de que esta definición «evidente» tiene sentido.

Definición. Si α y β son números reales, entonces

$$\alpha + \beta = \{x\colon x = y + z \text{ para algún } y \text{ de } \alpha \text{ y algún } z \text{ de } \beta\}.$$

TEOREMA

Si α y β son números reales, entonces $\alpha + \beta$ es un número real.

DEMOSTRACIÓN

Una vez más deben comprobarse cuatro hechos.

(1) Supóngase que $w < x$ para algún x de $\alpha + \beta$. Entonces $x = y + z$ para algún y de α y algún z de β, lo cual significa que $w < y + z$, y en consecuencia $w - y < z$. Esto significa que $w - y$ está en β (puesto que z está en β y β es un número real). Al ser $w = y + (w - y)$, se sigue que w está en $\alpha + \beta$.

(2) Es evidente que $\alpha + \beta \neq \emptyset$, ya que $\alpha \neq \emptyset$ y $\beta \neq \emptyset$.

(3) Puesto que $\alpha \neq \mathbf{Q}$ y $\beta \neq \mathbf{Q}$, existen números racionales a y b tales

que a no está en α y b no está en β. Cualquier x de α satisface $x < a$ (pues si $a < x$, entonces la condición (1) para un número real implicaría que a estaría en α); análogamente, cualquier y de β satisface $y < b$. Así pues, $x + y < a + b$ para cualquier x de α e y de β. Esto indica que $a + b$ no está en $\alpha \mathbin{\boldsymbol{+}} \beta$, de modo que $\alpha \mathbin{\boldsymbol{+}} \beta \neq \mathbf{Q}$.

(4) Si x está en $\alpha \mathbin{\boldsymbol{+}} \beta$, entonces $x = y + z$ si y está en α y z en β. Existen y' en α y z' en β con $y < y'$ y $z < z'$; entonces $x < y' + z'$ e $y' + z'$ está en $\alpha \mathbin{\boldsymbol{+}} \beta$. Por lo tanto $\alpha \mathbin{\boldsymbol{+}} \beta$ carece de elemento máximo. ▮

Ahora ya puede darse cuenta el lector de lo prolijo que va a ser todo este proceso. Cada vez que mencionemos un número real, tenemos que demostrar que se trata *en efecto* de un número real; esto exige la comprobación de cuatro condiciones, que aun siendo triviales, exigen cierta concentración. Esto no se puede remediar (sólo que resultará menos aburrido si el lector comprueba por sí mismo las cuatro condiciones). Sin embargo, surgirán, afortunadamente, de vez en cuando algunos puntos de interés, y algunos de nuestros teoremas resultarán fáciles. En particular, hay dos propiedades de $\boldsymbol{+}$ que no presentan problemas.

TEOREMA

Si α, β y γ son números reales, entonces $(\alpha \mathbin{\boldsymbol{+}} \beta) \mathbin{\boldsymbol{+}} \gamma = \alpha \mathbin{\boldsymbol{+}} (\beta \mathbin{\boldsymbol{+}} \gamma)$.

DEMOSTRACIÓN

Puesto que $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todos los números racionales x, y y z, todo elemento de $(\alpha \mathbin{\boldsymbol{+}} \beta) \mathbin{\boldsymbol{+}} \gamma$ es también un elemento de $\alpha \mathbin{\boldsymbol{+}} (\beta \mathbin{\boldsymbol{+}} \gamma)$, y viceversa. ▮

TEOREMA

Si α y β son números reales, entonces $\alpha \mathbin{\boldsymbol{+}} \beta = \beta \mathbin{\boldsymbol{+}} \alpha$.

DEMOSTRACIÓN

Se deja para el lector (es todavía más fácil). ▮

Para demostrar las demás propiedades de $\boldsymbol{+}$ definimos primero $\mathbf{0}$.

Definición. $\mathbf{0} = \{x \text{ en } \mathbf{Q}: x < 0\}$.

Es, afortunadamente, obvio que **0** es un número real, y el teorema siguiente es también sencillo.

TEOREMA

Si α es un número real, entonces $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$.

DEMOSTRACIÓN

Si x está en α e y está en **0**, entonces $y < 0$, de modo que $x + y < x$. Esto implica que $x + y$ está en α. Así pues, todo elemento de $\alpha + \mathbf{0}$ es también un elemento de α.

Por otra parte, si x está en α, entonces existe un número racional y en α tal que $y > x$. Puesto que $x = y + (x - y)$, donde y está en α, y $x - y < 0$ (de modo que $x - y$ está en **0**), esto indica que x está en $\alpha + \mathbf{0}$. Así pues, todo elemento de α es también un elemento de $\alpha + \mathbf{0}$. ▮

Parece razonable pensar que $-\alpha$ tendría que ser el conjunto

$$\{x \text{ en } \mathbf{Q}: \ -x \text{ no está en } \alpha\}$$

(ya que no estar $-x$ en α significa, intuitivamente, que $-x > \alpha$, de modo que $x < -\alpha$). Pero en ciertos casos este conjunto no será ni siquiera un número real. Si bien un número real α no tiene ningún elemento máximo, el conjunto

$$\mathbf{Q} - \alpha = \{x \text{ en } \mathbf{Q}: \ x \text{ no está en } \alpha\}$$

puede tener un elemento *mínimo* x_0; cuando α es un número real de esta clase, el conjunto $\{x: \ -x \text{ no está en } \alpha\}$ tendrá un elemento máximo $-x_0$. Es, por lo tanto, necesario introducir una ligera modificación en la definición de $-\alpha$, la cual viene equipada con un teorema.

Definición. Si α es un número real, entonces

$$-\alpha = \{x \text{ en } \mathbf{Q}: -x \text{ no está en } \alpha, \text{ pero } -x \text{ no es el elemento mínimo de } \mathbf{Q} - \alpha\}.$$

TEOREMA

Si α es un número real, entonces $-\alpha$ es un número real.

DEMOSTRACIÓN

(1) Supongamos que x está en $-\alpha$ e $y < x$. Entonces $-y > -x$. Al no estar $-x$ en α, se cumple también que $-y$ no está en α. Además, está claro que $-y$ no es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$, ya que $-x$ es un elemento menor. Esto indica que y está en $-\alpha$.

(2) Puesto que $\alpha \neq \mathbf{Q}$, existe algún número racional y que no está en α. Podemos suponer que y no es el número racional mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$ (puesto que es siempre posible sustituir y por cualquier $y' > y$). Entonces $-y$ está en $-\alpha$. Así pues, $-\alpha \neq \emptyset$.

(3) Puesto que $\alpha \neq \emptyset$, existe algún x en α. Entonces $-x$ no puede estar en $-\alpha$, de modo que $-\alpha \neq \mathbf{Q}$.

(4) Si x está en $-\alpha$, entonces $-x$ no está en α, y existe algún número racional $y < -x$ que tampoco está en α. Sea z un número racional con $y < z < -x$. Entonces z tampoco está en α, y claramente z no es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$. Así pues, $-z$ está en $-\alpha$. Puesto que $-z > x$, esto indica que $-\alpha$ carece de elemento máximo. ▮

La demostración de que $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$ no es directa del todo. Las dificultades no se deben, como se pudiera suponer, a los finos detalles de la definición de $-\alpha$. En este punto nos hace falta más bien la propiedad arquimediana de $\mathbf{Q}$ establecida en la página 804, la cual no se sigue de P1-P12. Esta propiedad hace falta para demostrar el siguiente lema, que desempeña un papel crucial en el teorema que sigue después.

LEMA

Sea α un numero real, y z un número racional positivo. Entonces existen (figura 1) números racionales x en α, e y no en α, tales que $y - x = z$. Además, podemos suponer que y no es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$.

DEMOSTRACIÓN

Supóngase primero que z está en α. Si los números

$$z,\ 2z,\ 3z,\ \ldots$$

estuviesen *todos* en α, entonces *todo* número racional estaría en α, ya que todo

número racional w satisface $w < nz$ para algún n, según la suposición adicional de la página 804. Esto contradice el hecho de que α es un número real de modo que existe algún k tal que $x = kz$ está en α e $y = (k+1)z$ no está en α. Evidentemente $y - x = z$.

Además, si ocurre que y es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$, sea $x' > x$ un elemento de α y sustitúyase x por x' e y por $y + (x' - x)$.

Si z no está en α, existe una demostración parecida, basada en el hecho de que los números $(-n)z$ no pueden dejar todos de estar en α. ▌

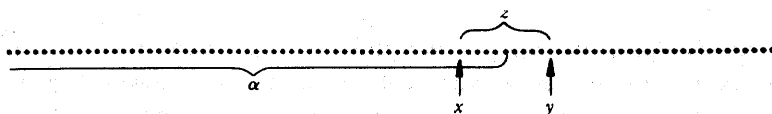


FIGURA 1

TEOREMA

Si α es un número real, entonces

$$\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}.$$

DEMOSTRACIÓN

Supóngase que x está en α y que y está en $-\alpha$. Entonces $-y$ no está en α, de modo que $-y > x$. Por lo tanto, $x + y < 0$, de modo que $x + y$ está en $\mathbf{0}$. Así pues, todo elemento de $\alpha + (-\alpha)$ está en $\mathbf{0}$.

Algo más difícil resulta proceder en la otra dirección. Si z está en $\mathbf{0}$, entonces $-z > 0$. Según el lema, existe algún x en α, y algún y que no está en α, no siendo y el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$, tales que $y - x = -z$. Esta ecuación puede escribirse $x + (-y) = z$. Al estar x en α, y $-y$ en $-\alpha$, esto demuestra que z está en $\alpha + (-\alpha)$. ▌

Antes de proceder con la multiplicación, definimos los «elementos positivos» y demostramos una propiedad fundamental:

Definición. $\mathbf{P} = \{\alpha \text{ en } \mathbf{R}\colon\ \alpha > \mathbf{0}\}$.

Obsérvese que $\alpha + \beta$ está claramente en $\mathbf{P}$ si lo están α y β.

TEOREMA

Si α es un número real, entonces se cumple una y sólo una de las condiciones siguientes:

(i) $\alpha = \mathbf{0}$,
(ii) α está en **P**,
(iii) $-\alpha$ está en **P**.

DEMOSTRACIÓN

Si α contiene cualquier número racional positivo, entonces α contiene ciertamente todos los números racionales negativos, de modo que α contiene **0** y $\alpha \neq \mathbf{0}$, es decir, α está en **P**. Si α no contiene ningún número racional positivo, entonces debe cumplirse una de las dos siguientes posibilidades:

(1) α contiene todos los números racionales negativos; entonces $\alpha = \mathbf{0}$.
(2) Existe algún número racional negativo x que no está en α; puede suponerse que x no es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$ (ya que x podría ser sustituido por $x/2 > x$); entonces $-\alpha$ contiene el número racional positivo $-x$, de modo que, según acabamos de demostrar, $-\alpha$ está en **P**.

Esto indica que debe cumplirse *por lo menos una* de las condiciones (i)-(iii). Si $\alpha = 0$, es imposible que se cumpla (ii) o (iii). Además, es imposible que $\alpha > \mathbf{0}$ y $-\alpha > \mathbf{0}$ se cumplan ambas, ya que esto implicaría que $\mathbf{0} = \alpha + (-\alpha) > \mathbf{0}$. ∎

Recuérdese que se definió $\alpha > \beta$ en el sentido de que α contiene β, pero es distinto de β. Esta definición fue adecuada para demostrar la completitud, pero ahora tenemos que demostrar que es equivalente a la definición que se hubiese hecho en términos de **P**. Así pues, debemos demostrar que $\alpha - \beta > \mathbf{0}$ es equivalente a $\alpha > \beta$. Esto es claramente una consecuencia del teorema que sigue.

TEOREMA

Si α, β y γ son números reales y $\alpha > \beta$, entonces $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

DEMOSTRACIÓN

La hipótesis $\alpha > \beta$ implica que β está contenido en α; se sigue inmediatamente

de la definición de $+$ que $\beta + \gamma$ está contenido en $\alpha + \gamma$. Esto indica que $\alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$. Podemos excluir fácilmente la posibilidad de la igualdad, ya que si

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma,$$

entonces

$$\alpha = (\alpha + \gamma) + (-\gamma) = (\beta + \gamma) + (-\gamma) = \beta,$$

lo cual es falso. Así pues, $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$. ▌

La multiplicación presenta dificultades propias. Si α, $\beta > \mathbf{0}$, entonces $\alpha \cdot \beta$ puede definirse como sigue.

Definición. Si α y β son números reales y α, $\beta > \mathbf{0}$, entonces

$$\alpha \cdot \beta = \{z\colon z \leq 0 \text{ o } z = x \cdot y \text{ para algún } x \text{ de } \alpha \text{ e } y \text{ de } \beta \text{ con } x, y > 0\}.$$

TEOREMA

Si α y β son números reales con α, $\beta > \mathbf{0}$, entonces $\alpha \cdot \beta$ es un número real.

DEMOSTRACIÓN

Como de costumbre, debemos comprobar cuatro condiciones.

(1) Supongamos $w < z$, donde z está en $\alpha \cdot \beta$. Si $w \leq 0$, entonces w está automáticamente en $\alpha \cdot \beta$. Supóngase que $w > 0$. Entonces $z > 0$, de modo que $z = x \cdot y$ para algún positivo x de α y algún positivo y de β. Ahora bien

$$w = \frac{wz}{z} = \frac{wxy}{z} = \left(\frac{w}{z} \cdot x\right) \cdot y.$$

Al ser $0 < w < 0$, tenemos $w/z < 1$, de modo que $(w/z) \cdot x$ está en α. Así pues, w está en $\alpha \cdot \beta$.

(2) Evidentemente $\alpha \cdot \beta \neq \emptyset$.

(3) Si x no está en α e y no está en β, entonces $x > x'$ para todos los x' de α, e $y > y'$ para todos los y' de β. Por lo tanto, $xy > x'y'$ para

todos estos positivos x' e y'. Así pues, xy no está en $\alpha \bullet \beta$; por lo tanto, $\alpha \bullet \beta \neq \mathbf{Q}$.

(4) Supóngase que w está en $\alpha \bullet \beta$, y $w \leq 0$. Existe algún x en α con $x > 0$ y algún y en β con $y > 0$. Entonces $z = xy$ está en $\alpha \bullet \beta$ y $z > w$. Supóngase ahora $w > 0$. Entonces $w = xy$ para algún positivo x de α y algún positivo y de β. Además, α contiene algún $x' > x$; si $z = x'y$, entonces $z > xy = w$, y z está en $\alpha \bullet \beta$. Así pues, $\alpha \bullet \beta$ no tiene ningún elemento máximo. ▮

Obsérvese que $\alpha \bullet \beta$ está claramente en **P** si lo están α y β. Esto completa la verificación de todas las propiedades de **P**. Para completar la definición de $\bullet$ definimos primero $|\alpha|$.

Definición. Si α es un número real, entonces

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{si } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Definición. Si α y β son números reales, entonces

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha = 0 \text{ o } \beta = 0 \\ |\alpha| \cdot |\beta|, & \text{si } \alpha > 0, \beta > 0 \text{ o } \alpha < 0, \beta < 0 \\ -(|\alpha| \cdot |\beta|), & \text{si } \alpha > 0, \beta < 0 \text{ o } \alpha < 0, \beta > 0. \end{cases}$$

Como era de suponer, las demostraciones de las propiedades de la multiplicación suponen por lo general la reducción al caso de los números positivos.

TEOREMA

Si α, β y γ son números reales, entonces $\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma) = (\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma$.

DEMOSTRACIÓN

Esto resulta claro si $\alpha, \beta, \gamma > 0$. La demostración del caso general exige distinguir los distintos casos (y se simplifica ligeramente si se aplica el siguiente teorema). ▮

TEOREMA

Si α y β son números reales, entonces $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$.

DEMOSTRACIÓN

Esto está claro si α, $\beta > \mathbf{0}$, y los demás casos se comprueban fácilmente. ▮

Definición. $\mathbf{1} = \{x \text{ en } \mathbf{Q}: x < 1\}$.
(Está claro que $\mathbf{1}$ es un número real.)

TEOREMA

Si α es un número real, entonces $\alpha \cdot \mathbf{1} = \alpha$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\alpha > \mathbf{0}$. Es fácil ver que todo elemento de $\alpha \cdot \mathbf{1}$ es también un elemento de α. Por otra parte, supóngase que x está en α. Si $x \leq 0$, entonces x está automáticamente en $\alpha \cdot \mathbf{1}$. Si $x > 0$, entonces existe algún número racional y en α tal que $x < y$. Entonces $x = y \cdot (x/y)$, y x/y está en $\mathbf{1}$, de modo que x está en $\alpha \cdot \mathbf{1}$. Esto demuestra que $\alpha \cdot \mathbf{1} = \alpha$ si $\alpha > \mathbf{0}$.

Si $\alpha < \mathbf{0}$, entonces, aplicando el resultado que acabamos de demostrar, se tiene

$$\alpha \cdot \mathbf{1} = -(|\alpha| \cdot |\mathbf{1}|) = -(|\alpha|) = \alpha.$$

Finalmente, el teorema es evidente cuando $\alpha = \mathbf{0}$. ▮

Definición. Si α es un número real y $\alpha > \mathbf{0}$, entonces

$\alpha^{-1} = \{x$ en $\mathbf{Q}$: $x \leq 0$, o $x > 0$ y $1/x$ no está en α, pero $1/x$ no es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha\}$;

si $\alpha < \mathbf{0}$, entonces $\alpha^{-1} = -(|\alpha|^{-1})$.

TEOREMA

Si α es un número real distinto de $\mathbf{0}$, entonces α^{-1} es un número real.

DEMOSTRACIÓN

Basta evidentemente considerar sólo $\alpha > \mathbf{0}$. Deben comprobarse cuatro condiciones.

(1) Supongamos $y < x$, y que x está en α^{-1}. Si $y \leq 0$, entonces y está en α^{-1}. Si $y > 0$, entonces $x > 0$, de modo que $1/x$ no está en α. Puesto que $1/y > 1/x$, se sigue que $1/y$ no está en α, y $1/y$ no es evidentemente el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$, de modo que y está en α^{-1}.

(2) Claramente $\alpha^{-1} \neq \emptyset$.

(3) Al ser $\alpha > \mathbf{0}$, existe algún número racional positivo x en α. Entonces $1/x$ no está en α^{-1}, de modo que $\alpha^{-1} \neq \mathbf{Q}$.

(4) Supóngase que x está en α^{-1}. Si $x \leq 0$, existe evidentemente algún y en α^{-1} con $y > x$, ya que α^{-1} contiene algunos racionales positivos. Si $x > 0$, entonces $1/x$ no está en α. Puesto que $1/x$ no es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$, existe algún número racional y que no está en α, con $y < 1/x$. Elíjase un número racional z con $y < z < 1/x$. Así pues, α^{-1} no contiene ningún elemento máximo. ▌

Para demostrar que α^{-1} es efectivamente el inverso de α respecto a la multiplicación, resulta útil disponer de otro lema, que es el análogo multiplicativo de nuestro primer lema.

LEMA

Sea α un número real con $\alpha > \mathbf{0}$, y z un número racional con $z > 1$. Entonces existen números racionales x en α, e y no en α, tales que $y/x = z$. Además, podemos suponer que y no es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$.

DEMOSTRACIÓN

Supóngase primero que z está en α. Puesto que $z - 1 > 0$ y

$$z^n = (1 + (z - 1))^n \geq 1 + n(z - 1),$$

se sigue que los números

$$z, z^2, z^3, \ldots$$

no pueden estar todos en α. Existe por lo tanto algún k tal que $x = z^k$ está en α, e $y = z^{k+1}$ no está en α. Evidentemente $y/x = z$. Además, si y resulta ser el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$, sea $x' > x$ un elemento de α, y sustitúyase x por x' e y por yx'/x.

Si z no está en α, existe una demostración análoga, basada en el hecho de que los números $1/z^k$ no pueden todos dejar de estar en α. ▌

TEOREMA

Si α es un número real y $\alpha \neq \mathbf{0}$, entonces $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \mathbf{1}$.

DEMOSTRACIÓN

Basta evidentemente considerar $\alpha > \mathbf{0}$, en cuyo caso $\alpha^{-1} > \mathbf{0}$. Supóngase que x es un número racional positivo de α, y que y es un número racional positivo de α^{-1}. Entonces $1/y$ no está en α, de modo que $1/y > x$; en consecuencia $xy < 1$, lo cual significa que xy está en $\mathbf{1}$. Puesto que todos los números racionales $x \leq 0$ están también en $\mathbf{1}$, esto demuestra que todo elemento de $\alpha \cdot \alpha^{-1}$ está en $\mathbf{1}$.

Para demostrar el enunciado recíproco, supóngase z en $\mathbf{1}$. Si $z \leq 0$, entonces evidentemente z está en $\alpha \cdot \alpha^{-1}$. Supóngase $0 < z < 1$. Según el lema, existen números racionales positivos x en α, e y no en α, tales que $y/x = 1/z$; y podemos suponer que y no es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$. Pero esto significa que $z = x \cdot (1/y)$, donde x está en α, y $1/y$ está en α^{-1}. En consecuencia, z está en $\alpha \cdot \alpha^{-1}$. ▌

¡Poco nos falta para terminar! Solamente queda la demostración de la ley distributiva. Una vez más hemos de considerar muchos casos, pero no desesperemos. El caso en que todos los números son positivos contiene un punto interesante, y los demás casos pueden despacharse todos muy elegantemente.

TEOREMA

Si α, β y γ son números reales, entonces $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

DEMOSTRACIÓN

Supóngase primero que $\alpha, \beta, \gamma > \mathbf{0}$. Entonces los dos números de la ecuación contienen todos los números racionales ≤ 0. Un número racional positivo de $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$ es de la forma $x \cdot (y + z)$ para un x positivo de α, y en β y z en γ. Puesto que $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, donde $x \cdot y$ es un elemento positivo de $\alpha \cdot \beta$ y $x \cdot z$ es un elemento positivo de $\alpha \cdot \gamma$, este número está también en $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$. Así pues, todo elemento de $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$ está también en $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Por otra parte, un número racional positivo de $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ es de la forma $x_1 \cdot y + x_2 \cdot z$ para x_1, x_2 positivos en α, y en β y z en γ. Si $x_1 \leq x_2$, entonces $(x_1/x_2) \cdot y \leq y$, de modo que $(x_1/x_2) \cdot y$ está en β. Así pues

$$x_1 \cdot y + x_2 \cdot z = x_2[(x_1/x_2)y + z]$$

está en $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$. El mismo artificio da, por supuesto, resultado si $x_2 \leq x_1$.

Para completar la demostración es necesario considerar los casos en que α, β y γ no son todos $> \mathbf{0}$. Si cualquiera de los tres es igual a $\mathbf{0}$, la demostración es fácil y los casos en que $\alpha < \mathbf{0}$ pueden deducirse inmediatamente una vez que se han tenido en cuenta todas las posibilidades para β y γ. Así pues, suponemos $\alpha > \mathbf{0}$ y consideramos tres casos: $\beta, \gamma < \mathbf{0}$; $\beta < \mathbf{0}, \gamma > \mathbf{0}$, y $\beta > \mathbf{0}, \gamma < \mathbf{0}$. El primero es consecuencia inmediata del caso ya demostrado, y el tercero se sigue del segundo intercambiando β con γ. Nos concentramos por lo tanto en el caso $\beta < \mathbf{0}, \gamma > \mathbf{0}$. Existen entonces dos posibilidades:

(1) $\beta + \gamma \geq \mathbf{0}$. Entonces

$$\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot ([\beta + \gamma] + |\beta|) = \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \cdot |\beta|,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta + \gamma) &= -(\alpha \cdot |\beta|) + \alpha \cdot \gamma \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma. \end{aligned}$$

(2) $\beta + \gamma \leq \mathbf{0}$. Entonces

$$\alpha \cdot |\beta| = \alpha \cdot (|\beta + \gamma| + \gamma) = \alpha \cdot |\beta + \gamma| + \alpha \cdot \gamma,$$

así pues,

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = -(\alpha \cdot |\beta + \gamma|) = -(\alpha \cdot |\beta|) + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma. \blacksquare$$

Con esta demostración queda terminado el trabajo de este capítulo. Aunque largo y muchas veces pesado, este capítulo contiene resultados suficientemente importantes para ser leído detenidamente por lo menos una vez (¡y preferiblemente sólo una vez!). Ahora es cuando empezamos a estar seguros de no haber estado operando en un vacío: existe efectivamente un cuerpo ordenado completo, los teoremas de este libro no están basados sobre suposiciones que no pueden ser realizadas nunca. Queda todavía una posibilidad interesante y horrenda: puede ser que existan varios cuerpos ordenados completos. Si esto es así, entonces los teoremas del cálculo infinitesimal son inesperadamente ricos de contenido, pero las propiedades P1-P13 son decepcionantemente incompletas. El último capítulo

descarta esta posibilidad; las propiedades P1-P13 caracterizan por completo a los números reales: todo lo que se pueda demostrar acerca de los números reales, puede demostrarse basándose exclusivamente en estas propiedades.

PROBLEMAS

Solamente hay dos problemas en esta serie, pero cada uno de ellos pide una construcción completamente distinta de los números reales. El examen detallado de otra construcción se recomienda sólo a los masoquistas, pero vale la pena saber las ideas principales en que se basan estas otras construcciones. Los números reales construidos en este capítulo podrían ser llamados «números reales de los algebristas», ya que están definidos con el intento de asegurar la propiedad de la cota superior mínima, lo cual supone la ordenación $<$, que es una noción algebraica. El sistema de números reales construido en el problema que sigue podría ser llamado «números reales de los analistas», ya que están pensados para que las sucesiones de Cauchy sean siempre convergentes.

1. Puesto que todo número real debe ser el límite de alguna sucesión de Cauchy de números racionales, podríamos intentar *definir* un número real como una sucesión de Cauchy de números racionales. Puesto que dos sucesiones de Cauchy pueden converger sin embargo hacia un mismo número real, este intento requiere algunas modificaciones.

(a) Defínanse como *equivalentes* dos sucesiones de Cauchy de números racionales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ (y desígnese por $\{a_n\} \sim \{b_n\}$) si $\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$.

Demostrar que

$\{a_n\} \sim \{a_n\}$, que $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ si $\{b_n\} \sim \{a_n\}$, y que $\{a_n\} \sim \{c_n\}$ si $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ y $\{b_n\} \sim \{c_n\}$.

(b) Supóngase que α es el conjunto de todas las sucesiones equivalentes a $\{a_n\}$ y β es el conjunto de todas las sucesiones equivalentes a $\{b_n\}$. Demostrar que, o bien $\alpha \cap \beta = \emptyset$, o bien $\alpha = \beta$. (Si $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, entonces existe algún $\{c_n\}$ a la vez en α y en β. Demostrar que en este caso α y β consisten ambas precisamente en aquellas sucesiones que son equivalentes a $\{c_n\}$.)

La parte (b) indica que la colección de todas las sucesiones de Cauchy puede descomponerse en partes disjuntas, cada una de ellas consistente en todas las sucesiones equivalentes a alguna sucesión fija. Cada una de

estas colecciones decimos que es un número real, y designamos el conjunto de todos los números reales por **R**.

(c) Si α y β son números reales, sea $\{a_n\}$ una sucesión de α, y $\{b_n\}$ una sucesión de β. Definimos $\alpha + \beta$ como la colección de todas las sucesiones equivalentes a la sucesión $\{a_n + b_n\}$. Demostrar que $\{a_n + b_n\}$ es una sucesión de Cauchy y demostrar también que esta definición no depende de las sucesiones particulares $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ elegidas para α y β. Comprobar también que la definición análoga para la multiplicación está bien definida.

(d) Demostrar que **R** con estas operaciones es un cuerpo; el único punto interesante a comprobar es la existencia de un inverso respecto a la multiplicación.

(e) Defínanse los números reales positivos P de modo que **R** sea un cuerpo ordenado.

(f) Demostrar que toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente. Recordar que si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión de números reales, entonces cada α_n mismo es una colección de sucesiones de Cauchy de números racionales

2. Este problema indica la construcción de «los números reales de los estudiantes de bachillerato». Definimos un número real como un par $(a, \{b_n\})$, donde a es un entero y $\{b_n\}$ es una sucesión de números naturales de 0 a 9, con el supuesto de que la sucesión no es eventualmente 9; intuitivamente, este par representa $a + \sum_{n=1}^{\infty} b_n 10^{-n}$. Con esta definición, un número real es un objeto muy concreto, pero las dificultades que se encuentran para definir la suma y la multiplicación son formidables. (¿Cómo se pueden sumar infinitos decimales sin preocuparse de arrastrar enteros infinitamente lejos?) En lo que sigue indicamos un método razonable; el artificio consiste en utilizar desde el principio las cotas superiores mínimas.

(a) Defínase $(a, \{b_n\}) < (c, \{d_n\})$ si $a < c$, o si $a = c$ y para algún n tenemos $b_n < d_n$ pero $b_j = d_j$ para $1 \leq j < n$. Utilizando esta definición, demostrar la propiedad de la cota superior mínima.

(b) Dado $\alpha = (a, \{b_n\})$, defínase $\alpha_k = a + \sum_{n=1}^{k} b_n 10^{-n}$; intuitivamente, α_k es el número racional obtenido cambiando por cero todas las cifras decimales posteriores a la k-ésima. Recíprocamente, dado un número racional r de la forma $a + \sum_{n=1}^{k} b_n 10^{-n}$, sea r' el número real $(a, \{b_n'\})$, donde

$b_n' = b_n$ para $1 \leq n < k$ y $b_n' = 0$ para $n > k$. Para $\alpha = (a, \{b_n\})$ y $\beta = (c, \{d_n\})$ defínase ahora

$$\alpha + \beta = \sup \{(\alpha_k + \beta_k)' : k \text{ un número natural}\}$$

[la cota superior mínima existe según la parte (a)]. Si se define de manera análoga la multiplicación, entonces la verificación de todas las condiciones para un cuerpo es una tarea rutinaria no muy recomendada. Sin embargo, una vez más, la parte más difícil será demostrar la existencia del inverso respecto a la multiplicación.

CAPÍTULO

29

UNICIDAD DE LOS NÚMEROS REALES

Volveremos ahora a la notación usual para los números reales, reservando los símbolos en negrita para otros cuerpos que puedan surgir. Además, vamos a considerar a los números enteros y a los racionales como clases especiales de números reales, y prescindiremos de la manera particular utilizada para definir los números reales. En este capítulo nos interesa sólo una cuestión: ¿Existen cuerpos ordenados completos distintos de **R**? Tomada literalmente, la contestación a esta pregunta es «sí». Por ejemplo, el cuerpo F_3 introducido en el capítulo 25 es un cuerpo ordenado completo, y ciertamente no es **R**. Este cuerpo es un ejemplo «ingenuo», puesto que el par (a, a) puede considerarse como solamente un nombre distinto para el número real a; las operaciones

$$(a, a) \mathbin{\mathbf{+}} (b, b) = (a + b, a + b),$$
$$(a, a) \cdot (b, b) = (a \cdot b, a \cdot b),$$

son consistentes con este cambio de nombre. Este tipo de ejemplo hace ver que cualquier consideración inteligente de la cuestión exige algún medio matemático de estudiar tales procesos de cambio de nombre.

Si los elementos de un cuerpo F han de utilizarse para dar un nuevo nombre a los elementos de **R**, entonces para cada a de **R** debería corresponder un «nombre» $f(a)$ de F. La notación $f(a)$ sugiere que se puede formular el cambio de nombre en términos de funciones. Para hacer esto vamos a necesitar un concepto de función mucho más general que cualquiera de los que se han presentado hasta

ahora; necesitaremos efectivamente el concepto más general de «función» utilizado en matemáticas. Una función, en este sentido general, es sencillamente una regla que asigna a algunos objetos, otros objetos. Hablando formalmente, una **función** es una colección de pares ordenados (de objetos de cualquier tipo) que no contiene dos pares distintos con el mismo primer elemento. El **dominio** de una función f es el conjunto A de todos los objetos a tales que (a, b) está en f para algún b; este b (único) se designa por $f(a)$. Si $f(a)$ está en el conjunto B para todo a de A, entonces f recibe el nombre de función **de** A **en** B. Por ejemplo,

si $f(x) = \text{sen } x$ para todo x de $\mathbf{R}$ (y f está definida solamente para x de $\mathbf{R}$), entonces f es una función de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$; es también una función de $\mathbf{R}$ en $[-1, 1]$;
si $f(z) = \text{sen } z$ para todo z de $\mathbf{C}$, entonces f es una función de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{C}$;
si $f(z) = e^z$ para todo z de $\mathbf{C}$, entonces f es una función de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{C}$; es también una función de $\mathbf{C}$ en $\{z \text{ en } \mathbf{C};\ z \neq 0\}$;
θ es una función de $\{z \text{ en } \mathbf{C}:\ z \neq 0\}$ en $\{x \text{ en } \mathbf{R}:\ 0 \leq x < 2\pi\}$;
si f es la colección de todos los pares $(a, (a, a))$ para a en $\mathbf{R}$, entonces f es una función de $\mathbf{R}$ en F_3.

Supóngase que F_1 y F_2 son dos cuerpos; designaremos las operaciones en F_1 por $\oplus$, $\odot$, etc., y las operaciones en F_2 por $+$, $\cdot$, etc. Si F_2 ha de ser considerado como una colección de nombres nuevos para los elementos de F_1, entonces debería existir una función de F_1 en F_2 con las siguientes propiedades:

(1) La función f debe ser uno-uno, es decir, si $x \neq y$, entonces deberíamos tener $f(x) \neq f(y)$; esto significa que no existen dos elementos de F_1 que tengan el mismo nombre.
(2) La función f debe ser «sobre», es decir, para todo elemento z de F_2 debe haber algún x en F_1 tal que $z = f(x)$; esto significa que todo elemento de F_2 es utilizado para nombrar algún elemento de F_1.
(3) Para todo x e y de F_1 debemos tener

$$f(x \oplus y) = f(x) + f(y),$$
$$f(x \odot y) = f(x) \cdot f(y);$$

esto significa que el proceso de cambio de nombre es consistente con las operaciones del cuerpo.

Si consideramos F_1 y F_2 como cuerpos ordenados, hemos de añadir una condición más:

(4) Si $x \otimes y$, entonces $f(x) < f(y)$.

Una función con estas propiedades recibe el nombre de *isomorfismo* de F_1 en F_2. La definición es tan importante que la volvemos a enunciar formalmente.

DEFINICIÓN

Si F_1 y F_2 son dos cuerpos, un **isomorfismo** de F_1 a F_2 es una función f de F_1 en F_2 con las propiedades siguientes:

(1) Si $x \neq y$ entonces $f(x) \neq f(y)$.
(2) Si z está en F_2, entonces $z = f(x)$ para algún x de F_1.
(3) Si x e y están en F_1, entonces

$$f(x \oplus y) = f(x) + f(y),$$
$$f(x \odot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Si F_1 y F_2 son cuerpos ordenados exigimos también:

(4) Si $x \otimes y$, entonces $f(x) < f(y)$.

Los cuerpos F_1 y F_2 se dice que son **isomorfos** si existe un isomorfismo entre ellos. Los cuerpos isomorfos pueden considerarse como esencialmente idénticos: cualquier propiedad importante de uno de ellos se cumplirá automáticamente para el otro. Podemos, por lo tanto, y debemos, reformular la pregunta puesta al principio de este capítulo; si F es un cuerpo ordenado completo resulta ingenuo esperar que F sea igual a **R**; nos interesa más bien saber si F es isomorfo a **R**. En el teorema siguiente, F será un cuerpo, con las operaciones $+$ y $\cdot$, y con «elementos positivos» **P**; escribimos $a < b$ para significar que $b - a$ está en **P**, y así sucesivamente.

TEOREMA

Si F es un cuerpo ordenado completo, entonces F es isomorfo a **R**.

DEMOSTRACIÓN

Puesto que dos cuerpos son, por definición, isomorfos, si existe un isomorfismo

entre ellos, debemos construir una función f de $\mathbf{R}$ en F que constituya efectivamente un isomorfismo. Empezamos definiendo f para los enteros como sigue:

$$\begin{aligned} f(0) &= \mathbf{0}, \\ f(n) &= \underbrace{\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}_{n \text{ veces}} \quad \text{para } n > 0, \\ f(n) &= -(\underbrace{\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}_{|n| \text{ veces}}) \quad \text{para } n < 0. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} f(m+n) &= f(m) + f(n), \\ f(m \cdot n) &= f(m) \cdot f(n), \end{aligned}$$

para todos los enteros m y n, y resulta conveniente designar $f(n)$ por $\boldsymbol{n}$. Definimos después f para los números racionales por

$$f(m/n) = \boldsymbol{m}/\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}^{-1}$$

(obsérvese que $\mathbf{1} + \ldots + \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ si $n > 0$, ya que F es un cuerpo ordenado). Esta definición tiene sentido, ya que si $m/n = k/l$, entonces $ml = nk$, de modo que $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{l} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}$, así que $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}^{-1} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{l}^{-1}$. Es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} f(r_1 + r_2) &= f(r_1) + f(r_2), \\ f(r_1 \cdot r_2) &= f(r_1) \cdot f(r_2), \end{aligned}$$

para todos los números racionales r_1 y r_2, y que $f(r_1) < f(r_2)$ si $r_1 < r_2$.

La definición de $f(x)$ para un x arbitrario está basada en la idea, ahora ya familiar, de que cualquier número real está determinado por los números racionales menores que él. Para cualquier x de $\mathbf{R}$, sea A_x el subconjunto de F que consiste en todos los $f(r)$, para todos los números racionales $r < x$. El conjunto A_x no es ciertamente vacío y es acotado superiormente, ya que si r_0 es un número racional con $r_0 > x$, entonces $f(r_0) > f(r)$ para todos los $f(r)$ de A_x. Al ser F un cuerpo ordenado completo, el conjunto A_x tiene una cota superior mínima; definimos $f(x)$ como $\sup A_x$.

Tenemos ahora $f(x)$ definido de dos maneras distintas, primero para x racional, y después para x cualquiera. Antes de pasar adelante, es preciso demostrar que estas dos definiciones concuerdan cuando x es racional. Dicho de otro modo, si x es un número racional, tenemos que demostrar que

$$\sup A_x = f(x),$$

donde $f(x)$ denota aquí m/n, para $x = m/n$. Estó no es automático, sino que se basa en la completitud de F; hace falta, pues, una ligera digresión.

Por ser F completo, los elementos

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}} \text{ para números naturales } n$$

forman un conjunto que no es acotado superiormente; la demostración es exactamente la misma que la demostración para **R** (teorema 8-2). Las consecuencias de este hecho para **R** tienen sus análogas exactas en F: en particular, si a y b son elementos de F con $a < b$, entonces existe un número racional r tal que

$$a < f(r) < b.$$

Una vez hecha esta observación, volvemos a la demostración de que las dos definiciones de $f(x)$ concuerdan cuando x es racional. Si y es un número racional con $y < x$, entonces hemos visto ya que $f(y) < f(x)$. De este modo todo elemento de A_x es $< f(x)$. En consecuencia,

$$\sup A_x \leq f(x).$$

Supóngase, por otra parte, que tuviéramos

$$\sup A_x < f(x).$$

Existiría entonces un número racional r tal que

$$\sup A_x < f(r) < f(x).$$

Pero la condición $f(r) < f(x)$ significa que $r < x$, lo cual significa que $f(r)$ está en el conjunto A_x; esto contradice claramente la condición $\sup A_x < f(r)$. Esta contradicción demuestra que la suposición original es falsa, de modo que

$$\sup A_x = f(x).$$

Tenemos así cierta función bien definida f de **R** en F. Para demostrar que f

es un isomorfismo debemos verificar las condiciones (1)-(4) de la definición. Empezaremos con (4).

Si x e y son números reales con $x < y$, entonces claramente A_x está contenido en A_y. Así pues,

$$f(x) = \sup A_x \leq \sup A_y = f(y).$$

Para excluir la posibilidad de la igualdad, obsérvese que existen números racionales r y s con

$$x < r < s < y.$$

Sabemos que $f(r) < f(s)$. Se sigue que

$$f(x) \leq f(r) < f(s) \leq f(y).$$

Esto demuestra (4).

La condición (1) se sigue inmediatamente de (4): Si $x \neq y$, entonces o bien $x < y$, o $y < x$. En el primer caso, $f(x) < f(y)$, y en el segundo caso $f(y) < f(x)$; en cualquiera de los dos casos $f(x) \neq f(y)$.

Para demostrar (2), sea a un elemento de F y sea B el conjunto de todos los números racionales r con $f(r) < a$. El conjunto B no es vacío, y es también acotado superiormente, ya que existe un número racional s con $f(s) > a$, de modo que $f(s) > f(r)$ para r en B, lo cual implica que $s > r$. Sea x la cota superior mínima de B; decimos que $f(x) = a$. Para demostrar esto basta eliminar las alternativas

$$f(x) < a,$$
$$a < f(x).$$

En el primer caso tendría que existir un número racional r con

$$f(x) < f(r) < a.$$

Pero esto significa que $x < r$ y que r está en B, lo cual contradice el hecho de que $x = \sup B$. En el segundo caso tendría que existir un número racional r con

$$a < f(r) < f(x).$$

Esto implica que $r < x$. Puesto que $x = \sup B$, esto significa que $r < s$ para algún s de B. Por lo tanto,

$$f(r) < f(s) < a,$$

lo cual es otra vez una contradicción. Así pues, $f(x) = a$, con lo cual queda demostrado (2).

Para comprobar (3), sean x e y números reales y supóngase que $f(x + y) \neq f(x) + f(y)$. Entonces, o bien

$$f(x + y) < f(x) + f(y) \quad \text{o} \quad f(x) + f(y) < f(x + y).$$

En el primer caso existiría un número racional r tal que

$$f(x + y) < f(r) < f(x) + f(y).$$

Pero esto significaría que

$$x + y < r.$$

Por lo tanto r podría escribirse como suma de dos números racionales

$$r = r_1 + r_2, \quad \text{donde } x < r_1 \quad \text{y} \quad y < r_2.$$

Entonces, utilizando los hechos comprobados acerca de f para los números *racionales*, se seguiría que

$$f(r) = f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2) > f(x) + f(y),$$

lo cual es una contradicción. El otro caso se trata de manera análoga.

Finalmente, si x e y son números reales positivos, el mismo tipo de razonamiento demuestra que

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y);$$

el caso general es entonces una consecuencia sencilla. ▮

Este teorema concluye nuestra investigación de los números reales, y resuelve cualquier duda acerca de ellos: *Existe* un cuerpo ordenado completo y, salvo iso-

morfismo, solamente un cuerpo ordenado completo. Constituye una parte importante de una formación matemática seguir en detalle una construcción de los números reales, pero no es necesario referirse siempre de nuevo a esta construcción particular. Es absolutamente irrelevante que un número real sea una colección de números racionales y este hecho no debe formar parte nunca de la demostración de ningún teorema importante acerca de números reales. Las demostraciones razonables deben utilizar solamente el hecho de que los números reales constituyen un cuerpo ordenado completo, ya que esta propiedad de los números reales los caracteriza salvo isomorfismo, y cualquier propiedad importante de los números reales se cumplirá para todos los cuerpos isomorfos. Para ser sincero, debo admitir que esta última afirmación no es más que un prejuicio del autor, pero es un prejuicio compartido por casi todos los matemáticos.

PROBLEMAS

1. Sea f un isomorfismo de F_1 a F_2.
 (a) Demostrar que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. (Aquí el $\mathbf{0}$ y el $\mathbf{1}$ de la izquierda designan elementos de F_1, mientras que el $\mathbf{0}$ y el $\mathbf{1}$ de la derecha designan elementos de F_2.)
 (b) Demostrar que $f(-a) = -f(a)$ y $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, para $a \neq \mathbf{0}$.

2. Hay aquí una oportunidad para que el lector se convenza de que cualquier propiedad importante de un cuerpo es compartida por cualquier cuerpo isomorfo a él. Lo importante de este problema consiste en escribir demostraciones muy formales hasta que se esté seguro de que todos los enunciados de este tipo son evidentes. F_1 y F_2 serán dos cuerpos isomorfos; para mayor sencillez designaremos las operaciones en ambos por $+$ y $\cdot$. Demostrar que:
 (a) Si la ecuación $x^2 + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ tiene una solución en F_1, entonces tiene una solución en F_2.
 (b) Si toda ecuación polinómica $x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0 = \mathbf{0}$ con $a_0, \dots, a_{n-1}$ en F_1 tiene una raíz en F_1, entonces toda ecuación polinómica $x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + b_0 = \mathbf{0}$ con $b_0, \dots, b_{n-1}$ en F_2 tiene una raíz en F_2.
 (c) Si $1 + \dots + 1$ (sumado m veces) $= \mathbf{0}$ en F_1, entonces se cumple lo mismo en F_2.
 (d) Si F_1 y F_2 son cuerpos ordenados (y el isomorfismo f satisface $f(x) < f(y)$ para $x < y$) y F_1 es completo, entonces F_2 es completo.

3. Sea f un isomorfismo de F_1 a F_2 y g un isomorfismo de F_2 a F_3. Defínase la función $g \circ f$ de F_1 en F_3 poniendo $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Demostrar que $g \circ f$ es un isomorfismo.

4. Supóngase que F es un cuerpo ordenado completo, de modo que existe un isomorfismo f de **R** a F. Demostrar que en realidad existe solamente *un* isomorfismo de **R** a F. Indicación: En el caso $F = \mathbf{R}$, esto es el problema 3-17. Si f y g son ahora dos isomorfismos de **R** en F considérese $g^{-1} \circ f$.

5. Hallar un isomorfismo de **C** a **C** distinto de la función identidad.

LECTURAS ACONSEJADAS

Todo hombre debería leer
sólo aquello a que le lleva su inclinación,
ya que lo que lee como obligación
de poco le aprovechará.

SAMUEL JOHNSON

Uno de los objetivos de esta reseña bibliográfica es orientar al lector hacia otras fuentes, pero la función más importante que puede llenar es la de llamar la atención acerca de la enorme variedad de literatura matemática existente. En consecuencia, hemos intentado que esta reseña ofrezca diversidad, pero sin pretensiones de que sea completa. Esto hubiese sido de todos modos imposible, dada la plétora actual de libros de matemáticas, y puesto que lo que pretendemos es recomendar la lectura independiente, cuanto más clásico sea un libro menor será la probabilidad de que aparezca aquí. En algunos casos podrá parecer que esta política se ha llevado hasta el extremo, puesto que un estudiante que termine un primer curso de cálculo infinitesimal sólo estará en condiciones de leer algunos de los libros de la lista después de pasados unos años. No obstante, hay muchas selecciones que pueden ser leídas ahora y no creo que pueda ser perjudicial el tener una idea de lo que queda por delante.

Uno de los teoremas más elementales no demostrados en este libro es el hecho de que todo número natural tiene una expresión única como producto de números primos. Se encontrará una demostración de este teorema fundamental en las primeras páginas de casi todos los libros de teoría elemental de números. Pocos libros se han hecho tan populares como

[1] *An Introduction to the Theory of Numbers* (tercera edición), por G. H. Hardy y E. M. Wright; Clarendon Press, Oxford, 1960.

La Pergamon Press publica una serie, Popular Lectures in Mathematics, con varios títulos preciosos, entre ellos

[2] *A Selection of Problems in the Theory of Numbers,* por W. Sierpinski; Macmillan (Pergamon), Nueva York, 1964.

Mencionaré finalmente un opúsculo que supongo estará todavía en venta:

[3] *Three Pearls of Number Theory,* por A. Khinchin; Graylock Press, Rochester, N.Y., 1952.

El tema de los números irracionales toca los campos de la teoría de números y del análisis. Se encontrará una excelente introducción en

[4] *Irrational Numbers,* por I. M. Niven; Wiley, Nueva York, 1956.

Junto con muchas notas históricas, contiene referencias a algunos artículos bastante elementales de revistas. Contiene también una demostración de que π es trascendente (véase también [53]) y, finalmente, una demostración del «teorema de Gelfond-Schneider»: Si a y b son algebraicos, con $a \neq 0$ o 1, y b es irracional, entonces a^b es trascendente.

Todos los libros enumerados hasta aquí empiezan con los números naturales, pero siempre que sea necesario dan por conocidos los números irracionales y, por supuesto, los enteros y los racionales. Varios libros recientes presentan una

construcción de los números racionales a partir de los números naturales, pero es difícil que exista un tratamiento más lúcido que el que se encuentra en

[5] *Foundations of Analysis*, por E. Landau; Chelsea, Nueva York, 1951.

Incidentalmente, la edición alemana original

[6] *Grundlagen der Analysis* (cuarta edición), por E. Landau; Chelsea, Nueva York, 1965.

está ahora a la venta en rústica, junto con un diccionario completo alemán-inglés (de unas 300 palabras) para todo el libro, lo cual es un medio excelente para empezar a leer el alemán matemático. La idea fundamental para la construcción de los números reales procede de Dedekind, cuyas contribuciones pueden encontrarse en

[7] *Essays on the Theory of Numbers*, por R. Dedekind; Dover, Nueva York, 1963.

Mientras muchos matemáticos se contentan con aceptar los números naturales como punto de partida natural, los números pueden definirse en términos de conjuntos, lo cual constituye el punto de partida más fundamental de todos. Se puede encontrar una exposición deliciosa de teoría de conjuntos en un pequeño libro titulado

[8] *Naive Set Theory*, por P. R. Halmos; Van Nostrand, Princeton, N.J., 1961.

Otra introducción muy buena es

[9] *Theory of Sets*, por E. Kamke; Dover, Nueva York, 1950.

Quizá sea necesario asegurar a algunas «víctimas» de la nueva matemática que la teoría de conjuntos tiene efectivamente algún contenido matemático (de hecho, algunos teoremas muy profundos). Haciendo uso de estos resultados profundos, Kamke demuestra que existe una función discontinua f tal que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ para todo x e y. Para los que tienen gusto en leer los clásicos, los conceptos más importantes de la teoría de conjuntos fueron introducidos primeramente por Cantor, cuya obra se reproduce en

[10] *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, por G. Cantor; Dover, Nueva York, 1952.

Las desigualdades, que fueron tratadas como materia elemental en los capítulos 1 y 2, forman en realidad un campo especializado. Una buena introducción elemental es ofrecida por

[11] *Analytic Inequalities*, por N. Kazarinoff; Holt, Rinehart y Winston, Nueva York, 1961.

Doce demostraciones diferentes de que la media geométrica es menor o igual

que la media aritmética, cada una de ellas basada en un principio distinto, pueden encontrarse al principio del libro más avanzado

[12] *Inequalities,* por E. Beckenbach y R. Bellman; Springer, Nueva York, 1961.

La obra clásica sobre desigualdades es

[13] *Inequalities* (segunda edición), por G. H. Hardy, J. E. Littlewood y G. Polya; Cambridge University Press, Nueva York, 1952.

Cada uno de los autores de esta colaboración ha suministrado su contribución propia a la escasa literatura sobre la naturaleza del pensamiento matemático, escrita desde el punto de vista de un matemático. Mi preferido es

[14] *A Mathematician's Apology,* por G. H. Hardy; Cambridge University Press, Nueva York, 1940.

Las selecciones de tipo anecdótico de Littlewood llevan el título

[15] *A Mathematician's Miscellany,* por J. E. Littlewood; Mathuen, 1953.

La contribución de Polya es la pedagogía al más alto nivel:

[16] *Mathematics and Plausible Reasoning,* por G. Polya (Vol. I: *Induction and Analogy in Mathematics*; Vol. II: *Patterns of Plausible Inference*); University Press, Princeton, N.J., 1954.

La geometría es el otro campo principal que puede considerarse como básico para el cálculo infinitesimal. Los *Elementos* de Euclides constituye todavía una obra maestra en las matemáticas, pero su lectura quizá debería ser pospuesta hasta tener cierta preparación. Probablemente la mejor obra moderna sobre «geometría clásica» es

[17] *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint,* por E. Moise; Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963.

Este hermoso libro ofrece excelentes perspectivas históricas y contiene un estudio completo del papel del «axioma arquimediano» en Geometría; además, el capítulo 28 describe un cuerpo ordenado en el cual no se cumple el axioma de Arquímedes. Puestos a hablar de libros buenos de geometría, pueden encontrarse cosas fascinantes de todo tipo en

[18] *Introduction to Geometry,* por H. S. Coxeter; Wiley, Nueva York, 1961.

En casi todos los tratados de geometría se menciona por lo menos la convexidad, la cual constituye otro tema especializado. No puedo imaginar mejor introducción a la convexidad o mejor experiencia matemática en general, que la lectura y estudio de

[19] *Convex Figures,* por I. M. Yaglom y W. G. Boltyanskii; Holt, Rinehart y Wiston, Nueva York, 1961.

Este libro contiene una sucesión cuidadosamente ordenada de definiciones y *enun-*

ciados de teoremas, cuyas demostraciones debe dar el lector (al final del libro se encuentran algunas demostraciones hechas). Otro libro de geometría modelado según el mismo principio es:

[20] *Combinatorial Geometry in the Plane*, por H. Hadwiger y H. Debrunner; Holt, Rinehart y Winston, Nueva York, 1964.

Junto con estos dos libros fuera de serie, podría mencionar un pequeño libro valioso en extremo, también de especialización,

[21] *Counterexamples in Analysis*, por B. Gelbaum y J. Olmsted; Holden-Day, San Francisco, 1964.

Muchos de los ejemplos de este libro proceden de temas más avanzados de análisis, pero bastantes de ellos pueden ser apreciados por todo el que tenga conocimientos de cálculo infinitesimal.

En cuanto a libros de cálculo infinitesimal solamente voy a mencionar dos, cada uno de los cuales tiene algo de clásico.

[22] *A Course of Pure Mathematics* (décima edición), por G. H. Hardy; Cambridge University Press, Nueva York, 1952.

[23] *Differential and Integral Calculus*, por R. Courant; Vol. I, segunda edición, 1937; Vol. II, primera edición, Wiley (Interscience), Nueva York, 1936.

Courant es particularmente fuerte en las aplicaciones. Además, las últimas partes del volumen I contienen material propio, por lo general, del cálculo infinitesimal avanzado, incluyendo ecuaciones diferenciales y series de Fourier. Una introducción a las series de Fourier (que requiere algo de cálculo infinitesimal avanzado) se encontrará también en

[24] *Introducción a las series e integrales de Fourier*, por R. Seeley; Edit. Reverté, S. A., Barcelona, 1970.

El segundo volumen de Courant (cálculo infinitesimal avanzado en serio) contiene materias adicionales acerca de ecuaciones diferenciales, así como una introducción al cálculo de variaciones. No voy a mencionar ningún libro dedicado exclusivamente al cálculo de variaciones, ya que éstos son (por necesidad) muy difíciles. Se han escrito innumerables libros sobre ecuaciones diferenciales, pero ninguno de los elementales parece despertar mucho entusiasmo. Existe, sin embargo, un libro algo más avanzado que despierta general admiración:

[25] *Lectures on Ordinary Differential Equations*, por W. Hurewicz; M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1958.

Pasaré por alto los libros más o menos clásicos de cálculo infinitesimal avanzado (que el lector mismo podrá encontrar fácilmente), ya que hoy día existe una tendencia a revisar en su totalidad la presentación del cálculo infinitesimal

avanzado, basándolo sobre el álgebra lineal. Uno de los primeros, y todavía uno de los mejores, tratados de cálculo infinitesimal avanzado que utilizan álgebra lineal es

[26] *Calculus of Vector Functions*, por R. H. Crowell y R. E. Williamson; Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

Varios libros recientes sobre cálculo infinitesimal avanzado llevan el intento de dar a conocer a los estudiantes no graduados partes muy extensas de la matemática moderna. Mi preferido es, como es natural,

[27] *Cálculos en variedades*, por M. Spivak; Edit. Reverté, S. A., Barcelona, 1970.

Existen otros tres temas que están algo fuera de lugar en esta bibliografía, puesto que se están convirtiendo rápidamente en parte normal de un curso universitario. El estudio eficiente de los cuerpos y de los sistemas relacionados con ellos constituye el dominio del «álgebra». El primer texto de álgebra moderna para universitarios fue

[28] *A Survey of Modern Algebra* (tercera edición), por G. Birkhoff y S. Mac-Lane; Macmillan, Nueva York, 1941.

Uno de los más fuertes competidores es ahora

[29] *Topics in Algebra*, por I. N. Herstein; Ginn (Blaisdell), Boston, Mass., 1963.

El libro de Herstein pretende constituir un término medio en cuanto a dificultad entre *A survey of Modern Algebra* y uno de los grandes clásicos:

[30] *Modern Algebra*, por B. L. van der Waerden; Ungar, Nueva York, 1953.

Dicho sea de paso, este libro contiene una demostración de la descomposición en fracciones simples de una función racional.

Uno de los textos clásicos de análisis complejo es

[31] *Complex Analysis* (segunda edición), por L. V. Ahlfors; McGraw-Hill, Nueva York, 1966.

Personalmente estoy esperando con ilusión que aparezca

[32] *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable*, por G. W. Mackey; Van Nostrand, Princeton, N.J., 1967.

Finalmente, el estudio de la topología, aunque nunca mencionado aquí, ha estado verdaderamente en el fondo de muchas discusiones, ya que constituye la generalización natural de los conceptos acerca de límites y continuidad que desempeñan un papel tan destacado en la parte II de este libro. Existen ahora muchos libros elementales de topología, pero no me animo a leerlos y a valorarlos a todos, de modo que me limitaré a llamar la atención sobre el hecho de que existen y a advertir que algunos de ellos no son muy buenos.

Los próximos temas, que van de los elementales a los muy difíciles, se inclu-

yen en esta bibliografía por haber sido aludidos en el texto. La demostración de que una función no decreciente es derivable en casi todos los puntos (y una explicación precisa de lo que esto significa) se expone elegantemente en

[33] *Functional Analysis*, por F. Riesz y B. Sz.-Nagy; Ungar, New York, 1955.

(Después de este comienzo elemental, el libro pasa a un material muy avanzado.) La función gamma tiene un opúsculo muy bien presentado, dedicado por completo a sus propiedades, demostradas la mayor parte de ellas utilizando el teorema de Bohr y Mollerup que ha sido mencionado en el problema 18-52:

[34] *The Gamma Function*, por E. Artin; Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

La función gamma no es sino una de las varias importantes integrales impropias de las matemáticas. En particular, el cálculo de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ (véase problema 18-54) es importante en la teoría de la probabilidad, donde la «función de distribución normal»

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

desempeña un papel fundamental. El siguiente libro se ha convertido ya en algo clásico:

[35] *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (segunda edición), por W. Feller; Wiley, New York, 1957.

La imposibilidad de integrar ciertas funciones en términos elementales (entre ellas $f(x) = e^{-x^2}$) constituye uno de los temas más esotéricos de las matemáticas. Un interesante estudio de las posibilidades de integración en términos elementales, junto con un esquema de las demostraciones de imposibilidad, con referencia a los trabajos originales de Liouville, se encontrará en

[36] *The Integration of Functions of a Single Variable* (segunda edición), por G. H. Hardy; Cambridge University Press, New York, 1958.

Una presentación completa de las demostraciones de imposibilidad se encontrará en

[37] *Integration in Finite Terms*, por J. Ritt; Columbia University Press, New York, 1948.

Por extraño que parezca, un problema relacionado, pero al parecer más difícil, tiene una solución mucho más clara. Existen ecuaciones diferenciales sencillas (un ejemplo particular es $y'' + xy = 0$) cuyas soluciones no pueden expresarse ni

siquiera en términos de integrales indefinidas de funciones elementales. Este hecho se demuestra en la página 43 del libro (de 60 páginas)

[38] *An Introduction to Differential Algebra*, por I. Kaplansky; Hermann, Paris, 1957.

Sin embargo, para leer este libro hacen falta bastantes conocimientos de álgebra. (Muy recientemente se han obtenido exposiciones igualmente algebraicas y nítidas de los teoremas de Liouville, y es de esperar que se publiquen pronto.) Unas pocas palabras deben decirse también en defensa del proceso de integración en términos elementales, el cual muchos matemáticos consideran como un arte (contraponiéndolo a la derivación que es simplemente destreza en el oficio). Probablemente el lector se habrá ya dado cuenta de que el proceso de integración puede facilitarse mediante tablas de integrales indefinidas. Para los que disfrutan con el manejo de tablas existe una colección verdaderamente buena, que incluye integrales indefinidas, integrales impropias definidas, y muchas cosas más (si el lector necesita alguna vez saber el valor del trigésimo cuarto número de Bernoulli, es ahí donde tiene que buscarlo):

[39] *Tables of Integrals, Series, and Products*, por I. S. Gradschteyn e I. W. Ryzhik; Academic Press, Nueva York, 1965.

Para los ahorrativos, existe una tabla de integrales en rústica:

[40] *Tables of Indefinite Integrals*, por G. Petit Bois; Dover, Nueva York, 1961.

Las referencias restantes son de un tipo algo distinto. Caen dentro de tres categorías, de las cuales la primera es histórica. La carta de H. A. Schwartz, a la que nos hemos referido en el problema 11-65, se encontrará en

[41] *Ways of Thought of Great Mathematicians*, por H. Meschkowski; Holden-Day, San Francisco, 1964.

Algunas notas históricas, y un intento de incorporarlas a la enseñanza del cálculo infinitesimal, se encontrarán en

[42] *The Calculus: A Genetic Approach*, por O. Toeplitz; University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1963.

La mayor parte de los libros de texto sobre historia de las matemáticas son a la vez superficiales y oscuros. Una excepción admirable la constituye

[43] *An Introduction to the History of Mathematics*, por H. Eves; Holt, Rinehart y Winston, Nueva York, 1964.

Tres obras escolares buenas son

[44] *History of Analytic Geometry*, por C. Boyer; Academic Press, Nueva York, 1965.

[45] *A History of the Calculus, and Its Conceptual Development*, por C. Boyer; Dover, Nueva York, 1959.

[46] *The Mathematics of Great Amateurs,* por J. Coolidge; Dover, Nueva York, 1963.

Un libro reciente presenta consideraciones filosóficas acerca de la historia de las matemáticas, escrito por un autor cuya excepcional erudición es tanto más impresionante cuanto que se trata de un matemático de primera línea:

[47] *The Role of Mathematics in the Rise of Science,* por S. Bochner; Princeton University Press, Princeton, N.J., 1966.

Finalmente, se encontrarán extractos de fuentes originales en

[48] *A Source Book in Mathematics* (2 vols.), por D. Smith; Dover, Nueva York, 1959.

El elevado número de libros enumerados aquí puede fácilmente dar una impresión demasiado optimista acerca de la disponibilidad de información histórica. Si bien los primeros orígenes de las matemáticas están siendo objeto del más cuidadoso estudio, no parece que nadie se haya ocupado mucho acerca de los orígenes del cálculo infinitesimal. Por ejemplo, es casi imposible averiguar quién fue el primero en demostrar el teorema del valor medio (según la *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* volumen II, fue O. Bonnet, cuyo nombre es conocido por los estudiantes de geometría diferencial por el «teorema de Gauss-Bonnet»). Análogamente, casi todos los libros de historia nos dicen que Wallis demostró la fórmula de Wallis mediante un «complicado método de interpolación», pero casi nadie se preocupa de mencionar cómo era este método, no obstante haber sido el que inspiró las investigaciones de Euler acerca de la función gamma (se da una descripción en el libro de soluciones, junto con la solución al problema 18-53).

La segunda categoría de este grupo final de libros podría describirse como «divulgaciones». A pesar de los editoriales de *The New York Times,* existe un número sorprendentemente grande de ellas, hechas por matemáticos de primera línea:

[49] *What is Mathematics?* (cuarta edición), por R. Courant y H. Robbins; Oxford University Press, Nueva York, 1947.

[50] *Geometry and the Imagination,* por D. Hilbert y S. Cohn-Vossen. Chelsea, Nueva York, 1956.

[51] *The Enjoyment of Mathematics,* por H. Rademacher y O. Toeplitz; Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957.

[52] *Famous Problems of Mathematics* (segunda edición), por H. Tietze; Graylock Press, Rochester, N.Y., 1965.

Una de las «divulgaciones» de más renombre se ocupa de un modo particular de la enseñanza de las matemáticas:

[53] *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint,* por F. Klein

(vol. 1: *Arithmetic, Algebra, Analysis*; vol. 2: *Geometry*); Dover, Nueva York, 1948.

El volumen 1 contiene una demostración de la trascendencia de π, la cual, si bien no tan elemental como la de [4], constituye una análoga directa de la demostración de que e es trascendente, sustituyendo las integrales por integrales curvilíneas complejas. Se puede leer tan pronto como se tengan los conocimientos básicos acerca del análisis complejo.

La tercera categoría está en el mismo extremo opuesto: se trata de trabajos originales. Las dificultades aquí encontradas son formidables, tanto es así que solamente he tenido valor de mencionar uno de tales trabajos, la fuente de donde procede la cita de la parte IV. No está ni siquiera en inglés, si bien se puede optar entre varias lenguas extranjeras. El artículo, escrito originalmente en francés, se encuentra en

[54] *Œuvres Complètes d'Abel*; Christiania. Johnson Reprint Corporation, Nueva York, 1965.

Apareció primero en una traducción alemana en el *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (1), 1826. Para mayor dificultad, estas referencias solamente se pueden obtener por lo general en bibliotecas universitarias. Con todo, el estudio de este trabajo será probablemente de tanto valor como cualquier otra lectura mencionada aquí. La razón de ello es sugerida por una observación del mismo Abel, quien atribuía su profundo conocimiento de las matemáticas al hecho de que él leía a los maestros más que a los discípulos.

SOLUCIONES A PROBLEMAS SELECCIONADOS

CAPÍTULO 1

1. (i) $1 = a^{-1}a = a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x = 1 \cdot x = x$.
   (iii) Si $x^2 = y^2$, entonces $0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, de modo que, o bien $x - y = 0$, o bien $x + y = 0$, es decir, o bien $x = -y$ o $x = y$.
   (vi) Sustitúyase y por $-y$ en (iv).
2. En una de las fases hace falta dividir por $x - y = 0$.
3. (i) $a/b = ab^{-1} = (ac)(b^{-1}c^{-1}) = (ac)(bc)^{-1}$ (por (iii)) $= ac/bc$.
   (ii) $(ad + bc)/(bd) = (ad + bc)(bd)^{-1} = (ad + bc)(b^{-1}d^{-1})$ (by (iii)) $= ab^{-1} + cd^{-1} = a/b + c/d$.
   (iii) $ab(a^{-1}b^{-1}) = (a \cdot a^{-1})(b \cdot b^{-1}) = 1$, así $a^{-1} \cdot b^{-1} = (ab)^{-1}$.
   (v) $(a/b)/(c/d) = (a/b)(c/d)^{-1} = (a \cdot b^{-1})(c \cdot d^{-1})^{-1}$
   $= (a \cdot b^{-1})(c^{-1} \cdot d) = ad(b^{-1} \cdot c^{-1}) = ad(bc)^{-1}$
   $= (ad)/(bc)$.
4. (i) $x < -1$.
   (iii) $x > \sqrt{7}$ o $x < -\sqrt{7}$.
   (v) Todo x, ya que $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$.
   (vii) $x > 3$ o $x < -2$, ya que 3 y -2 son las raíces de $x^2 - x - 6 = 0$.
   (ix) $x > \pi$ o $-5 < x < 3$.
   (xi) $x < 3$.
   (xiii) $x > 1$ o $0 < x < 1$.
5. (i) $b - a$ y $d - c$ están en P, de modo que $(b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c)$ está en P. Así pues, $b + d > a + c$.
   (iii) Utilizando (ii), $-c < -d$; entonces (i) implica que $a + (-c) < b + (-d)$.
   (v) $(b - a)$ y $-c$ están en P, de modo que $-c(b - a) = ac - bc$ están en P, es decir, $ac > bc$.
   (vii) Utilizando (iv), $a > 0$ y $a < 1$, de modo que $a^2 < a$.
   (ix) Póngase a en vez de c y b en vez de d en (viii).
9. (i) $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7}$.
   (iii) $|a + b| + |c| - |a + b + c|$.
   (v) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}$.
10. (i) a si $a \geq -b$ y $b \geq 0$;
    $-a$ si $a \leq -b$ y $b \leq 0$;
    $a + 2b$ si $a \geq -b$ y $b \leq 0$;
    $-a - 2b$ si $a \leq -b$ y $b \geq 0$.
    (iii) $x - x^2$ si $x \geq 0$;
    $-x - x^2$ si $x \leq 0$

11. (i) $x = 11, -5$.

(iii) $-6 < x < -2$.

(v) Ningún x (la distancia de x a 1 más la distancia de x a —1 es por lo menos 2).

(vii) $x = 1, -1$.

12. (i) $(|xy|)^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 = (|x| \cdot |y|)^2$; ya que $|xy|$ y $|x| \cdot |y|$ son ambos ≥ 0, esto demuestra que $|xy| = |x| \cdot |y|$.

(iii) $|x|/|y| = |x| \cdot |y|^{-1} = |x| \cdot |y^{-1}|$ (by (ii)) $= |xy^{-1}|$ (by (i)) $= |x/y|$.

(v) Se sigue de (iv) que $|x| = |y - (y - x)| \leq |y| + |y - x|$, así que $|x| - |y| \leq |x - y|$.

(vii) $|x + y + z| \leq |x + y| + |z| \leq |x| + |y| + |z|$. Si se cumple la igualdad, entonces $|x + y| = |x| + |y|$, de modo que x e y tienen el mismo signo. Además, z debe tener el mismo signo que $x + y$, de modo que x, y y z deben tener todos el mismo signo (a no ser que alguno de ellos sea 0).

CAPÍTULO 2

1. (i) Puesto que $1^2 = 1 \cdot (2) \cdot (2 \cdot 1 + 1)/6$, la fórmula se cumple para $n = 1$. Supóngase que la fórmula se cumple para k. Entonces

$$\begin{aligned}
1^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{(k+1)}{6}[k(2k+1) + 6(k+1)] \\
&= \frac{(k+1)}{6}[(k+2)(2k+3)] \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2[k+1]+1)}{6},
\end{aligned}$$

de modo que la fórmula se cumple para $k + 1$.

2. (i)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) \\
&= 1 + 2 + 3 + \cdots + 2n - 2(1 + \cdots + n) \\
&= \frac{(2n)(2n+1)}{2} - n(n+1) = n^2.
\end{aligned}$$

5. (a) Puesto que

$$1 + r = \frac{1 - r^2}{1 - r},$$

la fórmula se cumple para $n = 1$. Supóngase que

$$1 + r + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 1 + r + \cdots + r^n + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} \\ &= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1}(1 - r)}{1 - r} \\ &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} S &= 1 + r + \cdots + r^n \\ rS &= \phantom{1 + {}} r + \cdots + r^n + r^{n+1}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$S(1 - r) = S - rS = 1 - r^{n+1},$$

de modo que

$$S = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

6. (i) A partir de

$$(k + 1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1, \quad k = 1, \ldots, n$$

obtenemos

$$(n + 1)^4 - 1 = 4 \sum_{k=1}^{n} k^3 + 6 \sum_{k=1}^{n} k^2 + 4 \sum_{k=1}^{n} k + n,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{(n + 1)^4 - 1 - 6\,\dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} - 4\,\dfrac{n(n + 1)}{2} - n}{4} \\ &= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}. \end{aligned}$$

(iii) A partir de

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, \ldots, n$$

obtenemos

$$1 - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

8. 1 es o bien par o impar; de hecho es impar. Supóngase que n es o bien par o impar; entonces n puede expresarse o bien como $2k$ o $2k + 1$. En el primer caso $n + 1 = 2k + 1$ es impar; en el segundo caso, $n + 1 = 2k + 1 + 1 = 2(k + 1)$ es par. En cualquiera de los dos casos, $n + 1$ es o bien par o impar. (Hay que admitir que esto no parece serio, pero en realidad es correcto).

9. Sea B el conjunto de todos los números naturales l tales que $n_0 - 1 + l$ está en A. Entonces 1 está en B, y $l + 1$ está en B si l está en B, de modo que B contiene todos los números naturales, lo cual significa que A contiene todos los números naturales $\geq n_0$

12. (a) Sí, puesto que si $a + b$ fuese racional, entonces $b = (a + b) - a$ sería racional. Si a y b son irracionales, entonces $a + b$ podría ser racional, ya que b podría ser $r - a$ para algún número racional a.
 (b) Si $a = 0$, entonces ab es racional. Pero si $a \neq 0$, entonces ab no podría ser racional, ya que entonces $b = (ab) \cdot a^{-1}$ sería racional.
 (c) Sí; por ejemplo $\sqrt[4]{2}$.
 (d) Sí; por ejemplo $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.

13. (a) Puesto que

$$(3n + 1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3(3n^2 + 2n) + 1,$$
$$(3n + 2)^2 = 9n^2 + 12n + 4 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1,$$

se sigue que si k^2 es divisible por 3, entonces k debe ser también divisible por 3. Supóngase ahora que $\sqrt{3}$ fuese racional, y sea $\sqrt{3} = p/q$, donde p y q no tienen factores comunes. Entonces $p^2 = 3q^2$, de modo que p^2 es divisible por 3, así que también lo debe ser p. De este modo, $p = 3p'$ para algún número natural p', y en consecuencia $(3p')^2 = 3q^2$, o $3(p')^2 = q^2$. Así pues, q es también divisible por 3, lo cual es una contradicción.

Las mismas demostraciones valen para $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$, ya que las ecuaciones

$$\begin{aligned}(5n + 1)^2 &= 25n^2 + 10n + 1 = 5(5n^2 + 2n) + 1,\\ (5n + 2)^2 &= 25n^2 + 20n + 4 = 5(5n^2 + 4n) + 4,\\ (5n + 3)^2 &= 25n^2 + 30n + 9 = 5(5n^2 + 6n + 1) + 4,\\ (5n + 4)^2 &= 25n^2 + 40n + 16 = 5(5n^2 + 8n + 3) + 1,\end{aligned}$$

y las ecuaciones correspondientes para los números de la forma $6n + m$ demuestran que si k^2 es divisible por 5 ó 6, entonces también lo debe ser k. La demostración falla para $\sqrt{4}$, porque $(4n + 2)^2$ es divisible por 4. (Precisamente por esta razón esta demostración no puede aplicarse para demostrar que en general $\sqrt{a}$ es irracional si a no es un cuadrado perfecto: no tenemos ninguna garantía de que $(an + m)^2$ no pueda ser un múltiplo de a para algún $m < a$. En realidad, esta afirmación *es* verdadera, pero para la demostración hace falta la información del problema 17.)

(b) Puesto que

$$(2n + 1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2(4n^3 + 6n^2 + 3n) + 1,$$

se sigue que si k^3 es par, entonces k es par. Si $\sqrt[3]{2} = p/q$, donde p y q no tienen factores comunes, entonces $p^3 = 2q^3$, de modo que p^3 es divisible por 2, por lo que también lo debe ser p. Así pues, $p = 2p'$ para algún número natural p', y en consecuencia $(2p')^3 = 2q^3$, o $4(p')^3 = q^3$. Por lo tanto, q es también par, lo cual es una contradicción.

La demostración para $\sqrt[3]{3}$ es análoga, utilizando las ecuaciones

$$\begin{aligned}(3n + 1)^3 &= 27n^3 + 27n^2 + 9n + 1 = 3(9n^3 + 9n^2 + 3n) + 1,\\ (3n + 2)^3 &= 27n^3 + 54n^2 + 36n + 8 = 3(9n^3 + 18n^2 + 12n + 2) + 2.\end{aligned}$$

19. Si $n = 1$, entonces $(1 + h)^n = 1 + nh$. Supóngase que $(1 + h)^n \geq 1 + nh$. Entonces

$$\begin{aligned}(1 + h)^{n+1} &= (1 + h)(1 + h)^n \geq (1 + h)(1 + nh), \text{ ya que } 1 + h > 0\\ &= 1 + (n + 1)h + nh^2 \geq 1 + (n + 1)h.\end{aligned}$$

Para $h > 0$, la igualdad se sigue directamente del teorema del binomio, ya

que todos los demás términos que aparecen en el desarrollo de $(1 + h)^n$ son positivos.

CAPÍTULO 3

1. (i) $(x + 1)/(x + 2)$; la expresión $f(f(x))$ tiene sentido solamente cuando $x \neq -1$ y $x \neq -2$.
   (iii) $1/(1 + cx)$ (ya que $x \neq -1/c$ si $c \neq 0$).
   (v) $(x + y + 2)/(x + 1)(y + 1)$ (ya que $x, y \neq -1$).
   (vii) Solamente $c = 1$, ya que $f(x) = f(cx)$ implica que $x = cx$, y esto debe cumplirse por lo menos para un $x \neq 0$.
2. (i) $y \geq 0$ y racional, o $y \geq 1$.
   (iii) 0.
   (v) -1, 0, 1.
3. (i) $\{x\colon -1 \leq x \leq 1\}$.
   (iii) $\{x\colon x \neq 1 \text{ y } x \neq 2\}$.
   (v) $\emptyset$.
4. (i) 2^{2^y}.
   (iii) $2^{2^{\operatorname{sen} t}} + \operatorname{sen}(2^t)$.
5. (i) $P \circ s$.
   (iii) $s \circ S$.
   (v) $P \circ P$.
   (vii) $s \circ s \circ s \circ P \circ P \circ P \circ s$.
11. (a) y.
   (b) $H(y)$.
   (c) $H(y)$.
12. (a)

	par	impar
par	par	ni uno ni otro
impar	ni uno ni otro	impar

   (b)

	par	impar
par	par	impar
impar	impar	par

(c)

	f par	f impar
g par	par	par
g impar	par	impar

(d) Sea $g(x) = f(x)$ para $x \geq 0$ y defínase g de un modo arbitrario para $x < 0$.

21. (i) Sea $g(x) = h(x) = 1$ y sea f una función para la cual $f(2) \neq f(1) + f(1)$. Entonces $f \circ (g + h) \neq f \circ g + f \circ h$.
(ii) $[(g + h) \circ f](x) = (g + h)(f(x)) = g(f(x)) + h(f(x)) = (g \circ f)(x) + (h \circ f)(x) = [(g \circ f) + (h \circ f)](x)$.
(iii) $\dfrac{1}{f \circ g}(x) = \dfrac{1}{f(g(x))} = \dfrac{1}{f}(g(x)) = \left(\dfrac{1}{f} \circ g\right)(x)$.
(iv) Sea $g(x) = 2$ y sea f una función para la cual $f(\frac{1}{2}) \neq 1/f(2)$. Entonces $1/(f \circ g) \neq f \circ (1/g)$.

CAPÍTULO 4

1. (i) $(2, 4)$.
(iii) $[2, 4]$.
(v) $(-2, 2)$.
(vii) $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$.
3. (i) Todos los puntos por debajo de la gráfica de $f(x) = x$.
(iii) Todos los puntos por debajo de la gráfica de $f(x) = x^2$.
(v) Todos los puntos comprendidos entre las gráficas de $f(x) = x + 1$ y $f(x) = x - 1$.
(vii) Una colección de rectas paralelas a la gráfica de $f(x) = -x$, que cortan al eje horizontal en los puntos $(n, 0)$ para n entero.
(ix) Todos los puntos interiores al círculo de radio 1 alrededor de $(1, 2)$.
4. (i) Un cuadrado de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$.
(iii) La unión de la grafica de $f(x) = x$ y de $f(x) = 2 - x$.
(v) El punto $(0, 0)$.
(vii) El círculo de radio $\sqrt{5}$ alrededor de $(1, 0)$, puesto que $x^2 - 2x + y^2 = (x - 1)^2 + y^2 - 1$.

6. (a) Obsérvese simplemente que la gráfica de $f(x) = m(x - a) + b = mx + (b - ma)$ *es* una recta de pendiente m, que pasa por el punto (a, b).

(Lo importante de este ejercicio es sencillamente recordar la forma punto pendiente.)

(b) La recta por (a, b) y (c, d) tiene pendiente $(d - b)/(c - a)$, de modo que la ecuación se sigue de la parte (a).

(c) Cuando $m = m'$ y $b \neq b'$. En tal caso, no existe evidentemente ningún número x con $f(x) = g(x)$, mientras que tal número existe siempre si $m \neq m'$, a saber, $x = (b' - b)/(m - m')$.

7. (a) Si $B = 0$ y $A \neq 0$, entonces el conjunto es la recta vertical formada por todos los puntos (x, y) con $x = -C/A$. Si $B \neq 0$, el conjunto es la gráfica de $f(x) = (-A/B)\,x + (-C/A)$.

(b) Los puntos (x, y) de la vertical con $x = a$ son precisamente los que satisfacen $1 \cdot x + 0 \cdot y + (-a) = 0$. Los puntos (x, y) de la gráfica de $f(x) = mx + b$ son precisamente los que satisfacen $(-m)x + 1 \cdot y + (-b) = 0$.

11. (i) La gráfica de f es simétrica respecto al eje vertical.

(ii) La gráfica de f es simétrica respecto al origen. De modo equivalente, la parte de la gráfica a la izquierda del eje vertical se obtiene reflejando primero a través del eje vertical, y después a través del eje horizontal.

(iii) La gráfica de f queda por encima o sobre el eje horizontal.

(iv) La gráfica de f repite una y otra vez la parte comprendida entre 0 y a.

21. (a) El cuadrado de la distancia de (x, x^2) a $(0, \frac{1}{4})$ es

$$\begin{aligned} x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 &= x^2 + x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16} \\ &= x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16} \\ &= (x^2 + \tfrac{1}{4})^2, \end{aligned}$$

lo cual es el cuadrado de la distancia de (x, x^2) a la gráfica de g.

(b) El punto (x, y) satisface esta condición si y sólo si

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (y - \gamma)^2,$$

o

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = y^2 - 2\gamma y + \gamma^2,$$

o

$$y = \left(\frac{1}{2\beta - 2\gamma}\right)x^2 + \left(\frac{\alpha}{\gamma - \beta}\right)x + \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\beta - 2\gamma}\right).$$

(Esta solución vale solamente para $\beta \neq \gamma$, lo cual es precisamente la condición de que P no esté sobre L. Si P está sobre L, entonces la solución es la recta vertical por P.)

CAPÍTULO 5

1. (ii) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x^2 + 2x + 4) = 12.$$

(iv) $$\lim_{x\to y} \frac{x^n - y^n}{x - y} = \lim_{x\to y} x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$
$$= y^{n-1} + y^{n-1} + \cdots + y^{n-1} = ny^{n-1}.$$

(vi) $$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

3. (i) Es posible hallar δ empezando con la ecuación

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3).$$

Si $|x - a| < 1$, entonces $|x| < 1 + |a|$, de modo que

$$|x^3 + ax^2 + a^2x + a^3| \leq |x|^3 + |a| \cdot |x|^2 + |a|^2 \cdot |x| + |a|^3$$
$$< (1 + |a|)^3 + |a|(1 + |a|)^2 + |a|^2(1 + |a|) + |a|^3;$$

por lo tanto podemos elegir

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{(1 + |a|)^3 + |a|(1 + |a|)^2 + |a|^2(1 + |a|) + |a|^3}\right).$$

Resulta instructivo, y probablemente más fácil, utilizar la parte (2) del lema. Ésta demuestra que $|x^4 - a^4| < \varepsilon$ cuando

$$|x^2 - a^2| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|a|^2 + 1)}\right),$$

lo cual se cumple cuando

$$|x - a| < \min\left(1, \frac{\min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{2(|a|^2+1)}\right)}{2(|a| + 1)}\right)$$
$$= \min\left(1, \frac{\varepsilon}{4(|a|^2 + 1)(|a| + 1)}\right) = \delta.$$

(ii) Según la parte (3) del lema, $|1/x - 1| < \varepsilon$ cuando

$$|x - 1| < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \delta.$$

(iii) Según la parte (1) del lema, $|(x^4 + 1/x) - 2| < \varepsilon$ cuando $|1/x - 1| < \varepsilon/2$ y $|x^4 - 1| < \varepsilon/2$. Según las partes (i) y (ii) de este problema, esto ocurre cuando

$$|x - 1| < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}, 1, \frac{\varepsilon}{8 \cdot 2 \cdot 2}\right) = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{32}\right) = \delta.$$

(v) Póngase $\delta = \varepsilon^2$, puesto que $0 < |x| < \varepsilon^2$ implica que $\sqrt{|x|} < \varepsilon$.

6. (i) Necesitamos que $|f(x) - 2| < \varepsilon/2$ y $|g(x) - 4| < \varepsilon/2$, de modo que hace falta que sea

$$0 < |x - 2| < \min\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\varepsilon^2}{36}\right) + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \delta.$$

(iii) Necesitamos que

$$|g(x) - 4| < \min\left(\frac{|4|}{2}, \frac{\varepsilon|4|^2}{2}\right),$$

de modo que debe ser

$$0 < |x - 2| < [\min(2, 8\varepsilon)]^2 = \delta.$$

9. Sea $l = \lim_{x \to a} f(x)$ y defínase $g(h) = f(a + h)$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - 1| < \varepsilon$. Ahora bien, si $0 < |h| < \delta$, entonces $0 < |(h + a) - a| < \delta$, de modo que $|f(a + h) - l| < \varepsilon$. Esta desigualdad puede escribirse $|g(h) - l| < \varepsilon$. Así pues, $\lim_{h \to 0} g(h) = l$, lo cual puede escribirse también $\lim_{h \to 0} f(a + h) = l$. El mismo tipo de razonamiento demuestra que si $\lim_{h \to 0} f(a + h) = m$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = m$. Así pues, existe uno cualquiera de los dos límites si existe el otro, y en este caso son iguales.

10. (a) Intuitivamente, podemos hacer $f(x)$ tan próximo como queramos de l si y sólo si podemos hacer $f(x) - l$ tan próximo como queramos de 0. La demostración formal es tan trivial que cuesta bastante trabajo conseguir que aparezca una demostración. Precisando mucho, supóngase que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ y pongamos $g(x) = f(x) - l$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Esta última desigualdad puede escribirse $|g(x) - 0| < \varepsilon$, de modo que $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. El razonamiento en sentido inverso es igual de vulgar.

(b) Intuitivamente, aproximar x a a es lo mismo que aproximar $x - a$ a 0. Formalmente: Supóngase que $\lim_{x \to a} f(x) = l$, y póngase $g(x) = f(x - a)$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Ahora bien, si $0 < |y| < \delta$, entonces $0 < |(y + a) - a| < \delta$, de modo que $|f(y + a) - l| < \varepsilon$. Pero esta última desigualdad puede ponerse $|g(y) - l| < \varepsilon$. Así pues, $\lim_{y \to 0} g(y) = l$. El razonamiento en la otra dirección es parecido.

(c) Intuitivamente, x está próximo a 0 si y sólo si lo está x^3. Formalmente: Sea $\lim_{x \to 0} f(x) = l$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Entonces, si $0 < |x| < \min(1, \delta)$, tenemos $0 < |x^3| < \delta$, de modo que $|f(x^3) - l| < \varepsilon$. Así pues, $\lim_{x \to 0} f(x) = l$. Por otra parte, si suponemos que $\lim_{x \to 0} f(x^3)$ existe, pongamos $\lim_{x \to 0} f(x^3) = m$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un δ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x^3) - m| < \varepsilon$. Entonces, si $0 < |x| < \delta^3$, tenemos $0 < |\sqrt[3]{x}| < \delta$, de modo que $|f([\sqrt[3]{x}]^3) - m| < \varepsilon$, o $|f(x) - m| < \varepsilon$. Así pues, $\lim_{x \to 0} f(x) = m$.

(d) Sea $f(x) = 1$ para $x \geq 0$ y $f(x) = -1$ para $x < 0$. Entonces $\lim_{x \to 0} f(x^2) = 1$, pero $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

17. (a) La función $f(x) = 1/x$ no puede tender a ningún límite 0, ya que se hace

arbitrariamente grande cerca de 0. Efectivamente, cualquiera que sea $\delta > 0$, existe algún x que satisface $0 < |x| < \delta$, pero $1/x > |l| + \varepsilon$, a saber, $x = \min(\delta, 1/(|l| + \varepsilon))$. Este x no satisface $|1/x - l| < \varepsilon$.

(b) Cualquiera que sea $\delta > 0$, existe algún x que satisface $0 < |x - 1| < \delta$, pero $1/(x - 1) > |l| + \varepsilon$, a saber, $x = \min(1 + \delta, 1 + 1/(|l| + \varepsilon))$. Este x no satisface $|1/(x - 1) - l| < \varepsilon$. (Es también posible aplicar el problema 9 (b): $\lim_{x \to 0} 1/x = \lim_{x \to 1} 1/(x - 1)$ si este último existe, de modo que este límite no existe según la parte (a).)

25. (i) Ésta es la definición corriente, llamando simplemente a los números δ y ε, en vez de ε y δ.
    (ii) Ésta es una pequeña modificación de (i): si la condición se cumple para *todos* los $\delta > 0$, entonces se puede aplicar a $\delta/2$, de modo que existe un $\varepsilon > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \varepsilon$, entonces $|f(x) - l| \leq \delta/2 < \delta$.
    (iii) Ésta es una modificación parecida: aplíquese a $\delta/5$ para obtener (i).
    (iv) Esto también es una modificación: dice lo mismo que (i), ya que $\varepsilon/10 > 0$, y es solamente la existencia de *algún* $\varepsilon > 0$ lo que está en litigio.

29. Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para todo x,

$$\begin{array}{ll} \text{si } a < x < a + \delta_1, & \text{entonces } |f(x) - l| < \varepsilon, \\ \text{si } a - \delta_2 < x < a, & \text{entonces } |f(x) - l| < \varepsilon. \end{array}$$

Sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces o bien $a - \delta_2 < a - \delta < x < a$, o bien $a < x < a + \delta < a + \delta_1$, de modo que $|f(x) - l| < \varepsilon$.

30. (i) Si $l = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para $0 < x < \delta$. Si $-\delta < x < 0$, entonces $0 < -x < \delta$, de modo que $|f(-x) - l| < \varepsilon$. Así pues, $\lim_{x \to 0^-} f(-x) = l$. Análogamente, si $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ existe y tiene el mismo valor. (Intuitivamente, x está cerca de 0 y es positivo si y sólo si $-x$ está cerca de 0 y es negativo.)
    (ii) Si $l = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para $0 < x < \delta$. Así pues, si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(|x|) - l| < \varepsilon$. Por lo tanto, $\lim_{x \to 0} f(|x|) = l$. Lo inverso es parecido. (Intuitivamente, si x está cerca de 0, entonces $|x|$ está cerca de 0 y es positivo.)

(iii) Si $l = \lim_{x \to 0} f(x)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para $0 < x < \delta$. Si $0 < |x| < \sqrt{\delta}$, entonces $0 < x^2 < \delta$, de modo que $|f(x^2) - l| < \varepsilon$. Por lo tanto, $\lim_{x \to 0} f(x^2) = l$. La demostración recíproca es parecida. (Intuitivamente, si x está cerca de 0, entonces x^2 está cerca de 0 y es positivo.)

34. Si $l = \lim_{x \to \infty} f(x)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe algún N tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para $x > N$, y evidentemente podemos suponer que $N > 0$. Ahora bien, si $0 < x < 1/N$, entonces $1/x > N$, de modo que $|f(1/x) - l| < \varepsilon$. Por lo tanto, $\lim_{x \to 0^+} f(1/x) = l$. La demostración recíproca es parecida.

CAPÍTULO 6

1. (i) $F(x) = x + 2$ para todo x.
   (iii) $F(x) = 0$ para todo x.

CAPÍTULO 7

1. (i) Acotada superior e inferiormente; mínimo 0; no existe máximo.
   (iii) Acotada inferiormente pero no superiormente; mínimo 0.
   (v) Acotada superiormente e inferiormente. Se sobreentiende que $a > -1$ (de modo que $-a - 1 < a + 1$). Si $-1 < a \leq \frac{1}{2}$, entonces $a < -a - 1$, de modo que $f(x) = a + 2$ para todo x de $(-a - 1, a + 1)$, así que $a + 2$ es el máximo y el mínimo. Si $-\frac{1}{2} < a \leq 0$, entonces f tiene el mínimo a^2, y si $a \geq 0$, entonces f tiene el mínimo 0. Puesto que $a + 2 > (a + 1)^2$ solamente para $[-1 - \sqrt{5}]/2 < a < [1 + \sqrt{5}]/2$, cuando $a \geq -\frac{1}{2}$, la función f tiene un máximo solamente para $a \leq [1 + \sqrt{5}]/2$ (siendo este máximo $a + 2$).
   (vii) Acotada superior e inferiormente; máximo 1; mínimo 0.
   (ix) Acotada superior e inferiormente; máximo 1; mínimo -1.
   (xi) f tiene máximo y mínimo por ser continua.
2. (i) $n = -2$, ya que $f(-2) < 0 < f(-1)$.
   (iii) $n = -1$, ya que $f(-1) = -1 < 0 < f(0)$.
3. (i) Si $f(x) = x^{179} + 163/(1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x)$, entonces f es continua sobre **R** y $f(1) > 0$, mientras que $f(-2) < 0$, de modo que $f(x) = 0$ para algún x de $(-2, 1)$.
5. f es constante, ya que si f tomara dos valores distintos, entonces f tomaría todos los valores intermedios, incluyendo valores irracionales.

7. (1) $f(x) = x$;
   (2) $f(x) = -x$;
   (3) $f(x) = |x|$;
   (4) $f(x) = -|x|$.
10. Aplíquese el teorema 1 a $f - g$.
11. Si $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$, elíjase $x = 0$ o 1. Si $f(0) > 0 = I(0)$ y $f(1) < 1 = I(1)$, entonces el problema 10 aplicado a f y a I implica que $f(x) = x$ para algún x.

CAPÍTULO 8

1. (i) 1 es el elemento máximo, y la cota inferior máxima es 0, que no pertenece al conjunto.
   (iii) 1 es el máximo, y 0 es el mínimo.
   (v) Puesto que $\{x\colon x^2 + x + 1 \geq 0\} = \mathbf{R}$, no existe cota superior mínima ni cota inferior máxima.
   (vii) Puesto que $\{x\colon x < 0 \text{ y } x^2 + x - 1 < 0\} = ([-1 - \sqrt{5}]/2, 0)$, la cota inferior máxima es $[-1 - \sqrt{5}]/2$, y la cota superior mínima es 0; ninguna de las dos pertenece al conjunto.
2. (a) Puesto que $A \neq \emptyset$, existe algún x en A. Entonces $-x$ está en $-A$, de modo que $-A \neq \emptyset$. Puesto que A está acotado superiormente, existe algún y tal que $y \geq x$ para todo x de A. Entonces $-y \leq -x$ para todo x de A, de modo que $-y \leq z$ para todo z de $-A$, así que $-A$ está acotado inferiormente. Sea $\alpha = \sup(-A)$. Entonces α es una cota superior de $-A$, de modo que, invirtiendo el razonamiento anterior, $-\alpha$ es una cota inferior de A.
   Además, si β es cualquier cota inferior de A, entonces $-\beta$ es una cota superior de $-A$, de modo que $-\beta \geq \alpha$, de donde $\beta \leq -\alpha$. Así pues, $-\alpha$ es la cota inferior máxima de A.
5. (a) Si l es el mayor entero con $l \leq x$, entonces $l + 1 > x$, pero $l + 1 \leq x + 1 < y$. Así pues, podemos poner $k = l + 1$. (Demostración de que existe un tal entero l: Puesto que $\mathbf{N}$ no está acotado superiormente, existe algún número natural n con $-n < x < n$. Existen en consecuencia solamente un número finito de enteros l con $-n \leq l \leq x$. Tómese el mayor de ellos.)
   (b) Puesto que $y - x > 0$, existe algún número natural n con $1/n < y - x$. Puesto que $ny - nx > 1$, existe, según la parte (a), un entero k con $nx < k < ny$, lo cual significa que $x < k/n < y$.
   (c) Elíjase $r + \sqrt{2}\,(s - r)/2$.

(d) Según la parte (b), existe un número racional r con $x < r < y$, y por lo tanto un número racional s con $x < r < s < y$. Aplíquese la parte (c) a $r < s$.

10. Sea k el mayor entero $\leq x/\alpha$ (la solución del problema 5 demuestra que un tal k existe), y sea $x' = x - k\alpha \geq 0$. Si $x - k\alpha = x' \geq \alpha$, entonces $x \geq (k+1)\alpha$, de modo que $k + 1 \leq x/\alpha$, contradiciendo la elección de k. Por lo tanto, $0 \leq x' < \alpha$.

12. (a) Puesto que todo y de B satisface $y \geq x$ para todo x de A, cualquier y de B es una cota superior de A, de modo que $y \geq \sup A$.
    (b) La parte (a) demuestra que $\sup A$ es una cota inferior de B, de modo que $\sup A \leq \inf B$.

13. Puesto que $x \leq \sup A$ e $y \leq \sup B$ para todo x de A e y de B, se sigue que $x + y \leq \sup A + \sup B$. Así pues, $\sup A + \sup B$ es una cota superior de $A + B$, de modo que $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$. Si x e y se eligen respectivamente en A y en B, de modo que $\sup A - x < \varepsilon/2$ y $\sup B - y < \varepsilon/2$, entonces $\sup A + \sup B - (x + y) < \varepsilon$. Por lo tanto,

$$\sup(A + B) \geq x + y > \sup A + \sup B - \varepsilon.$$

CAPÍTULO 9

1. (a)

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}.$$

(b) La tangente por $(a, 1/a)$ es la gráfica de

$$g(x) = \frac{-1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a}$$
$$= \frac{-x}{a^2} + \frac{2}{a}.$$

Si $f(x) = g(x)$, entonces

$$\frac{1}{x} = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$$

o

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0,$$

de modo que $x = a$.

2. (a)

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{(a+h)^2} - \dfrac{1}{a^2}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(-2ah - h^2)}{ha^2(a+h)^2} = -\frac{2}{a^3}. \end{aligned}$$

(b) La tangente por $(a, 1/a^2)$ es la gráfica de

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{2}{a^3}(x - a) + \frac{1}{a^2} \\ &= -\frac{2x}{a^3} + \frac{3}{a^2}. \end{aligned}$$

Si $f(x) = g(x)$, entonces

$$\frac{1}{x^2} = \frac{-2x}{a^3} + \frac{3}{a^2},$$

o

$$2x^3 - 3ax^2 + a^3 = 0,$$

o

$$0 = (x - a)(2x^2 - ax - a^2) = (x - a)(2x + a)(x - a).$$

Así que $x = a$ o $x = -a/2$; el punto $(-a/2, 4/a^2)$ queda al lado opuesto de $(a, 1/a^2)$ respecto al eje vertical.

3.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

4. Conjetura: $S_n'(x) = nx^{n-1}$. Demostración:

$$S_n'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S_n(x+h) - S_n(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j}h^j - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j}h^{j-1}$$
$$= \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}, \text{ ya que } \lim_{h\to 0} h^{j-1} = 0 \text{ para } j > 1.$$

5. $f'(x) = 0$ si x no es entero, y $f'(x)$ no está definido si x es entero.

6. (a)

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + c] - [f(x) + c]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

(b)

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

$$= c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x).$$

7. (a) $f'(9) = 3 \cdot 9^2$; $f'(25) = 3 \cdot (25)^2$; $f'(36) = 3 \cdot (36)^2$.
   (b) $f'(3^2) = f'(9) = 3 \cdot 9^2$; $f'(5^2) = f'(25) = 3 \cdot (25)^2$; $f'(6^2) = f'(36) = 3 \cdot (36)^2$.
   (c) $f'(a^2) = 3(a^2)^2 = 3a^4$; $f'(x^2) = 3(x^2)^2 = 3x^4$.
   (d) $f'(x^2) = 3x^4$; pero $g(x) = x^6$, así que $g'(x) = 6x^5$.
8. (a)

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h+c) - f(x+c)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f([x+c]+h) - f(x+c)}{h} = f'(x+c).$$

   (b)

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(cx+ch) - f(cx)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{c[f(cx+ch) - f(cx)]}{ch} = \lim_{k \to 0} \frac{c[f(cx+k) - f(cx)]}{k}$$
$$= c \cdot \lim_{k \to 0} \frac{f(cx+k) - f(cx)}{k} = c \cdot f'(cx).$$

   (Compárense los detalles de este cálculo con el problema 5-14.)
   (c) Si $g(x) = f(x+a)$, entonces $g'(x) = f'(x+a)$, según la parte (a). Pero $g = f$, de modo que $f'(x) = g'(x) = f'(x+a)$ para todo x, lo cual significa que f' es periódica, con período a.
9. (i) Si $g(x) = x^5$, entonces $g'(x) = 5x^4$. Ahora bien, $f(x) = g(x+5)$, de modo que según el problema 8 (a), $f'(x) = g'(x+5) = 5(x+5)^4$.
   (ii) $f(x) = (x - 3)^5$, de modo que $f'(x) = 5(x - 3)^4$, como en la parte (i).
   (iii) $f(x) = (x+2)^7$, de modo que $f'(x) = 7(x+2)^6$, como en la parte (i).
10. Si $f(x) = g(t+x)$, entonces $f'(x) = g'(t+x)$, según el problema 8 (a). Si $f(t) = g(t+x)$, entonces $f'(t) = g'(t+x)$, según el problema 8 (a), de modo que $f'(x) = g'(2x)$.
11. (a) Si $s(t) = ct^2$, entonces $s'(t) = 2ct$, y no existe ningún número k tal que $s'(t) = ks(t)$ [es decir, $2ct = kct^2$] para todo t.
   (Dicho sea de paso, no conocemos por ahora ninguna función f distinta de 0 para la cual f' sea proporcional a f. Después del capítulo 17 podría

ser divertido determinar cómo sería el mundo si Galileo tuviese razón.)

(b) (i) Si $s(t) = (a/2)t^2$, entonces $s'(t) = at$, de modo que $s''(t) = a$.

(ii) $[s'(t)]^2 = (at)^2 = 2a \cdot (a/2)t^2 = 2as(t)$.

(c) El candelero cae $s(t) = 16t^2$ pies en t segundos, de modo que cae 400 pies en t segundos si $400 = 16t^2$ o $t = 5$. Después de 5 segundos la velocidad será $s'(5) = 5a = 5 \cdot 16 = 80$ pies por segundo. La velocidad era la mitad de ésta cuando $40 = s'(t) = 16t$, o $t = \frac{5}{2}$.

21. (a) Éste es otro modo de escribir la definición (vase el problema 5-9).

(b) Esto se sigue del problema 5-11, aplicado a las funciones $\alpha(h) = [f(a+h) - f(a)]/h$ y $\beta(h) = [g(a+h) - g(a)]/h$.

26. (i) $f''(x) = 6x$.

(ii) $f''(x) = 4x^3$.

30. (i) significa que $f'(a) = na^{n-1}$ si $f(x) = x^n$.

(iii) significa que $g'(a) = f'(a)$ si $g(x) = f(x) + c$.

(v) significa lo mismo que (iii).

(vii) significa que $g'(b) = f'(b+a)$ si $g(x) = f(x+a)$.

(ix) significa que $g'(b) = cf'(cb)$ si $g(x) = f(cx)$.

CAPÍTULO 10

1. (i) $(1 + 2x)\cdot\cos(x + x^2)$.

(iii) $(-\text{sen } x)\cdot\cos(\cos x)$.

(v) $\cos\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)\cdot\dfrac{-x \text{ sen } x - \cos x}{x^2}$.

(vii) $(\cos(x + \text{sen } x))\cdot(1 \cos x)$.

2. (i) $(\cos((x+1)^2(x+2)))\cdot[2(x+1)(x+2)(x+1)^2]$.

(iii) $[2 \text{ sen}((x + \text{sen } x)^2)\cdot\cos((x + \text{sen } x)^2)]\cdot 2(x + \text{sen } x)(1 + \cos x)$.

(v) $(\cos(x \text{ sen } x))\cdot(\text{sen } x + x\cos x) + (\cos(\text{sen } x^2)(\cos x^2))\cdot 2x$.

(vii) $(2 \text{ sen } x \cos x \text{ sen } x^2 \text{ sen}^2 x^2) + (2x \cos x^2 \text{ sen}^2 x \text{ sen}^2 x^2) + (\text{sen } x^2 \cos x^2 \text{ sen}^2 x \text{ sen } x^2)$.

(ix) $6(x + \text{sen}^5 x)^5(1 + 5 \text{ sen}^4 x \cos x)$.

(xi) $\cos(\text{sen}^7 x^7 + 1)^7 \cdot 7(\text{sen}^7 x^7 + 1)^6 \cdot (7 \text{ sen}^6 x^7 \cdot \cos x^7 \cdot 7x^6)$.

(xiii) $\cos(x^2 + \text{sen}(x^2 + \text{sen } x^2))\cdot[(2x + \cos(x^2 + \text{sen } x^2)\cdot(2x + 2x\cos x^2))]$.

(xv) $\dfrac{(1 + \text{sen } x)(2x\cos x^2 \cdot \text{sen}^2 x + \text{sen } x^2 \cdot 2 \text{ sen } x \cos x) - \cos x \text{ sen } x^2 \text{ sen}^2 x}{(1 + \text{sen } x)^2}$.

(xvii) $\cos\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right) \cdot$

$$\frac{3x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right) - x^3 \cos\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right) \cdot \left(\dfrac{3x^2 \operatorname{sen} x - x^3 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}.$$

4. (i) $-\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^2}$.
   (iii) $2x^2$.
5. (i) $-x^2$.
   (iii) 17.
6. (i) $f'(x) = g'(x + g(a))$.
   (iii) $f'(x) = g'(x + g(x)) \cdot (1 + g'(x))$.
   (v) $f'(x) = g(a)$.
7. (a) $A'(t) = 2\pi r(t)r'(t)$. Puesto que $r'(t) = 6$ para aquel t que hace $r(t) = 4$, se sigue que $A'(t) = 2\pi \cdot 4 \cdot 6 = 48\pi$ cuando $r(t) = 4$.
   (b) Si $V(t)$ es el volumen en el tiempo t, entonces $V(t) = 4\pi r(t)^3/3$, de modo que $V'(t) = 4\pi r(t)^2 r'(t) = 4\pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 384\pi$ cuando $r(t) = 4$.
   (c) Primer método: Puesto que $A'(t) = 2\pi r(t)r'(t)$, y $A'(t) = 5$ para $r(t) = 3$, se sigue que

$$r'(t) = \frac{A'(t)}{2\pi r(t)} = \frac{5}{6\pi} \text{ cuando } r(t) = 3.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} V'(t) &= 4\pi r(t)^2 r'(t) \\ &= 4\pi \cdot 9 \cdot \frac{5}{6\pi} \\ &= 30 \text{ cuando } r(t) = 3. \end{aligned}$$

Para aplicar el segundo método, observamos en primer lugar que si

$$f(t) = A(t)^{3/2} = \sqrt{A(t)^3},$$

entonces, aplicando el problema 9-3 y la regla de la cadena,

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{A(t)^3}} \cdot 3A(t)^2A'(t)$$
$$= \frac{1}{2A(t)^{3/2}} \cdot 3A(t)^2A'(t)$$
$$= \tfrac{3}{2}A(t)^{1/2}A'(t) \quad \text{(tal como podíamos haber supuesto).}$$

Ahora bien

$$V(t) = \frac{4\pi r(t)^3}{3} = \frac{4\pi[r(t)^2]^{3/2}}{3}$$
$$= \frac{4[\pi r(t)^2]^{3/2}}{3\pi^{1/2}}$$
$$= \frac{4A(t)^{3/2}}{3\pi^{1/2}}.$$

Así pues,

$$V'(t) = \frac{4}{3\pi^{1/2}} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{A(t)}\ A'(t)$$
$$= \frac{2}{\pi^{1/2}} \cdot \pi^{1/2} r(t)A'(t)$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

10. (i) $(f \circ h)'(0) = f'(h(0)) \cdot h'(0) = f'(3) \cdot \text{sen}^2(\text{sen } 1)$
$= 9(\text{sen}^2 \tfrac{1}{3})\text{sen}^2(\text{sen } 1).$

(iii) $\alpha'(x^2) = h'(x^4) \cdot 2x^2 = \text{sen}^2(\text{sen}(x^4 + 1)) \cdot 2x^2.$

12. La regla de la cadena implica que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= -\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x).$$

33. (i) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = (\cos y) \cdot (1 + 2x) = (\cos(x + x^2)) \cdot (1 + 2x).$

(iii) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = (-\text{sen } u) \cdot (\cos x) = (-\cos(\text{sen } x)) \cdot (\cos x).$

CAPÍTULO 11

1. (i) $0 = f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$ para $x = 2$ y $x = -\frac{4}{3}$, los cuales están ambos en $[-2, 2]$;

$$f(-2) = 5, f(2) = -11, f(-\tfrac{4}{3}) = \tfrac{203}{27};$$

máximo $= \frac{203}{27}$, mínimo $= -11$.

(iii) $0 = f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1)$ para $x = 0$ y $x = 1$, de los cuales solamente 0 está en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$;

$$f(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{43}{16}, f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{11}{16}, f(0) = 0;$$

máximo $= \frac{43}{16}$, mínimo $= 0$.

(v) $0 = f'(x) =$

$$\frac{x^2 + 1 - (x+1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - 2x - x^2}{(x^2+1)^2}$$

para $x = -1 + \sqrt{2}$ y $x = -1 - \sqrt{2}$, de los cuales solamente $-1 + \sqrt{2}$ está en $[-1, \frac{1}{2}]$;

$f(-1) = 0, f(\frac{1}{2}) = \frac{6}{5}, f(-1 + \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})/2;$

máximo $= (1 + \sqrt{2})/2$, mínimo $= 0$.

2. (i) $-\frac{4}{3}$ es un punto máximo local, y 2 es un punto mínimo local.

(iii) 0 es un punto mínimo local, y no existen puntos máximos locales.

(v) $-1 + \sqrt{2}$ es un punto máximo local, y $-1 - \sqrt{2}$ es un punto mínimo local.

4. (a) Obsérvese que f tiene en realidad un valor mínimo, ya que f es una función polinómica de grado par. El mínimo se presenta en el punto x con

$$0 = f'(x) = 2\sum_{i=1}^{n} (x - a_i),$$

de modo que $x = (a_1 + \ldots + a_n)/n$.

5. (i) 3 y 7 son puntos máximos locales, y 5 y 9 son puntos mínimos locales.

(iii) Todos los $x > 0$ irracionales son puntos mínimos locales, y todos los $x < 0$ irracionales son puntos máximos locales.

(v) x es un máximo (mínimo) local si el desarrollo decimal contiene (no contiene) un 5.

8. Si $f(x)$ es la longitud total del camino, entonces

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(1 - x)^2 + b^2}.$$

La función positiva f tiene evidentemente un mínimo, ya que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, y f es derivable por todas partes, de modo que el mínimo se presenta en el punto x con $f'(x) = 0$. Ahora bien, $f'(x) = 0$ cuando

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{(1 - x)}{\sqrt{(1 - x)^2 + b^2}} = 0.$$

Esta ecuación dice que arctg α = arctg β.

Es también posible observar que $f(x)$ es igual a la suma de las longitudes del segmento punteado y del segmento de $(x, 0)$ a $(1, b)$. Ésta es mínima cuando los dos segmentos rectilíneos están sobre una recta (por el problema 4-9 (b), si es que hace falta una razón rigurosa); un poco de geometría plana hace ver que esto ocurre cuando $\alpha = \beta$.

9. Si x es la longitud de un lado del rectángulo de perímetro P, entonces la longitud del otro lado es $(P - 2x)/2$, de modo que el área es

$$A(x) = \frac{x(P - 2x)}{2}.$$

De este modo el rectángulo de área máxima se presenta cuando x es el punto máximo para f sobre $(0, P/2)$. Al ser A continua sobre $[0, P/2]$, y $A(0) = A(P/2) = 0$, y $A(x) > 0$ para x en $(0, P/2)$, el máximo existe. Por ser A derivable sobre $(0, P/2)$, el punto mínimo x satisface

$$\begin{aligned} 0 = A'(x) &= \frac{P - 2x}{2} - x \\ &= \frac{P - 4x}{2}, \end{aligned}$$

de modo que $x = P/4$.

10. Sea $S(r)$ el área del cilindro circular recto de volumen V con radio r, por ser

$V = \pi r^2 h$ donde h es la altura,

tenemos $h = V/\pi r^2$, de modo que

$$\begin{aligned} S(r) &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}. \end{aligned}$$

Queremos el punto mínimo de S sobre $(0, \infty)$; éste existe, ya que $\lim_{r \to 0} S(r) = \lim_{r \to \infty} S(r) = \infty$. Al ser S derivable sobre $(0, \infty)$, el punto mínimo r satisface

$$\begin{aligned} 0 = S'(r) &= 4\pi r - \frac{2V}{r^2} \\ &= \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}, \end{aligned}$$

o

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

19. 1 es un punto máximo local y 3 un punto mínimo local.
25. (a) Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= f'(x) \text{ para algún } x \text{ de } (a, b) \\ &\geq M, \end{aligned}$$

así pues, $f(b) - f(a) \geq M(b - a)$.

(b) Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= f'(x) \text{ para algún } x \text{ de } (a, b) \\ &\leq m, \end{aligned}$$

así pues, $f(b) - f(a) \leq m(b - a)$.

(c) Si $|f(x)| \leq M$ para todo x de $[a, b]$, entonces $-M \leq f(x) \leq M$, de modo que

$$f(a) - M(b - a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b - a),$$

o

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a).$$

28. (a) $f(x) = -\cos x + a$ para algún número a (puesto que $f(x) = -\cos x$ es una de tales funciones, y dos cualesquiera de ellas difieren en una constante).
(b) $f'(x) = x^4/4 + a$ para algún número a, de modo que $f(x) = x^5/20 + ax + b$ para ciertos números a y b.
(c) $f''(x) = x^2/2 + x^3/3 + a$ para cierto a, de modo que $f'(x) = x^3/6 + x^4/12 + ax + b$ para ciertos a y b, de donde $f(x) = x^4/24 + x^5/60 + ax^2/2 + bx + c$ para ciertos números a, b y c. De modo equivalente, y más sencillo, $f(x) = x^4/24 + x^5/60 + ax^2 + bx + c$ para ciertos números a, b y c.

29. (a) Puesto que $s''(t) = -32$, tenemos $s'(t) = -32 + \alpha$ para cierto α, de modo que $s(t) = -16t^2 + \alpha t + \beta$ para algún α y β.
(b) Evidentemente, $s(0) = 0 + 0 + \beta$ y $s'(0) = 0 + \alpha$. Así pues, $\alpha = v_0$ y $\beta = s_0$.
(c) En este caso, $s_0 = 0$ y $v_0 = v$, de modo que $s(t) = -16t^2 + vt$. El valor máximo de s se presenta cuando $0 = s'(t) = -32t + v$, o bien $t = v/32$, de modo que el valor máximo es

$$\begin{aligned} s\left(\frac{v}{32}\right) &= -16\left(\frac{v}{32}\right)^2 + v\left(\frac{v}{32}\right) \\ &= \frac{-v^2}{64} + \frac{v^2}{32} \\ &= \frac{v^2}{64}. \end{aligned}$$

En aquel momento la velocidad es evidentemente 0, pero la aceleración es -32 (lo mismo que en cualquier instante). El peso da en el suelo en el tiempo $t > 0$ en que

$$0 = s(t) = -16\, t^2 + vt,$$

o bien $t = v/16$ (invierte el mismo tiempo en llegar abajo que el que invirtió en alcanzar el punto más alto). La velocidad es entonces

$$s'(v/16) = -32\left(\frac{v}{16}\right) + v$$
$$= -v$$

(la misma velocidad con que inició el movimiento hacia arriba).

44. Aplicar el teorema del valor medio a $f(x) = \sqrt{x}$ sobre $[64, 66]$:

$$\frac{\sqrt{66} - \sqrt{64}}{66 - 64} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{para algún } x \text{ de } [64, 66].$$

Puesto que $64 < x < 81$, tenemos $8 < \sqrt{x} < 9$, de modo que

$$\frac{1}{2 \cdot 9} < \frac{\sqrt{66} - 8}{2} < \frac{1}{2 \cdot 8}.$$

48. La regla de l'Hôpital no conduce a la ecuación

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{2}$$

puesto que $\lim_{x \to 1} 3x^2 + 1 \neq 0$.

49. (i)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sec^2 x} = \lim_{x \to 0} \cos^2 x = 1.$$

(ii)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{2x} = 1.$$

CAPÍTULO 12

1. (i) $f^{-1}(x) = (x - 1)^{1/3}$. (Si $y = f^{-1}(x)$, entonces $x = f(y) = y^3 + 1$, d donde $y = (x - 1)^{1/3}$.)

(iii) $f^{-1} = f$. (Si $y = f^{-1}(x)$, entonces

$$x = f(y) = \begin{cases} y, & y \text{ racional} \\ -y, & y \text{ irracional}; \end{cases}$$

puesto que $\pm y$ es racional o irracional al mismo tiempo que y, tenemos $y = x$ si x es racional, e $y = -x$ si x es irracional, de modo que $y = f(x)$.)

(v)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x \neq a_1, \dots, a_n \\ a_{i-1}, & x = a_i, \quad i = 2, \dots, n \\ a_n, & x = a_1. \end{cases}$$

(vii) $f^{-1} = f$.

2. (i) f^{-1} es creciente y $f^{-1}(x)$ no está definida para $x < 0$.
   (iii) f^{-1} es decreciente y $f^{-1}(x)$ no está definida para $x \leq 0$.
3. Supóngase que f es creciente. Sea $a < b$. Entonces $f^{-1}(a) \neq f^{-1}(b)$, ya que f^{-1} es uno-uno. De este modo, o bien $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$, o bien $f^{-1}(a) > f^{-1}(b)$. Pero si $f^{-1}(a) > f^{-1}(b)$, entonces

$$b = f(f^{-1}(b)) < f(f^{-1}(a)) = a,$$

lo cual es una contradicción. La demostración para f decreciente es análoga, o también se puede considerar $-f$ en vez.

4. Evidentemente, $f + g$ es creciente, ya que si $f(a) < f(b)$ y $g(a) < g(b)$, entonces $(f + g)(a) = f(a) + g(a) < f(b) + g(b) = (f + g)(b)$.
   $f \cdot g$ no es necesariamente creciente; por ejemplo, si $f(x) = g(x) = x$. (Pero $f \cdot g$ es creciente si $f(x) \geq 0$ para todo x.)
   $f \circ g$ es creciente, ya que si $a < b$, entonces $g(a) < g(b)$, de modo que $f(g(a)) < f(g(b))$.
5. (a) Si $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y)$, de modo que $f(g(x)) = f(g(y))$, entonces $g(x) = g(y)$, ya que f es uno-uno, así que $x = y$ por ser g uno-uno.
   $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$: pues si $y = (f \circ g)^{-1}(x)$, entonces $x = (f \circ g)(y) = f(g(y))$, de modo que $g(y) = f^{-1}(x)$, de donde $y = g^{-1}(f^{-1}(x))$.
6. Si $f(x) = f(y)$, entonces

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{ay + b}{cy + d},$$

de modo que

$$acxy + bcy + adx + bd = acxy + ady + bcx + bd,$$

o

$$ad(x - y) = bc(x - y).$$

Si $ad \neq bc$, esto implica que $x - y = 0$. (Pero si $ad = bc$, entonces $f(x) = f(y)$ para todos los x e y del dominio de f). Si $y = f^{-1}(x)$, entonces $x = f(y)$, de modo que

$$x = \frac{ay + b}{cy + d},$$

de donde

$$f^{-1}(x) = y = \frac{-dx + b}{cx - a}, \text{ para } x \neq a/c.$$

7. (i) Aquellos intervalos $[a, b]$ que están contenidos en $(-\infty, 0]$ o $[0, 2]$ o $[2, \infty)$, ya que f es creciente sobre $(-\infty, 0]$ y $[2, \infty)$, y decreciente sobre $[0, 2]$.
   (iii) Aquellos intervalos $[a, b]$ que están contenidos en $(-\infty, 0]$ o $[0, \infty)$, ya que f es creciente sobre $(-\infty, 0]$ y decreciente sobre $[0, \infty)$.

17. La fórmula de la derivada es:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}.$$

(En esta fórmula se sobrentiende que dx/dy significa $(f^{-1})'(y)$, mientras que dy/dx es una «expresión en x» y en la solución final x debe ser sustituida por y, por medio de la ecuación $y = f(x)$.)

El cálculo del problema 17, una vez completado, demuestra que

$$\frac{dx^{1/n}}{dx} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{1-(1/n)}}$$
$$= \frac{1}{n} x^{(1/n)-1}.$$

18. $G'(x) = x(f^{-1})'(x) + f^{-1}(x) - F'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$

$$\begin{aligned}&= x(f^{-1})'(x) + f^{-1}(x) - f(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)\\&= x(f^{-1})'(x) + f^{-1}(x) - x(f^{-1})'(x)\\&= f^{-1}(x).\end{aligned}$$

19. (i)

$$(h^{-1})'(3) = \frac{1}{h'(h^{-1}(3))} = \frac{1}{h'(0)} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} 1)}.$$

20. Puesto que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

tenemos

$$\begin{aligned}(f^{-1})''(x) &= \frac{-f''(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)}{[f'(f^{-1}(x))]^2}\\&= \frac{-f''(f^{-1}(x))}{[f'(f^{-1}(x))]^3}.\end{aligned}$$

CAPÍTULO 13

1. Si $P_n = \{t_0, \dots, t_n\}$ es la partición con $t_i = ib/n$, entonces

$$\begin{aligned}L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1})^3 \cdot (t_i - t_{i-1})\\&= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 \cdot \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{b}{n}\\&= \frac{b^4}{n^4}\sum_{j=0}^{n-1} j^3\\&= \frac{b^4}{n^4}\left[\frac{(n-1)^4}{4} + \frac{(n-1)^3}{2} + \frac{(n-1)^2}{4}\right],\end{aligned}$$

y análogamente,

$$U(f, P_n) = \frac{b^4}{n^4}\sum_{j=1}^{n} j^3$$
$$= \frac{b^4}{n^4}\left[\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\right].$$

Evidentemente $L(f, P_n)$ y $U(f, P_n)$ pueden aproximarse tanto como se quiera a $b^4/4$ eligiendo n suficientemente grande, de modo que $U(f, P_n) - L(f, P_n)$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, eligiendo n suficientemente grande. Esto demuestra que f es integrable. Además, existe solamente un número a con $L(f, P_n) \leq a \leq U(f, P_n)$ para todo n; puesto que $\int_0^b x^3\,dx$ tiene esta propiedad, la demostración de que $\int_0^b x^3\,dx = b^4/4$ quedará completa una vez que demostremos que $L(f, P_n) \leq b^4/4 \leq U(f, P_n)$ para todo n. Esto puede hacerse mediante un cálculo directo, pero en realidad es consecuencia del hecho de que $L(f, P_n)$ y $U(f, P_n)$ pueden aproximarse tanto como se quiera a $b^4/4$ eligiendo n suficientemente grande. Efectivamente, si fuese verdad que $b^4/4 < \int_0^b x^3\,dx$, entonces no se podría aproximar $U(f, P_n)$ tanto como se quisiera a $b^4/4$ eligiendo n suficientemente grande, ya que cada $U(f, P_n) \geq \int_0^b x^3\,dx$, y análogamente tampoco podemos tener $b^4/4 > \int_0^b x^3\,dx$.

2. Tenemos

$$L(f, P_n) = \frac{b^5}{n^5}\left[\frac{(n-1)^5}{5} + \frac{(n-1)^4}{2} + \frac{(n-1)^3}{3} - \frac{(n-1)}{30}\right],$$
$$U(f, P_n) = \frac{b^5}{n^5}\left[\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}\right].$$

Evidentemente $L(f, P_n)$ y $U(f, P_n)$ pueden aproximarse tanto como se quiera a $b^5/5$ eligiendo n suficientemente grande. Lo mismo que en el problema 1, esto implica que $\int_0^b x^4\,dx = b^5/5$.

7. (i) $\int_0^2 f = 0.$

(iii) $\int_0^2 f = 3.$

(v) f es no integrable.

(vii) $\int_0^2 f = 1.$

(Para una demostración rigurosa de que las funciones de (i), (iii) y (vii) son integrables, véase el problema 21. Los valores de las integrales, que se desprenden claramente de la representación geométrica, pueden también deducirse con rigor aplicando las ideas de la demostración del problema 21. haciendo uso de integrales conocidas.)

8. (i)

$$\int_{-2}^{2}\left[\left(\frac{x^2}{2}+2\right)-x^2\right]dx = \frac{16}{3}.$$

(iii)

$$\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2}[(1-x^2)-x^2]\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

(v)

$$\int_0^2 [(x^2-2x+4)-x^2]\,dx = 4.$$

9.

$$\begin{aligned}\int_a^b\left(\int_c^d f(x)g(y)\,dy\right)dx &= \int_a^b\left(f(x)\int_c^d g(y)\,dy\right)dx \quad \text{(aquí la constante es } f(x))\\ &= \int_c^d g(y)\,dy\cdot\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

(aquí la constante es $\int_c^d g(y)\,dy$)

14. (a) Evidentemente $L(f, P) \geq 0$ para toda partición P.
(b) Aplíquese la parte (a) a $f-g$ y hágase uso del hecho de ser $\int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g$.

24. (a) Evidentemente

$$m(b-a) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq M(b-a)$$

para todas las particiones P de $[a, b]$. En consecuencia,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Así pues,

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

satisface $m \leq \mu \leq M$.

(b) Sean m y M los valores mínimo y máximo de f sobre $[a, b]$. Puesto que f es continua, toma los valores m y M, y en consecuencia el número μ de la parte (a).

34. (a) 0.
(b) $\frac{1}{2}$.

38. Puesto que

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

tenemos

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

de modo que

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

(El problema 37 implica que $\int_a^b |f|$ tiene sentido.)

CAPÍTULO 14

1. (i) $(\text{sen}^3 x^3) \cdot 3x^2$.
(iii) $\displaystyle\int_8^x \frac{1}{1 + t^2 + \text{sen}^2 t}\, dt$.
(v) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{1 + t^2 + \text{sen}^2 t}\, dt$.
(vii) $\displaystyle(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))} = F^{-1}(x)$.

2. (i) Todo $x \neq 1$.
(iii) Todo $x \neq 1$.
(v) Todo x.
(vii) Todo $x \neq 0$. (F no es derivable en 0, puesto que $F(x) = 0$ para $x \leq 0$, pero existen $x > 0$ tan próximos como se quiera de 0 con $F(x) = \frac{1}{2}$.)

5. (i)

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{1 + \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(f^{-1}(0)))}$$
$$= \frac{1}{1 + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} 0))} = 1.$$

12. $F(x) = x \int_0^x f(t)\,dt$, de donde

$$F'(x) = xf(x) + \int_0^x f(t)\,dt.$$

15. $$f(x) = \int_0^x \left(\int_0^y \left(\int_0^z \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}}\,dt\right) dz\right) dy.$$

17. Podemos elegir

$$f(x) = \frac{x^{(1/n)+1}}{\dfrac{1}{n} + 1}.$$

Entonces

$$\int_0^b \sqrt[n]{x}\,dx = f(b) - f(0) = \frac{b^{(1/n)+1}}{\dfrac{1}{n} + 1}.$$

CAPÍTULO 15

1. (i)

$$\frac{1}{1 + \operatorname{arctg}^2(\operatorname{arctg} x)} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{arctg}^2 x} \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$$

(iii)

$$\frac{1}{1 + (\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} x)^2} \cdot \left(\sec^2 x \operatorname{arctg} x + \frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2}\right).$$

2. (i) 0.
(iii) 0.
(v) 0.

7. (a) $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(x + x) = \operatorname{sen} x \cos x + \cos x \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cos x.$
$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x.$
$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen}(2x + x) = \operatorname{sen} 2x \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x$
$= 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x$

$$= 3 \text{ sen } x \cos^2 x - \text{sen}^3 x.$$

$$\begin{aligned}\cos 3x = \cos(2x + x) &= \cos 2x \cos x - \text{sen } 2x \text{ sen } \bar{x} \\ &= (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \cos x = 2 \text{ sen}^2 x \cos x \\ &= \cos^3 x - \text{sen}^2 x \cos x - 2 \text{ sen}^2 x \cos x \\ &= \cos^3 x - 3 \text{ sen}^2 x \cos x \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x.\end{aligned}$$

(b) Por ser $\cos \pi/4 > 0$ y

$$0 = \cos \frac{\pi}{2} = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} - 1,$$

tenemos $\cos \pi/4 = \sqrt{2/2}$. Se sigue, por ser $\text{sen } \pi/4 > 0$ y $\text{sen}^2 + \cos^2 = 1$, que $\text{sen } \pi/4 = \sqrt{2/2}$, y en consecuencia $\tan \pi/4 = 1$. Análogamente, al ser $\cos \pi/6 > 0$ y

$$0 = \cos \frac{\pi}{2} = \cos 3 \cdot \frac{\pi}{6} = 4 \cos^3 \frac{\pi}{6} - 3 \cos \frac{\pi}{6},$$

tenemos $\cos \pi/6 = \sqrt{3/2}$. Se sigue, por ser $\pi/6 > 0$, que $\text{sen } \pi/6 =$ $= \sqrt{1 - (\sqrt{3}/2)^2} = \frac{1}{2}$.

9. (a)

$$\begin{aligned}\text{tg}(x + y) &= \frac{\text{sen}(x + y)}{\cos(x + y)} \\ &= \frac{\text{sen } x \cos y + \cos x \text{ sen } y}{\cos x \cos y - \text{sen } x \text{ sen } y} \\ &= \frac{\dfrac{\text{sen } x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\cos x \text{ sen } y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\text{sen } x \text{ sen } y}{\cos x \cos y}} \\ &= \frac{\text{tg } x + \text{tg } y}{1 - \text{tg } x \text{ tg } y}.\end{aligned}$$

(b) según la parte (a) tenemos

$$\begin{aligned}\text{tg}(\text{arctg } x + \text{arctg } y) &= \frac{\text{tg}(\text{arctg } x) + \text{tg}(\text{arctg } y)}{1 - \text{tg}(\text{arctg } x)\,\text{tg}(\text{arctg } y)} \\ &= \frac{x + y}{1 - xy},\end{aligned}$$

siempre que arctg x, arctg y y arctg $x+$ arctg $y \neq k\pi + \pi/2$. Al ser $-\pi/2 <$ arctg x, arctg $y < \pi/2$, esto se cumple siempre excepto cuando arctg $x+$ arctg $y = \pm\,\pi/2$, lo cual equivale a $xy = 1$. A partir de esta ecuación podemos concluir que

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

siempre que arctg $x+$ arctg y esté en $(-\pi/2, \pi/2)$, lo cual se cumple siempre que $xy < 1$. (Si $x, y > 0$ y $xy > 1$, de modo que arctg $x+$ + arctg $y > \pi/2$, entonces debemos sumar π al segundo miembro, y si $x, y < 0$ y $xy > 1$, de modo que arctg $x+$ arctg $y < -\pi/2$, entonces debemos restar π.)

11. La primera fórmula se obtiene restando la segunda de la primera de las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\cos(m-n)x &= \cos(mx-nx) = \cos mx\cos(-nx) - \operatorname{sen} mx \operatorname{sen}(-nx)\\ &= \cos mx \cos nx + \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx,\\ \cos(m+n)x &= \cos mx\cos nx - \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx.\end{aligned}$$

Las otras fórmulas se obtienen de manera análoga.

12. Se sigue del problema 11 que si $m \neq n$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx &= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\, dx\\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\operatorname{sen}(m-n)\pi}{m-n} - \frac{\operatorname{sen}(m+n)\pi}{m+n}\right]\right.\\ &\qquad \left.-\left[\frac{\operatorname{sen}(m-n)\pi}{m-n} - \frac{\operatorname{sen}(m+n)\pi}{m+n}\right]\right\}\\ &= 0.\end{aligned}$$

pero si $m = n$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx &= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos(m+n)x\, dx\\ &= \tfrac{1}{2}\{[\pi - \cos(m+n)\pi] - [-\pi - \cos(m+n)\pi]\}\\ &= \pi.\end{aligned}$$

Las otras fórmulas se demuestran de manera análoga.

15. (a) Tenemos

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\\ &= 2\cos^2 x - 1.\end{aligned}$$

Así pues,

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

(b) Estas fórmulas derivan de la parte (a), puesto que $\cos x/2 \geq 0$ y $\operatorname{sen} x/2 \geq 0$ (al ser $0 \leq x \leq \pi/2$).

(c)

$$\int_a^b \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int_a^b \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{4}(\operatorname{sen} 2b - \operatorname{sen} 2a).$$
$$\int_a^b \cos^2 x\,dx = \int_a^b \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{4}(\operatorname{sen} 2b - \operatorname{sen} 2a).$$

19. (a) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \pi/4$.
(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \pi/2$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\operatorname{sen} x = 1.$

21. (a) $(\operatorname{sen}^\circ)'(x) = \dfrac{\pi}{180}\cos\left(\dfrac{\pi x}{180}\right) = \dfrac{\pi}{180}\cos^\circ(x).$

$(\cos^\circ)'(x) = \dfrac{\pi}{180}\cdot -\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{180}\right) = \dfrac{-\pi}{180}\operatorname{sen}^\circ(x).$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^\circ x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(\pi x/180)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi}{180}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}(\pi x/180)}{\pi x/180} = \dfrac{\pi}{180}.$

$\lim\limits_{x\to\infty} x\operatorname{sen}^\circ\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen}^\circ x}{x} = \dfrac{\pi}{180}.$

CAPÍTULO 17

1. (i) $e^{e^{e^{e^x}}}\cdot e^{e^{e^x}}\cdot e^{e^x}\cdot e^x.$

(iii) $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}[(\log(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x + (\cos x/\operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)].$

(v) $\operatorname{sen} x^{\operatorname{sen} x^{\operatorname{sen} x}}[(\log(\operatorname{sen} x)) \cdot \operatorname{sen} x^{\operatorname{sen} x} \cdot \{(\log(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos x + (\cos x/\operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{sen} x\} + (\cos x/\operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{sen} x^{\operatorname{sen} x}].$

(vii)
$$\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)\right]^{\log(\operatorname{sen} e^x)}\left[\left(\log\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)\right)\right)\cdot\frac{(\cos e^x)e^x}{\operatorname{sen} e^x} + \log(\operatorname{sen} e^x)\cdot\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)\sqrt{1-\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^2}\cdot \operatorname{sen}^2 x}\right].$$

(ix) $(\log x)^{\log x} \cdot \left[\log(\log x) \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}\right].$

5. (i) 0.
(iii) $\frac{1}{6}$.
(v) $\frac{1}{3}$.

7. (a)

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2\\ &= \left[\frac{e^{2x}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{4}\right] - \left[\frac{e^{2x}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{4}\right]\\ &= 1.\end{aligned}$$

(c)

$$\operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$$
$$= \left[\frac{e^{x+y}}{4} + \frac{e^{-x-y}}{4} - \frac{e^{-x+y}}{4} + \frac{e^{x-y}}{4}\right] + \left[\frac{e^{x+y}}{4} + \frac{e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{-x+y}}{4} - \frac{e^{-x-y}}{4}\right]$$
$$= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{senh}(x+y).$$

(e) Al ser

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

tenemos

$$\operatorname{senh}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

(g) Al ser

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x},$$

tenemos

$$\operatorname{tgh}'(x) = \frac{(\cosh x)^2 - (\operatorname{senh} x)^2}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2 x} \text{ según la parte (a).}$$

8. (a) Si $y = \arg\cosh x$, entonces $x \geq 0$ y

$$x = \cosh y = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y} \text{ según la parte (a).}$$

Así pues,

$$\operatorname{senh}(\arg\cosh x) = \operatorname{senh} y = \sqrt{x^2 - 1} \text{ puesto que } \operatorname{senh} y \geq 0 \text{ para } y \geq 0.$$

(c)

$$(\arg\operatorname{senh})'(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}'(\arg\operatorname{senh}(x))}$$

$$= \frac{1}{\cosh(\arg\operatorname{senh}(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \text{ según la parte (b).}$$

(e)

$$(\arg\ \operatorname{tgh})'(x) = \frac{1}{\operatorname{tgh}'(\arg\ \operatorname{tgh}(x))}$$

$$= \cosh^2(\arg\ \operatorname{tgh}(x)).$$

Ahora bien,

$$\operatorname{tgh}^2 y + \frac{1}{\cosh^2 y} = 1 \quad \text{según el problema 7 (b),}$$

así pues,

$$\operatorname{tgh}^2(\arg \quad \operatorname{tgh}(x)) + \frac{1}{\cosh^2(\arg \quad \operatorname{tgh}(x))} = 1,$$

o

$$\cosh^2(\arg \quad \operatorname{tgh}(x)) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

9. (a) Si $y = \arg \operatorname{senh} x$, entonces

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

así pues,

$$\begin{aligned} e^y - e^{-y} &= 2x, \\ e^{2y} - 2xe^y - 1 &= 0, \\ e^y &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

de donde

$$e^y = x + \sqrt{1 + x^2} \quad \text{puesto que } e^y > 0$$

o

$$y = \arg \operatorname{senh} x = \log(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \arg \cosh x &= \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \\ \arg \quad \operatorname{tgh} x &= \tfrac{1}{2} \log(1 + x) - \tfrac{1}{2} \log(1 - x). \end{aligned}$$

(b)

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \text{arg senh}\,b - \text{arg senh}\,a \quad \text{según el problema 8(c)}$$

$$= \log(b + \sqrt{1+b^2}) - \log(a + \sqrt{1+a^2}).$$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \log(b + \sqrt{b^2-1}) - \log(a + \sqrt{a^2-1}).$$

$$\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}[\log(1+b) - \log(1-b) - \log(1+a) + \log(1-a)].$$

12. (a) $\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\log a}$. Al ser $\log a < 0$, tenemos $\lim_{x\to\infty} x \log a = -\infty$, de donde $\lim_{x\to\infty} e^{x\log a} = 0$.

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^n}{x} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^n}{e^y} = 0.$

(e) $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\log x}$. Ahora bien, $\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0$ según la parte (d), de donde $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$.

16. (a) $\lim_{y\to 0} \log(1+y)/y = \log'(1) = 1.$

(b) $\lim_{x\to\infty} x\log(1+1/x) = \lim_{y\to 0^+} \log(1+y)/y = 1.$

(c)

$$\begin{aligned} e = \exp(1) &= \exp(\lim_{x\to\infty} x\log(1+1/x)) \\ (*) &= \lim_{x\to\infty} \exp(x\log(1+1/x)) \\ &= \lim_{x\to\infty} (1+1/x)^x. \end{aligned}$$

(La igualdad marcada con un asterisco depende de la continuidad de exp en 1, y puede justificarse como sigue. Para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que $|e - \exp y| < \varepsilon$ para $|y - 1| < \delta$. Además, existe algún N tal que $|x \log (1 + 1/x) - 1| < \delta$ para $x > N$. Por lo tanto, $|e - x \log (1 + 1/x)| < \varepsilon$ para $x > N$.

(d)

$$\begin{aligned} e^a &= [\lim_{x\to\infty} (1+1/x)^x]^a = \lim_{x\to\infty} (1+1/x)^{ax} \\ &= \lim_{ax\to\infty} (1+1/x)^{ax} = \lim_{y\to\infty} (1+a/y)^y. \end{aligned}$$

18. Al cabo de un año, el número de pesetas producidas por una inversión inicial de una peseta será

$$\lim_{x \to \infty} (1 + a/100\,x)^x = e^{a/100}.$$

19. (a) Evidentemente, $f'(x) = 1/x$ para $x > 0$. Si $x < 0$, entonces $f(x) = \log(-x)$, de modo que $f'(x) = (-1)\cdot 1/(-x) = 1/x$.
(b) Podemos poner $\log|f|$ en la forma $g \circ f$ siendo $g(x) = \log|x|$ la función de la parte (a). De este modo $(\log|f|)' = (g' \circ f)\cdot f' = 1/f\cdot f'$.

20. Sea $g(x) = f(x)/e^{cx}$. Entonces

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^{cx}f'(x) - f(x)ce^{cx}}{e^{2cx}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

de modo que existe algún número k tal que $g(x) = k$ para todo x.

21. (a) Según el problema 20, existe algún k tal que $A(t) = ke^{ct}$. Entonces $k = ke^{0\cdot t} = a_0$. Así pues, $A(t) = A_0e^{ct}$.
(b) Si $A(t + \tau) = A(t)/2$, entonces

$$A_0e^{ct+c\tau} = \frac{A_0e^{ct}}{2},$$

de modo que $e^{ct}e^{c\tau} = e^{ct}/2$ o $e^{c\tau} = \frac{1}{2}$, de donde $\tau = -(\log 2)/c$. Se comprueba fácilmente que este τ resuelve efectivamente la cuestión.

22. La ley de Newton afirma que, para un cierto número (positivo) c,

$$T'(t) = c(T - M),$$

lo cual puede ponerse

$$(T - M)' = c(T - M).$$

De este modo, según el problema 16, existe algún número k tal que

$$T(t) - M = ke^{ct},$$

y $k = ke^{0\cdot t} = T(0) = T_0$. Así pues, $T(t) = M + T_0 e^{ct}$.

CAPÍTULO 18

1. (i) $(\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[6]{x}/\sqrt{x} = x^{1/10} + x^{-1/3})$.

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{-2}$.

(iii) $(e^x + e^{2x} + e^{3x})/e^{4x} = e^{-3x} + e^{-2x} + e^{-x}$.

(iv) $a^x/b^x = (a/b)^x = e^{x\log(a/b)}$.

(v) $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$.

(vi) $\dfrac{1}{a^2+x^2} = \dfrac{1/a^2}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}$.

(vii) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{1/a}{\sqrt{1-(x/a)^2}}$.

(viii) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x} = \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \sec x \operatorname{tg} x$.

(ix) $\dfrac{8x^2+6x+4}{x+1} = 8x - 2 + \dfrac{6}{x+1}$.

(x) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$.

2. (i) $-\cos e^x$. (Póngase $u = e^x$.)

(iii) $(\log x)^2/2$. (Póngase $u = \log x$.)

(v) e^{e^x}. (Póngase $u = e^{e^x}$.)

(vii) $2e^{\sqrt{x}}$. (Póngase $u = \sqrt{x}$.)

(ix) $-(\log(\cos x))^2/2$. (Póngase $u = \log(\cos x)$.)

3. (i) $\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - [2xe^x - \int e^x\,dx]$
$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$.

(iii) Tenemos

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}\operatorname{sen} bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$
$$= \frac{e^{ax}\operatorname{sen} bx}{a} - \frac{b}{a}\left[\frac{e^{ax}\cos bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}(-\operatorname{sen} bx)\,dx\right],$$

de donde

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \operatorname{sen} bx - \frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \cos bx.$$

(v) Utilizando el resultado $\int (\log x)^2\, dx = x(\log x)^2 - 2x(\log x) + 2x$ del texto tenemos

$$\begin{aligned}\int (\log x)^3\, dx &= [x(\log x)^2 - 2x(\log x) + 2x]\log x \\ &\qquad - \int \frac{1}{x}[x(\log x)^2 - 2x(\log x) + 2x]\, dx \\ &= x(\log x)^3 - 2x(\log x)^2 + 2x \log x \\ &\qquad - \int (\log x)^2\, dx + 2[x \log x - x] - 2x \\ &= x(\log x)^3 - 2x(\log x)^2 + 2x \log x \\ &\qquad - [x(\log x)^2 - 2x(\log x) + 2x] + 2[x \log x - x] - 2x \\ &= x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6x \log x - 6x.\end{aligned}$$

(vii) $\int \sec^3 x\, dx = \int (\sec^2 x)(\sec x)\, dx = \operatorname{tg} x \sec x - \int (\operatorname{tg} x)(\sec x \operatorname{tg} x)\, dx$

$$\begin{aligned}&= \operatorname{tg} x \sec x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \operatorname{tg} x \sec x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx,\end{aligned}$$

de donde

$$\int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2}[\operatorname{tg} x \sec x + \log(\sec x + \operatorname{tg} x)].$$

(ix)
$$\begin{aligned}\int \sqrt{x} \log x\, dx &= \frac{2x^{3/2}}{3} \log x - \frac{2}{3}\int x^{3/2} \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= \frac{2x^{3/2}}{3} \log x - \frac{2}{3}\int x^{1/2}\, dx \\ &= \frac{2x^{3/2}}{3} \log x - \frac{4}{9} x^{3/2}.\end{aligned}$$

4. (i) Pongamos $x = \operatorname{sen} u$, $dx = \cos u\, du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{\cos u\, du}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u}} = \int 1\, du = u = \operatorname{arcsen} x.$$

(iii) Póngase $x = \sec u$, $dx = \sec u \ \operatorname{tg} \ u\,du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{\sec u \ \operatorname{tg} \ u\,du}{\sqrt{\sec^2 u - 1}} = \int \sec u\,du = \log(\sec u + \operatorname{tg} u)$$
$$= \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

(v) Póngase $x = \operatorname{sen} u$, $dx = \cos u\,du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{\cos u\,du}{\operatorname{sen} u \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u}} = \int \operatorname{cosec} u\,du = -\log(\operatorname{cosec} u + \operatorname{ctg} u)$$
$$= -\log\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right).$$

(vii) Póngase $x = \operatorname{sen} u$, $dx = \cos u\,du$. La integral se convierte en

$$\int (\operatorname{sen}^3 u \cos u)\cos u\,du = \int \operatorname{sen}^3 u \cos^2 u\,du = \int (\operatorname{sen} u)(1 - \cos^2 u)\cos^2 u\,du$$
$$= \int (\operatorname{sen} u)(\cos^2 u - \cos^4 u)\,du = -\frac{\cos^3 u}{3} + \frac{\cos^5 u}{5}$$
$$= -\frac{(1 - x^2)^{3/2}}{3} + \frac{(1 - x^2)^{5/2}}{5}.$$

(ix) Póngase $x = \operatorname{tg} \ u$, $dx = \sec^2 u\,du$. La integral se convierte en

$$\int \sec u \sec^2 u\,du = \int \sec^3 u\,du$$
$$= \tfrac{1}{2}[\operatorname{tg} u \sec u + \log(\sec u + \operatorname{tg} u)] \text{ según el problema 3(vii)}$$
$$= \tfrac{1}{2}[x\sqrt{1 + x^2} + \log(x + \sqrt{1 + x^2})].$$

5. (i) Póngase $u = \sqrt{x + 1}$, $x = u^2 - 1$, $dx = 2u\,du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{2u\,du}{1 + u} = \int \left(2 + \frac{-2}{1 + u}\right) du$$
$$= 2u - 2\log(1 + u) = 2\sqrt{x + 1} - 2\log(1 + \sqrt{x + 1}).$$

(iii) Póngase $u = x^{1/6}$, $x = u^6$, $dx = 6u^5\,du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{6u^5\,du}{u^3 + u^2} = 6\int \left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u + 1}\right) du = 2u^3 - 3u^2 + 6u - 6\log(u + 1)$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\log(\sqrt[6]{x} + 1).$$

(v) Póngase $u = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} u$, $dx = du/(1 + u^2)$. La integral se convierte en

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{(1 + u^2)(2 + u)} &= \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{2 + u} - \frac{u - 2}{1 + u^2}\right) du \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{du}{2 + u} - \frac{1}{10}\int \frac{2u}{1 + u^2}\,du + \frac{2}{5}\int \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \frac{1}{5}\log(2 + u) - \frac{1}{10}\log(1 + u^2) + \frac{2}{5}\operatorname{arctg} u \\ &= \frac{1}{5}\log(2 + \operatorname{tg} x) - \frac{1}{10}\log(1 + \operatorname{tg}^2 x) + \frac{2}{5}x.\end{aligned}$$

(vii) Póngase $u = 2^x$, $x = (\log u)/(\log 2)$, $dx = du/(u \log 2)$. La integral se convierte en

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log 2}\int \frac{u^2 + 1}{(u + 1)u}\,du &= \frac{1}{\log 2}\int \left(1 + \frac{1 - u}{u(u + 1)}\right) du \\ &= \frac{1}{\log 2}\int \left(1 + \frac{1}{u} - \frac{2}{u + 1}\right) du \\ &= \frac{1}{\log 2}\left[u + \log u - 2\log(u + 1)\right] \\ &= \frac{1}{\log 2}\left[2^x + x\log 2 - 2\log(2^x + 1)\right].\end{aligned}$$

(ix) Póngase $u = \sqrt{x}$, $x = u^2$, $dx = 2u.du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{\sqrt{1 - u^2}\,2u\,du}{1 - u}.$$

Póngase ahora $u = \operatorname{sen} y$, $du = \cos y\,dy$. La integral se convierte en

$$\begin{aligned}\int \frac{2\cos y \operatorname{sen} y \cos y}{1 - \operatorname{sen} y}\,dy &= 2\int \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 y)\operatorname{sen} y}{1 - \operatorname{sen} y}\,dy \\ &= 2\int (1 + \operatorname{sen} y)\operatorname{sen} y\,dy\end{aligned}$$

$$= 2\int \operatorname{sen} y\, dy + \int 1 - \cos 2y\, dy$$
$$= -2\cos y + y - \frac{\operatorname{sen} 2y}{2} = -2\cos y + y - \operatorname{sen} y \cos y$$
$$= -2\sqrt{1-u^2} + \operatorname{arcsen} u - u\sqrt{1-u^2}$$
$$= -2\sqrt{1-x} + \operatorname{arcsen}\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x}.$$

La sustitución $u = \sqrt{1-x}$, $x = 1 - u^2$, $dx = -2u\, du$ lleva a

$$\int \frac{-2u^2\, du}{1 - \sqrt{1-u^2}},$$

y la sustitución $u = \operatorname{sen} y$ lleva entonces a

$$\int \frac{-2\operatorname{sen}^2 y \cos y\, dy}{1 - \cos y} = -2\operatorname{sen} y - y - \operatorname{sen} y \cos y$$
$$= -2u - \operatorname{arcsen} u - u\sqrt{1-u^2}$$
$$= -2\sqrt{1-x} - \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x}\sqrt{x}.$$

Las soluciones concuerdan, puesto que

$$\operatorname{arcsen}\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x}$$

(compruébese esto comparando sus derivadas y sus valores para $x = 0$).

6. En estos problemas I designará la integral de origen.

(i)

$$I = \int \frac{2}{x-1}\, dx + \int \frac{3}{(x+1)^2}\, dx$$
$$= 2\log(x-1) - \frac{3}{x+1}.$$

(iii)

$$I = \int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx + \int \frac{4}{(x+1)^3}\, dx$$

$$= -\frac{1}{(x-1)} - \frac{2}{(x+1)^2}.$$

(v)

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{4}{x^2+1}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\log(x^2+1) + 4 \quad \operatorname{arctg} \ x.$$

(vii)

$$I = \int \frac{1}{(x+1)}\,dx + \int \frac{2x}{(x^2+x+1)}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Ahora bien,

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$
$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\,dx$$
$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \ \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \ \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right),$$

de donde

$$I = \log(x+1) + \log(x^2+x+1) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \ \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right).$$

(ix)

$$I = \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx - \frac{16}{9}\int \frac{1}{\left(\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1\right)^2}\,dx.$$

Ahora la sustitución

$$u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right), \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,du$$

cambia la segunda integral en

$$-\frac{16}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{(u^2+1)^2}.$$

Utilizando la fórmula de reducción, esto puede ponerse

$$-\frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1}\right] = -\frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{\log(u^2+1)}{4} + \frac{1}{2}\ \text{arctg}\ u\right],$$

de donde

$$I = -\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\log\left(\frac{4}{3}(x^2+x+1)\right)$$
$$-\frac{4\sqrt{3}}{9}\ \text{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left((x+\frac{1}{2}\right)\right).$$

13. La ecuación $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$ significa que cualquier función F con $F'(x) = e^x \operatorname{sen} x$ puede escribirse $F(x) = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - G(x)$, donde G es otra función con $G'(x) = e^x \operatorname{sen} x$ Por supuesto, $G = F + c$ para algún c, pero no se cumple necesariamente que $F = G$.

15. (a)

$$\int \text{arcsen}\,x\,dx = \int 1\cdot\text{arcsen}\,x\,dx = x\ \text{arcsen}\,x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= x \text{ arcsen } x + \sqrt{1 - x^2}.$$

16. (a)

$$\int \text{sen}^4 x\, dx = -\frac{\text{sen}^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4}\int \text{sen}^2 x\, dx$$
$$= -\frac{\text{sen}^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4}\left[-\frac{\text{sen } x \cos x}{2} + \frac{1}{2}\int 1\, dx\right]$$
$$= -\frac{\text{sen}^3 x \cos x}{4} - \frac{3 \text{ sen } x \cos x}{8} + \frac{3}{8}x.$$
$$\int \text{sen}^4 x\, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4}\right) dx$$
$$= \frac{x}{4} - \frac{\text{sen } 2x}{4} + \frac{1}{4}\int \frac{1 + \cos 4x}{2}\, dx$$
$$= \frac{x}{4} - \frac{\text{sen } 2x}{4} + \frac{1}{4}\left[\frac{x}{2} + \frac{\text{sen } 4x}{8}\right]$$
$$= \frac{3x}{8} - \frac{\text{sen } 2x}{4} + \frac{\text{sen } 4x}{32}.$$

(b) Se sigue que estas dos soluciones son una misma, puesto que tienen el mismo valor para $x = 0$.

20. (a)

$$\text{sen}^n x\, dx = \int (\text{sen } x)(\text{sen}^{n-1} x)\, dx$$
$$= -\cos x \text{ sen}^{n-1} x + (n - 1)\int (\cos x)(\text{sen}^{n-2} x)(\cos x)\, dx$$
$$= -\cos x \text{ sen}^{n-1} x + (n - 1)\int (\text{sen}^{n-2} x - \text{sen}^n x)\, dx,$$

de donde

$$\int \text{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\cos x \text{ sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} x\, dx.$$

(b)

$$\int \cos^n x\, dx = \int (\cos x)(\cos^{n-1} x)\, dx$$
$$= \text{sen } x \cos^{n-1} x + (n - 1)\int \text{sen } x(\cos^{n-2} x)\text{sen } x\, dx$$
$$= \text{sen } x \cos^{n-1} x + (n - 1)\int (\cos^{n-2} x - \cos^n x)\, dx,$$

de donde

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx.$$

(c)

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2\, dx}{(1+x^2)^n}$$
$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^n}\, dx$$
$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \left[\frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{dx}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}}\right]$$

de donde

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{(2n-3)}{2(n-1)} \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\, dx.$$

Podemos también utilizar la sustitución $x = \operatorname{tg} u$, $dx = \sec^2 u\, du$, la cual cambia la integral en

$$\int \frac{\sec^2 u\, du}{\sec^{2n} u} = \int \cos^{2n-2} u\, du$$
$$= \frac{1}{2n-2} \cos^{2n-3} u \operatorname{sen} u + \frac{2n-3}{2n-2} \int \cos^{2n-4} u\, du$$
$$= \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^{2n-3}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

CAPÍTULO 19

1. (i) $P_{3,0}(x) = e + ex + ex^2 + (5e/3!)x^3.$

(iii) $P_{2n,\pi/2}(x) = 1 - \dfrac{(x-\pi/2)^2}{2!} + \dfrac{(x-\pi/2)^4}{4!} - \cdots +$

$\dfrac{(-1)^n(x-\pi/2)^{2n}}{(2n)!}$.

(v) $P_{n,1}(x) = e + e(x-1) + \dfrac{e(x-1)^2}{2!} + \cdots + \dfrac{e(x-1)^n}{n!}$.

(vii) $P_{4,0}(x) = x + x^3$.

(ix) $P_{2n+1,0}(x) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n}$.

2. Si f es una función polinómica de grado n, entonces $f^{(n+1)} = 0$. Se sigue del teorema de Taylor que $R_{n,a}(x) = 0$, de modo que $f(x) = P_{n,a}(x)$.

(i) $-12 + 2(x-3) + (x-3)^2$.

(iii) $243 + 405(x-3) + 270(x-3)^2 + 90(x-3)^3 + 15(x-3)^4 + (x-3)^5$.

3. (i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{9} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\left(\text{ya que } \frac{1}{(2n+2)!} < 10^{-17} \text{ para } 2n+2 \geq 19, \text{ o } n \geq 9\right)$.

(iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{8} \frac{(-1)^i}{2^i(2i+1)!}\left(\text{ya que } \frac{1}{2^{2n+2}(2n+2)!} < 10^{-20} \text{ para } 2n+2 \geq 18, \text{ o } n \geq 8\right)$.

(v) $\displaystyle\sum_{i=0}^{11} \frac{2^i}{i!}\left(\text{ya que } \frac{3^2 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-5} \text{ para } n+1 \geq 12, \text{ o } n \geq 11\right)$.

8. (i) $c_i = a_i + b_i$.

(iii) $c_i = (i+1)a_i$.

(v) $c_0 = \int_0^a f(t)\,dt$; $c_i = a_{i-1}/i$ para $i > 0$.

CAPÍTULO 21

1. (i) $1 - n/(n+1) = 1/(n+1) < \varepsilon$ para $n+1 > 1/\varepsilon$.

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[8]{n^2}) + \lim_{n\to\infty} (\sqrt[4]{n} - \sqrt[4]{n+1}) = 0 + 0 = 0$. (Cada uno de estos dos límites puede demostrarse del mismo modo que se demostró en el texto que $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.)

(v) Evidentemente $\lim\limits_{n\to\infty} (\log a)/n = 0$. Así, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{(\log a)/n} = e^0$ (según el teorema 1) $= 1$.

(vii) $\sqrt[n]{n^2} \leq \sqrt[n]{n^2+n} \leq \sqrt[n]{2n^2}$, de modo que $(\sqrt[n]{n})^2 \leq \sqrt[n]{n^2+n} \leq \sqrt[n]{2}\,(\sqrt[n]{n})^2$, y $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\,(\sqrt[n]{n})^2 = 1$ según las partes (v) y (vi).

(ix) Evidentemente $\alpha(n) \leq \log_2 n$, y $\lim\limits_{n\to\infty} (\log_2 n)/n = 0$.

5. (a) Si $0 < a < 2$, entonces $a^2 < 2a < 4$, de modo que $a < \sqrt{2a} < 2$.
(b) La parte (a) demuestra que

$$\sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} < \cdots < 2,$$

de modo que la sucesión converge según el teorema 2.
(c) Si esta sucesión se designa por $\{a_n\}$, entonces la sucesión $\{\sqrt{2a_n}\}$ es la misma que $\{a_{n+1}\}$. De este modo la indicación demuestra que $l = \sqrt{2l}$, o $l = 2$.

8. Si x es racional, entonces $n!\pi x$ es un múltiplo de π para n suficientemente grande, de modo que $(\cos n!\pi x)^{2k} = 1$ para tales n, de donde
$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{k\to\infty}(\cos n!\pi x)^{2k}) = 1.$$
Si x es irracional, entonces $n!\pi x$ no es un múltiplo de π para ningún n, de modo que $|\cos n!\pi x| < 1$, de donde $\lim\limits_{k\to\infty} (\cos n!\pi x)^{2k} = 0$, por tanto $f(x) = 0$.

9. (i) $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$. (Utilizar particiones de [0, 1] en n partes iguales.)

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \log 2$.

(v) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2}$.

CAPÍTULO 22

1. (i) Convergente (absolutamente), puesto que $|(\text{sen } n\theta)/n^2| \leq 1/n^2$.
(iii) Divergente, puesto que los $2n$ primeros términos tienen por suma

$\frac{1}{2} + \ldots + 1/n$. (El teorema de Leibnitz no es aplicable, puesto que los términos no son decrecientes en valor absoluto.)

(v) Divergente, puesto que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}} \geq \frac{1}{2n^{2/3}}.$$

para n suficientemente grande.

(vii) Convergente, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2/(n+1)!}{n^2/n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+1} = 0.$$

(ix) Divergente, pues $1/(\log n) > 1/n$.

(xi) Convergente, puesto que $1/(\log n)^n < \frac{1}{2^n}$ para $n > 9$.

(xiii) Divergente, puesto que

$$\frac{n^2}{n^3+1} > \frac{1}{2n}$$

para n suficientemente grande.

(xv) Divergente, puesto que

$$\int_3^N \frac{1}{x \log x}\,dx = \log(\log N) - \log(\log 3) \to \infty \text{ cuando } N \to \infty.$$

(Obsérvese que $f(x) = 1/(x \log x)$ es decreciente sobre $[3, \infty)$, ya que

$$f'(x) = \frac{-[1 + \log x]}{(x \log x)^2} < 0 \text{ para } x > e.$$

(xvii) Convergente, puesto que $1/n^2 (\log n) < 1/n^2$ para $n > 2$.

(xix) Convergente, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{2^n n!/n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e},$$

según el problema 17-16.

5. (a) Para cada N tenemos evidentemente

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{-n} < 9 \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} = 1,$$

de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ converge según el criterio de acotación, y está entre 0 y 1. (En realidad, este número se designa por $0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$ solamente cuando la sucesión $\{a_n\}$ no es eventualmente 0.)

17. El área de la región sombreada es $\frac{1}{2}$. La integral es

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}([1-\tfrac{1}{2}]+[\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}]+[\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{32}]+\cdots)-\tfrac{1}{2}([\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}]+[\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{16}]+\cdots)\\
&=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{32}+\tfrac{1}{128}+\cdots)-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{64}+\tfrac{1}{256}+\cdots)\\
&=\tfrac{1}{4}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{64}+\cdots)-\tfrac{1}{8}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{64}+\cdots)\\
&=\tfrac{1}{8}\left(1+\tfrac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right)\\
&=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\\
&=\tfrac{1}{6}.
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 23

1. (i)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$\{f_n\}$ no converge uniformemente hacia f.

(iii) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (puesto que $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$ para $x > 1$). La sucesión $\{f_n\}$ no converge uniformemente hacia f; en efecto, para un n cualquiera tenemos que $f_n(x)$ es grande para x suficientemente grande.

(v) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f, puesto que $|f_n(x)| \leq 1/n$ para todo x.

3. (i) $$-\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} - \frac{x^2}{a^3} - \cdots.$$

(iii) $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^k.$$

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k}}{2k+1} x^{2k+1}.$

4. (i) e^{-x}.

(iii) Si

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \cdots, \quad |x| \leq 1$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \\ &= \log(1 + x) \quad |x| < 1, \end{aligned}$$

de modo que para $|x| < 1$ tenemos $f(x) = (1 + x) \log (1 + x) - (1 + x) + c$ para algún número c. Al ser $f(0) = 0$, tenemos $c = 1$, de modo que $f(x) = (1 + x) \log (1 + x) - x$ para $|x| < 1$.

6. Puesto que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

tenemos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

(obsérvese que el segundo miembro es 1 para $x = 0$). Así pues,

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}, & k = 2n \\ 0, & k \text{ impar} \end{cases}$$

CAPÍTULO 24

1. (i) $|3 + 4i| = 5$; $\theta = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

(iii) $|(1 + i)^5| = (|1 + i|)^5 = 1$; puesto que $\pi/4 = \operatorname{arctg} 1/1$ es un argumento de $1 + i$, un argumento de $(1 + i)^5$ es $5\pi/4$.

(v) $|(|3 + 4i|)| = |5| = 5$; $\theta = 0$.

2. (i)

$$x = \frac{-i \pm \sqrt{-1-4}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{5}\,i}{2} = \frac{(-1+\sqrt{5})i}{2} \text{ o } \frac{(-1-\sqrt{5})i}{2}.$$

(iii) $x^2 + 2ix - 1 = (x+i)^2$, de modo que la única solución es $x = -i$.

(v) $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2+x+1)$. Las soluciones son

$$2, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

3. (i) Todos los $z = iy$ con y real.
   (iii) Todos los z de la mediatriz del segmento rectilíneo de a a b.
   (v) Ningún z, puesto que $|x + iy| < 1 - x$ implica que $x \geq 1$, y que $x^2 + y^2 < 1 - 2x + x^2$, de modo que $y^2 < 1 - 2x$, lo cual es imposible por ser $1 - 2x < 0$ para $x \geq 1$.
4. $|x + iy| = x^2 + y^2 = x^2 + (-y)^2 = |x - iy|$.
   $(z + \bar{z})/2 = [(x+iy) + (x-iy)]/2 = x$.
   $(z - \bar{z})/2 = [(x+iy) - (x-iy)]/2i = y$.
5. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) + (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = 2z\bar{z} + 2w\bar{w} = 2(|z|^2 + |w|^2)$. Geométricamente, esto dice que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelógramo es igual a la suma de los cuadrados de los lados.

CAPÍTULO 26

1. (i) Converge absolutamente, puesto que $|(1+i)^n/n!| \leq (\sqrt{2})^n/n!$, y $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^n/n!$ converge.
   (iii) Converge, pero no absolutamente, puesto que los términos reales forman la serie

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} - \cdots .$$

y los términos imaginarios forman la serie

$$i(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots).$$

(v) Diverge, puesto que los términos reales forman la serie

$$\frac{\log 3}{3} + 2\frac{\log 4}{4} + \frac{\log 5}{5} + \frac{\log 7}{7} + 2\frac{\log 8}{8} + \frac{\log 9}{9} + \cdots.$$

2. (i) El límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}/(n+1)^2}{|z|^n/n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 |z| = |z|$$

es < 1 para $|z| < 1$, pero > 1 para $|z| > 1$.

(iii) El límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} = |z|$$

es < 1 para $|z| < 1$ pero > 1 para $|z| > 1$.

(v) El límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}|z|^{(n+1)!}}{2^n|z|^{n!}} = \lim_{n\to\infty} 2|z|^{(n+1)!-n!}$$

es 0 para $|z| < 1$, pero ∞ para $|z| > 1$.

3. (i) Los límites

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{|z|^{2n}}{3^n}} = \frac{|z|}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{|z|^{2n+1}}{2^{n+1}}} = \frac{|z|}{\sqrt{2}}$$

son < 1 para $|z| < \sqrt{2}$, de modo que la serie converge absolutamente para $|z| < \sqrt{2}$. Pero la serie no converge absolutamente para $|z| > \sqrt{2}$, de modo que el radio de convergencia es $\sqrt{2}$.

(iii) Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!|z|^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|\sqrt[n]{n!}}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n} = 0,$$

la serie converge absolutamente para todo z, de modo que el radio de convergencia es ∞.

(v) El límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n z^{n!}} = 2 \lim_{n\to\infty} z^{(n-1)!}$$

es 0 para $|z| < 1$, pero ∞ para $|z| > 1$, de modo que el radio de convergencia es 1.

GLOSARIO DE SÍMBOLOS

ÍNDICE ALFABÉTICO

D

E

F

G

H

I

R

S

W

Y

Esta obra se terminó de imprimir en
Octubre de 1996 en los talleres de
Programas Educativos, S. A. de C.V.
Calz. de Chabacano No. 65 Local - A
Col. Asturias México, D. F.

Tiraje: 2,000 ejemplares